Capítulo 2

Questão 1

Dois carros viajam ao longo de uma estrada reta. O carro A mantém uma rapidez constante de $80\,km/h$ e o carro B mantém uma rapidez constante de $110\,km/h$. Em $t = 0$, o carro B está $45\,km$ atrás do carro A. Quanto mais viajará o carro A até ser ultrapassado pelo carro B?

Questão 2

O guepardo pode correr até a $113\,km/h$, o falcão pode voar até a $161\,km/h$ e o marlim pode nadar até a $105\,km/h$. Os três participam, como uma equipe, de uma corrida de revezamento, cada um cobrindo uma distância L com sua rapidez máxima. Qual é a rapidez média deste time para todo o percurso? Compare esta média com a média aritmética dos três valores individuais de rapidez. Explique cuidadosamente por que a rapidez média do time não é igual à média aritmética dos três valores individuais de rapidez.

Questão 3

Uma partícula se move ao longo do eixo x com a velocidade

$$v_x = \left(8\,m/s^2\right) t - 7\,m/s. \tag{1}$$

(a) Encontre a aceleração média para dois diferentes intervalos de um segundo, um começando em $t = 3\,s$ e o outro começando em $t = 4\,s$. (b) Esboce v_x versus t para o intervalo $0\,s < t < 10\,s$. Qual a aceleração instantânea?

Questão 4

Uma bola é lançada verticalmente para cima do nível do chão, com uma rapidez inicial de $20\,m/s$ (a resistência do ar é desprezível). (a) Quanto tempo a bola fica no ar? (b) Qual a altura máxima atingida pela bola? (c) Quantos segundos, após o lançamento, a bola estará $15\,m$ acima do ponto de largada?

Questão 5

Um objeto é largado do repouso de uma altura h. Durante seu último segundo no ar ele percorre uma distância d, encontre uma relação entre h e d. Obtenha d para $h = 120m$.

Questão 6

Um automóvel acelera a partir do repouso a $2\,m/s^2$ por $20\,s$. A rapidez é, então, mantida constante por $20\,s$ e, após, ele tem uma aceleração de $-5\,m/s^2$ até parar. Qual a distância total percorrida?

Questão 7

Um elevador leva um tempo T para subir do térreo ao topo de um prédio de altura h. O elevador inicia e termina em repouso. Suponha que ele mantém uma aceleração constante para cima até atingir a rapidez máxima, e depois mantém uma aceleração constante de igual magnitude até parar. Encontre a magnitude da aceleração do elevador e a velocidade máxima em termos de h e T.

Questão 8

A velocidade de uma partícula é dada por $v_x(t) = \left(7\,m/s^3\right) t^2 - 5\,m/s$. (a) Encontre a aceleração da partícula. (b) Se a partícula está na origem em $t = 0$, encontre a função posição $x(t)$.

Questão 9

A aceleração de certo foguete é dada por $a_x = bt$, onde b é uma constante positiva. (a) Encontre a função posição $x(t)$ com $x(t = 0) = x_0$ e $v_x(t = 0) = v_{0x}$. (b) Encontre a posição e a velocidade em $t = 5\,s$ com $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ e $b = 3\,m/s^3$. (c) Calcule a velocidade média do foguete entre $t = 4.5\,s$ e $5.5\,s$. Compare esta velocidade média com a velocidade instantânea em $t = 5\,s$.

Questão 10

Uma pequena pedra caindo n'água experimenta uma aceleração exponencialmente decrescente dada por $a_y(t) = ge^{-bt}$, onde b é uma constante positiva que depende da forma e do tamanho da pedra e de propriedades físicas da água. Com base nisso, encontre expressões para a velocidade e a posição da pedra como funções do tempo. Faça posição e velocidade iniciais ambos nulos e a orientação $+y$ apontando para baixo.
Considere também que

$$\int e^{-bt}dt = \frac{-1}{b}e^{-bt} + C. \tag{2}$$

Soluções

Questão 1

A velocidade relativa do carro B com relação ao carro A é de $v_{BA} = v_B - v_A = (110 - 80)km/h = 30km/h$. O tempo para que o carro B alcance o A é de

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{BA}} = \frac{45km}{30km/h} = 1.5h. \tag{3}$$

Sendo assim, carro B andará

$$\Delta s = v_B \Delta t = (110km/h)\,(1.5h) = 165km, \tag{4}$$

até alcançar o carro A.

