Ponto de Acumulação, Ponto Isolado, Funções

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023**

Proposição

Se A é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova: Tome $L > 0$ tal que $A \subset [-L, L]$. Particione $[-L, L]$ em dois subintervalos de comprimento L e escolha aquele que contém infinitos pontos de A. Continue o processo para construir uma sequência de intervalos encaixados (I_n) tal que o comprimento de I_n é igual a $2L/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O ponto b dado por $\{b\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ é ponto de acumulação de A.

Pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$, podemos provar a proposição seguinte.

Proposição

Qualquer intervalo aberto não-vazio contém um número racional.

Prova: Seja (a, b) tal intervalo. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(b-a) > 1$, isto é, $1/n < b - a$. Tome $j = \max\{m \in \mathbb{Z}; m \leq na\}$. Logo $j \leq na < j + 1$. Portanto

$$\frac{j}{n} \leq a < \frac{j+1}{n} = \frac{j}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Assim, $\frac{j+1}{n} \in (a, b)$.

Daí, seguem os resultados seguintes.

Corolário

Qualquer intervalo aberto não-vazio contém um número infinito de números racionais.

Proposição

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$.

Corolário (Exercício)

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$.

Prova: Dado um número real x, tome uma sequência (x_n) de pontos de $\mathbb{Q}$, da proposição anterior, tal que $x_n \to x$. Note então que $(x_n + \frac{\sqrt{2}}{n})$ é uma sequência de números irracionais tal que $x_n + \frac{\sqrt{2}}{n} \to x$.

Funções - Noções Gerais

O principal objetivo do cálculo é o estudo das funções. As funções surgem para expressar uma quantidade em termos de outra.

Por exemplo, a área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$, neste caso diremos que A é uma função de r.

Outros exemplos são, a população P de uma determinada espécie que depende do tempo t, o custo C de envio de um pacote pelo correio que depende de seu peso w.

Definição (Função)

Dados dois conjuntos $A, B \neq \emptyset$, *uma* **função** f *de* A *em* B *(escreveremos* $f : A \to B$ *) é uma lei ou regra que a cada* $x \in A$, *associa um único elemento* $f(x) \in B$. *Adotaremos a seguinte terminologia*

A *é chamado* **domínio** *de* f *;*

B *é chamado* **contra-domínio** *de* f *;*

o conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B\,;\, y = f(x),\ x \in A\}\,.$$

é chamado **imagem** *de* f *.*

Notações alternativas. Seja $f : A \to B$ uma função. Podemos denotar

$D_f = D(f) = A$ para o domínio de f;

$f(D_f) := \mathrm{Im}(f)$ para a imagem de f.

Também podemos descrever a ação de f ponto a ponto como

$$A \ni x \;\mapsto\; f(x) \in B\,.$$

Convenção: Se o domínio da função não é dado explicitamente, então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais a regra $f(x)$ esteja definida.

Definição (Gráfico)

Sejam $f : A \to B$ uma função e $A, B \subset \mathbb{R}$. O conjunto

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado **gráfico** *de f.*

Decorre da definição que $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelos pontos da forma $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f.

Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Exemplo

Considere as funções f dadas por:

(a) **função constante**: $f(x) = k$;

(b) **função identidade**: $f(x) = x$;

(c) **função linear**: $f(x) = ax$;

(d) **função afim**: $f(x) = ax + b$;

(e) **função polinomial**:

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; *em particular,*

se $n = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ *é uma* **função quadrática**,

se $n = 3$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *é uma* **função cúbica**;

(f) **função racional**: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são funções polinomiais. Note que* $D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\; q(x) \neq 0\}$;

Exemplo

(g) **função potência**: $f(x) = x^a$, *onde* a *é uma constante; em particular,*
se $a = \dfrac{1}{n}, f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, *onde* n *é um inteiro positivo, é uma* **função raiz**; *temos que* $D_f = [0, +\infty)$ *se* n *é par e* $D_f = \mathbb{R}$ *se* n *é ímpar;*

(h) **função algébrica**: *função construída como solução de uma equação polinomial da forma*

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots p_{n-2}(x)y^2 + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0,$$

$(p_0, p_1, \cdots, p_n$ *polinômios*$)$ *como, por exemplo,*

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ D_f = \mathbb{R},$$

$$g(x) = \frac{(x-4)}{x^4 + \sqrt{2x}} \sqrt[3]{x+1},\ D_g = (0, +\infty).$$

Definição (Restrição)

