MAT0164 - Números Inteiros: uma introdução à matemática

Lista 1

Sentenças, tabelas verdade e quantificadores

1º Semestre de 2023

(1) Em cada item, identifique se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F):

- (a) $2 \leq 3$ e 7 é primo.
- (b) $6 + 2 = 8$ ou 6 é primo.
- (c) 5 não é primo ou 8 é primo.
- (d) Se 3 é primo então $32 = 9$.
- (e) Se 3 não é primo então $32 \neq 9$.
- (f) Se $32 = 9$ então 3 não é primo.
- (g) É falso que $2 + 3 \neq 5$.
- (h) (Se $2 < 3$ implica que $4 > 5$) então 8 é primo.
- (i) Se $2 + 2 = 5$ então 5 é primo.
- (j) 5 é ímpar e 3 é par.
- (k) 5 é ímpar ou 3 é par.
- (l) Se $2 + 5 = 7$ e $2 \cdot 5 = 10$ então $22 + 52 = 102$.
- (m) Ou 5 é ímpar ou 5 é múltiplo de 3.

(2) Escreva a negação de cada uma das seguintes afirmações:

- (a) 7 é um número primo e $2 + 2 = 4$.
- (b) Roberto e João têm mais de dois metro de altura.
- (c) Todas as estradas de Petrópolis são bem cuidadas.
- (d) Alguns lápis são azuis.
- (e) Todos os lápis são azuis.
- (f) A função f é contínua em todos os pontos.
- (g) Mário não gosta de Cálculo e João gosta de Teoria dos Conjuntos.
- (h) Carlos gosta de Álgebra e Caio não gosta de Teoria dos Números.
- (i) Se está chovendo, Maria não lava a louça.
- (j) Todas as borboletas são azuis e alguns gatos são vermelhos.
- (k) Se a cadeira é vermelha então a mesa é verde.
- (l) Se minha mãe é um trator, então eu não sou uma moto-serra.

(m) Se chocolate é saudável e todas as laranjas são doces então ou geleia de pepino é saudável ou pipoca não é salgada.

(n) João é feliz apenas quando joga bola.

(o) O principal jogador de futebol contratado para a temporada não apenas não foi capaz de marcar gols nos primeiros jogos como também não conseguiu acertar nenhum pênalti cobrado.

(3) Em cada item, prove que as sentenças são sempre verdadeiras:

(a) $(p \to (q \wedge r)) \to (p \to r)$

(b) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(c) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(d) $q \vee ((r \wedge \neg p) \vee \neg(\neg p \wedge (q \vee r)))$

(4) Sendo a proposição $p \to (r \vee s)$ falsa e a proposição $(q \wedge \neg s) \leftrightarrow p$ verdadeira, classifique em verdadeira ou falsa as afirmações p, q, r e s.

(5) Escreva a tabela verdade da fórmula:

(a) $\neg(p \wedge q) \vee \neg r$

(b) $p \to (q \wedge \neg r)$

(c) $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge \neg q))$

(d) $(p \vee q) \wedge (p \to (q \vee p))$

(6) Mostre que as duas seguintes sentenças são equivalentes, onde p, q e r são sentenças:

(a) $p \to (q \vee r)$;

(b) $\neg q \to (\neg p \vee r)$.

(7) Simplifique a fórmula $\neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge q$ (i.e., escreva uma fórmula equivalente a essa e que possua menos ocorrências das sentenças p, q e r no total).

(8) Em cada item, encontre uma fórmula f envolvendo as sentenças dadas e apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ (i.e., sem $\to$ ou $\leftrightarrow$) e que satisfaz a tabela verdade apresentada.

(a)

p	q	r	f
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

(b)

p	q	f
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(c)

p	q	f
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

(9) * Enquanto estudava lógica, Gabriel acidentalmente derramou um pouco de café em seu caderno, deixando uma parte da contradição que estava estudando borrada, como mostrado na figura.

$(((q \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg(r \wedge q \wedge (r \rightarrow \neg p)) \wedge$  $\vee r)) \wedge (r \rightarrow \neg(p \wedge (\neg q \vee r)))$

Sabendo que a parte incompreensível era constituída apenas dos conectivos lógicos $\wedge, \vee$ e $\neg$ e das proposições p e q, estando em sua forma mais simplificada possível, apresente a proposição que Gabriel estava estudando.

(10) Reescreva cada afirmação a seguir em linguagem natural, sem usar notação simbólica, e determine seu valor verdade:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x < x^2$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = x$

(c) $\exists! x \in \mathbb{R}\colon x^3 = x$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 = x^3$

(e) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R}\colon x < y$

(f) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, a < b \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : a < c < b$

(11) Considere a seguinte afirmação:

Para todo gato no sofá existe uma pulga no carpete que o mordeu se ele for um gato preto.

(a) Escreva em linguagem simbólica a proposição corresponde a esta afirmação.

(b) Apresente a negação da proposição deduzida no item anterior em linguagem simbólica e em linguagem natural.

(c) A afirmação será verdadeira se:

- (α) não há um gato preto no sofá?
- (β) uma pulga morder todos os gatos?
- (γ) houver um gato preto que não foi mordido?

(12) Apresente um exemplo para cada uma das seguintes proposições e determine sua veracidade.

(a) $\exists x \in A : [P(x) \wedge Q(x)]$

(b) $[\exists x \in A : P(x)] \wedge [\exists x \in A : Q(x)]$

As duas proposições são equivalentes? Justifique sua resposta.