Questão 2

Para obter a rapidez média utilizamos a expressão $v = \Delta s/\Delta t$. A distância total é de $\Delta s = 3L$. Iremos agora obter o tempo total, somando os tempos individuais.

$$\Delta t = \frac{L}{v_{gue}} + \frac{L}{v_{mar}} + \frac{L}{v_{fal}} = L\left(\frac{1}{v_{gue}} + \frac{1}{v_{fal}} + \frac{1}{v_{mar}}\right). \tag{5}$$

Desta forma,

$$v = \frac{3L}{L\left(\frac{1}{v_{gue}} + \frac{1}{v_{fal}} + \frac{1}{v_{mar}}\right)} = \frac{3}{\left(\frac{1}{v_{gue}} + \frac{1}{v_{fal}} + \frac{1}{v_{mar}}\right)}. \tag{6}$$

Substituindo os valores de velocidade, chegamos a $v = 122.03km/h$. Note que o resultado é diferente da média entre as velocidades, que seria de $v_{avg} = (v_{gue} + v_{fal} + v_{mar})/3 = 126.33km/h$. O principal fator que leva à diferença vem do cálculo do tempo total, que envolve a soma dos inversos das velocidades.

Questão 3

(a) A aceleração média é calculada a partir da expressão $a_{avg} = \Delta v_x/\Delta t$. Ou seja, a razão da variação da velocidade, $v_x(t = 4s) - v_x(t = 3s)$, pelo intervalo de tempo, $\Delta t = 4s - 3s$. Assim,

$$a_{avg} = \frac{25m/s - 17m/s}{4s - 3s} = 8m/s^2. \tag{7}$$

(b) A aceleração instantânea é calculada quando tomamos o limite $\Delta t \to 0$. Nesse caso,

$$a = \frac{dv_x}{dt} = 8m/s^2. \tag{8}$$

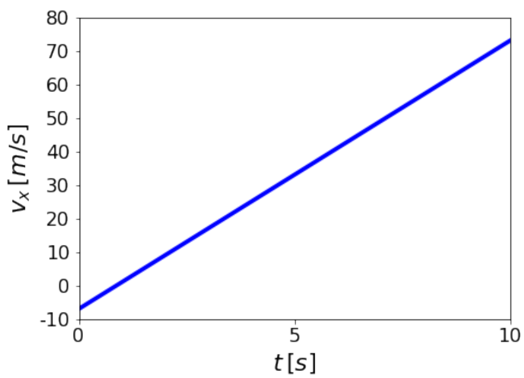

Figure 1: Velocidade, em metros por segundo, em função do tempo, em segundos.

Questão 4

(a) Para calcular o tempo total da bola no ar, escrevemos primeiro a equação da posição em função do tempo.

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{9}$$

Para obter o tempo total da bola no ar, basta substituir $y(t) = 0$ na expressão acima. A equação de segundo grau nos dará duas soluções.

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = t\left(v_0 - \frac{1}{2} g t\right). \tag{10}$$

Uma das soluções, já sabemos, é $t = 0$. A outra é

$$t = \frac{2v_0}{g} = 4.08s. \tag{11}$$

Que caracteriza o tempo onde a bola retorna ao solo.
(b) Para obter a altura máxima, podemos utilizar a expressão

$$v^2 = v_0^2 - 2g\Delta y. \tag{12}$$

Utilizando $v = 0$, o que acontece no ponto mais alto da tragetória, obteremos $\Delta y = h_{max}$.

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 20.39m. \tag{13}$$

(c) Novamente, utilizamos a expressão da posição em função do tempo, substituindo $y = 15\,m$.

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{14}$$

manipulando essa expressão, chegamos aos valores de tempo para cada altura y.

$$t^2 - \frac{2v_0}{g} t + \frac{2y}{g} = 0. \tag{15}$$

Cujas raízes são

$$t = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2y}{g}} = \frac{1}{g}\left(v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gy}\right). \tag{16}$$

Para $y = 15m$, obtemos $t = 0.99s$ e $t = 3.09s$. Nesses dois instantes a bola estará na altura de $15m$.

Questão 5

Para resolver essa questão, um caminho interessante é redefinir o eixo y, de modo que a aceleração da gravidade se torne positiva, e movendo a origem tal que a posição inicial do objeto seja na origem, i.e., $y_0 = 0$. Assim, a expressão para a posição em função do tempo se torna

$$y = \frac{1}{2} g t^2. \tag{17}$$

Note que o objeto é largado a partir do repouso, então o termo $v_0 t$ se anula. Para percorrer uma distância h, o tempo total é

$$h = \frac{1}{2} g t_f^2, \tag{18}$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{19}$$

Podemos também calcular a posição da partícula no último segundo antes de tocar o solo, ou seja, $t = t_f - 1s$.

$$y(t_f - 1s) = \frac{1}{2} g (t_f - 1)^2. \tag{20}$$

O deslocamento durante o último segundo é $d = h - y(t_f - 1s)$.

$$d = \frac{1}{2} g t_f^2 - \frac{1}{2} g \left(t_f^2 - 2t_f + 1\right) = \frac{1}{2} g (2t_f - 1), \tag{21}$$

$$d = \frac{1}{2} g \left(2\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right). \tag{22}$$

Para $h = 120m$, $d = 41.6m$.