Sejam $f : A \to B$ *e* $D \subset A$. *Denotamos por* $f\big|_D$ *a* **restrição** *de* f *ao subconjunto* D *de* A. *Então*

$$f\big|_D(x) = f(x), \quad \textit{para todo } x \in D.$$

Observação: Seja $D \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por

$$I_D : D \to D$$

a **função identidade** definida por

$$I_D(x) = x, \quad \text{para todo} \quad x \in D.$$

Exemplo (Função definida por partes)

São funções definida por regras diferentes em distintas partes de seu domínio; por exemplo,

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ x \leq 1, \\ x^2 & se\ x > 1; \end{cases}$$

$$(b)\ g(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0, \\ -x & se\ x < 0. \end{cases}$$

Exemplo (Modelagem)

Um fabricante de refrigerante quer produzir latas cilíndricas para seu produto. A lata dever ter um volume de 360 ml. Expresse a área superficial total da lata em função do seu raio e dê o domínio da função.

Solução: Seja r o raio da lata e h a altura. A área superficial total (topo, fundo e área lateral) é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Sabemos que o volume $V = \pi r^2 h$ deve ser de 360 ml, temos

$$\pi r^2 h = 360,$$

ou seja $h = 360/\pi r^2$. Portanto,

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r 360/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 720/r.$$

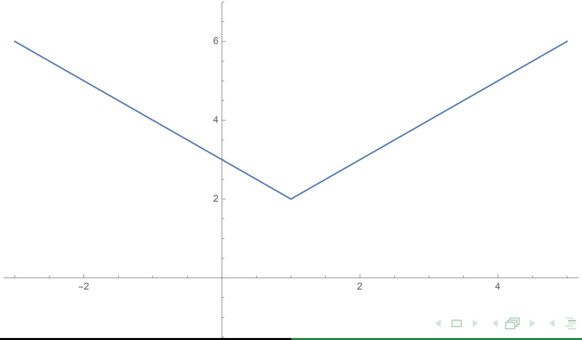
Como r só pode assumir valores positivos, $D_S = (0, +\infty)$.

Exemplo (Translação)

Esboce o gráfico de $f(x) = |x-1|+2$.

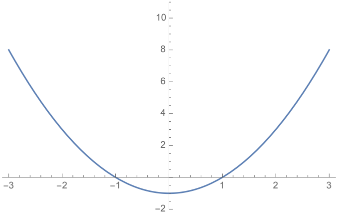
Eliminando o módulo, temos $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1, \\ 3-x & \text{se } x < 1. \end{cases}$

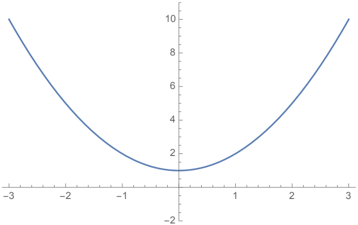
Desenhar o gráfico.



Exemplo

Esboce os gráficos de $f(x) = x^2 - 1$ *e* $g(x) = x^2 + 1$.





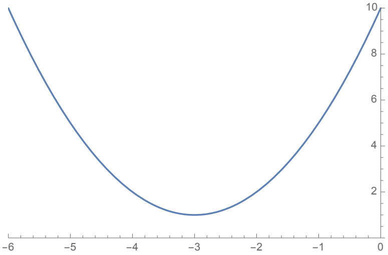
Gráficos e a translação:

- $f(x)+k$ translada o gráfico de f, k unidades *para cima* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para baixo* se $k < 0$,
- $f(x+k)$ translada o gráfico de f, k unidades *para a esquerda* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para a direita* se $k < 0$.

Exemplo

Esboce o gráficos de $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

Completando o quadrado, escrevemos $f(x) = (x+3)^2 + 1$. Logo, o gráfico é a parábola $y = x^2$ deslocada 3 unidades para esquerda e então uma unidade para cima.



Exemplo

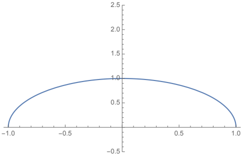
Esboce os gráficos de $f(x) = (x-1)^2$ *e* $g(x) = (x+1)^2$.

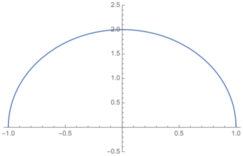
Dilatação e o Esboço de Gráficos

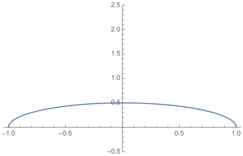
Exemplo (Dilatação em y)

Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = 2f(x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}f(x)$$



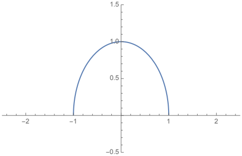


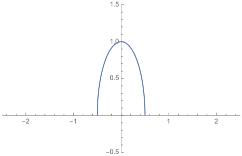


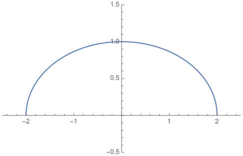
Exemplo (Dilatação em x)

Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = f(2x) \qquad h(x) = f(x/2)$$







Note que $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $h(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$

Resumo das propriedades

Os exemplos anteriores ilustram o seguinte:

Seja $k > 1$

- $kf(x)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* y
- $\frac{1}{k}f(x)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* y
- $f(kx)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* x
- $f(x/k)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* x

Note que:

- O ponto $(a, -b)$ é a reflexão do ponto (a, b) em relação ao eixo x.
- O ponto (a, b) é a reflexão do ponto $(-a, b)$ em relação ao eixo y.
- Se refletimos o ponto (a, b) em relação ao eixo x, e depois em relação ao eixo y, produzimos o ponto $(-a, -b)$, que é a reflexão do ponto (a, b) em relação à origem $(0, 0)$.

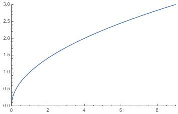
Propriedades da reflexão

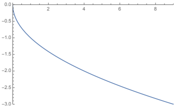
- $g(x) = -f(x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo* x
- $g(x) = f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo* y
- $g(x) = -f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *à origem* $(0, 0)$

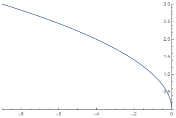
Exemplo (Reflexão)

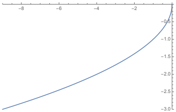
Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = -\sqrt{x} \qquad h(x) = \sqrt{-x} \qquad j(x) = -\sqrt{-x}$$









Funções com simetria

No que segue, consideraremos $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição (Funções Pares e Ímpares)

Diremos que

$$f \text{ é } \textbf{par} \iff f(-x) = f(x),\ \forall\, x \in D_f;$$

$$f \text{ é } \textbf{ímpar} \iff f(-x) = -f(x),\ \forall\, x \in D_f.$$

Observação: Geometricamente,

- o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e
- o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo

$f(x) = x^2$ é par;

a função identidade $I(x) = x$ é ímpar;

$f(x) = 2x - x^2 = x(2 - x)$ não é par nem ímpar.

Exercício: Determine se f é par, ímpar ou nenhuma das duas:

(a) $f(x) = x^5 + x$,

(b) $f(x) = 1 - x^4$,

(c) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$.

Definição (Soma, Produto e Quociente)

Dadas duas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, podemos definir as operações:

soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g;$

produto: $(fg)(x) = f(x)g(x),\ x \in D_{fg} = D_f \cap D_g;$

quociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\quad x \in D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$

Exemplo

Se $f(x) = \sqrt{7-x}$ *e* $g(x) = \sqrt{x-2}$, *então*

$$D_f = (-\infty, 7],$$

$$D_g = [2, +\infty),$$

$$D_f \cap D_g = [2, 7].$$

Logo,

(a) $(f+g)(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2}, \quad 2 \leq x \leq 7,$

(b) $(fg)(x) = \sqrt{7-x}\sqrt{x-2} = \sqrt{(7-x)(x-2)}, \quad 2 \leq x \leq 7,$

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\dfrac{7-x}{x-2}}, \quad 2 < x \leq 7.$

Definição (Composição)

Dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$, *definimos a* **função composta**

$$h : D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$$

por

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall\, x \in D_{g \circ f},$$

onde $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. *Neste caso, escrevemos* $h = g \circ f$.

Exemplo

Se $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = x^2 + 3x$, *então*

(a) $g \circ f(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 3(2x+1) = 4x^2 + 10x + 4$,

(b) $f \circ g(x) = f(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1 = 2x^2 + 6x + 1$.

Observação: Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo

Encontre $f \circ g \circ h$ *se* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ *e* $h(x) = x + 3$.

Solução:

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+3)) = f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}.$$

Exercício: Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre e determine o domínio das funções:

$$(a)\ f \circ g(x) = \sqrt[4]{2-x},\ \ D_{f\circ g} = (-\infty, 2]$$

$$(b)\ g \circ f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}},\ \ D_{g\circ f} = [0, 4]$$

$$(c)\ f \circ f(x) = \sqrt[4]{x},\ \ D_{f\circ f} = [0, +\infty)$$

$$(d)\ g \circ g(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}},\ \ D_{g\circ g} = [-2, 2].$$