Questão 6

Dividimos o movimento do carro em três partes.
(1) O automóvel acelera a partir do repouso por 20 s. Ao final desse trajeto, ele percorre

$$\Delta x_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = t^2\, m/s^2 = 400m. \tag{23}$$

Ao fim deste percurso, a velocidade é de

$$v = v_0 + at = 40m/s. \tag{24}$$

(2) O automóvel mantém a velocidade constante por $20s$, percorrendo, desta forma,

$$\Delta x_2 = v\Delta t = (40m/s)\,(20s) = 800m. \tag{25}$$

(3) Finalmente, o carro desacelera até parar, o deslocamento nesta parte do trajeto é de

$$v^2 = v_0^2 + 2ax_3, \tag{26}$$

$$0 = (40m/s)^2 - 2(5m/s^2)\Delta x_3, \tag{27}$$

$$\Delta x_3 = 160m. \tag{28}$$

A distância total percorrida é de $x_{total} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 400m + 800m + 160m = 1360m$.

Questão 7

Novamente, dividimos o trajeto em duas etapas.
(1) O elevador sobe com aceleração constante até atingir a velocidade máxima.

$$v_{max} = |a|t_1, \tag{29}$$

$$v_{max}^2 = 2|a|\Delta y_1. \tag{30}$$

(2) Na segunda parte do trajeto, magnetude da aceleração é a mesma, mas o sinal é negativo. A posição inicial agora é y_1, e a velocidade inicial é v_{max}. Escrevendo as equações para a velocidade e posição,

$$0 = v_{max} - |a|t_2, \tag{31}$$

$$0 = v_{max}^2 - 2|a|\Delta y_2. \tag{32}$$

Fazemos agora Eqs. (29) - (31) e Eqs. (30) - (32), para obter

$$v_{max} = \frac{1}{2}|a|(t_1 + t_2) = \frac{1}{2}|a|T, \tag{33}$$

$$v_{max}^2 = |a|(\Delta y_1 + \Delta y_2) = |a|h. \tag{34}$$

Finalmente, substituímos v_{max} para obter $|a|$ em função de h e T.

$$\left(\frac{1}{2}|a|T\right)^2 = |a|h, \tag{35}$$

$$|a|^2 T^2 = 4|a|h, \tag{36}$$

$$|a| = \frac{4h}{T^2}. \tag{37}$$

A partir do valor de $|a|$, obtemos também $v_{max} = \frac{2h}{T}$.

Questão 8

Dada a expressão para a velocidade da partícula, podemos obter a aceleração a partir de $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x$, e a posição a partir da expressão $x(t) = \int v_x(t)dt$.
(a) A aceleração então é de

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = (14\, m/s^2)t. \tag{38}$$

(b) Considerando $x_0 = 0$,

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \left(\frac{7}{3} m/s^3\right) t^3 - (5m/s)t + C. \tag{39}$$

Como a partícula está na origem em $t = 0$, obtemos que $C = 0$ e $x(t) = \left(\frac{7}{3} m/s^3\right) t^3 - (5m/s)t$.

Questão 9

(a) Começamos obtendo a velocidade da partícula.

$$v_x(t) = \int a_x(t)dt = \frac{b}{2}t^2 + C. \tag{40}$$

Com $v_x(t=0) = C = v_{0x}$, $v_x(t) = v_{0x} + \frac{b}{2}t^2$. Em seguida, obtemos a posição, novamente via integração.

$$x(t) = \int v_x(t)dt = v_{0x}t + \frac{b}{6}t^3 + C. \tag{41}$$

Novamente, utilizando a condição inicial $x(t=0) = x_0$, obtemos $x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{b}{6}t^3$.
(b) Substituindo os valores para as condições iniciais e para a constante b, obtém-se $x(t=5) = 62.5m$. Similarmente, $v(t=5) = 37.5m/s$.
Finalmente, a velocidade média no intervalo entre $t = 4.5s$ e $5.5s$ é

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t=5.5) - x(t=4.5)}{5.5s - 4.5s} = \frac{83.19m - 45.56m}{1s} = 37.63m/s. \quad (42)$$

Ligeiramente maior do que a velocidade instantânea em $t = 5s$.

Questão 10

Começamos obtendo a velocidade a partir da integração da aceleração.

$$v(t) = \int a_y(t)dt = g \int e^{-bt}dt = -\frac{g}{b}e^{-bt} + C. \quad (43)$$

Como $v(t=0) = 0$, isso implica que $C = -\frac{g}{b}$, de modo que

$$v(t) = \frac{g}{b}\left(1 - e^{-bt}\right). \quad (44)$$

Agora integramos novamente para obter a posição em função do tempo.

$$y(t) = \int v(t)dt = \frac{g}{b}\left(t + \frac{e^{-bt}}{b}\right) + C. \quad (45)$$

Novamente, considerando $y(t=0) = 0$, obtém-se $C = -\frac{g}{b^2}$. A expressão final para a posição é

$$y(t) = \frac{g}{b^2}\left(bt + e^{-bt} - 1\right). \quad (46)$$