

### 6.4.2- Cálculo da Tensão de Confronto



#### A) Cálculo da tensão de confronto sob solicitação estática

##### a1) Flexão Pura

$$\sigma^* = \sigma_{\max} = \frac{M_{fr}}{W_f} \leq \sigma_{adm}$$

Dimensionamento estático

- Caso estático
- Caso fadiga



Pré-dimensionar  
como estático



Verificar quanto  
a fadiga

No caso de secção circular:

$$W_f = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow \sigma^* = \frac{32 M_{fr}}{\pi d^3} \leq \sigma_{adm} \quad \text{com} \quad M_{fr} = \sqrt{M_{fH}^2 + M_{fV}^2}$$

Pré-dimensionamento :

$$\bar{d}^3 = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{M_{fr}}{\sigma_{adm}} \Rightarrow$$

$$\bar{d} = 2.17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{fr}}{\sigma_{adm}}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

## a2) Torção Pura

$$\tau^* = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{adm}$$

Para secção circular:  $W_t = \frac{\pi d^3}{16}$

Pré-dimensionamento :  $\frac{16M_t}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \bar{d}^3 = \frac{16M_t}{\pi \tau_{adm}}$

$$\bar{d} = 1.72 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

Á partir da potência de entrada (N, em HP; n, em rpm)

$$N = F \cdot v \Rightarrow N[\text{HP}] = \frac{F[\text{Kgf}] \cdot v[\text{m/s}]}{75}$$

$$N[\text{CV}] = \frac{F[\text{Kgf}] \cdot v[\text{m/s}]}{76}$$

$$\omega[\text{rad/s}] = \frac{2\pi \cdot n[\text{rpm}]}{60}$$

$$v[\text{m/s}] = \omega[\text{rad/s}] \cdot r[\text{m}]$$

$$\Rightarrow N = \frac{F}{75} \cdot \frac{2\pi \cdot n}{60} \cdot \frac{r}{1000} = \frac{1}{716200} \cdot \underbrace{F \cdot r}_{M_t} \cdot n$$

$$N = \frac{1}{716200} \cdot M_t \cdot n$$

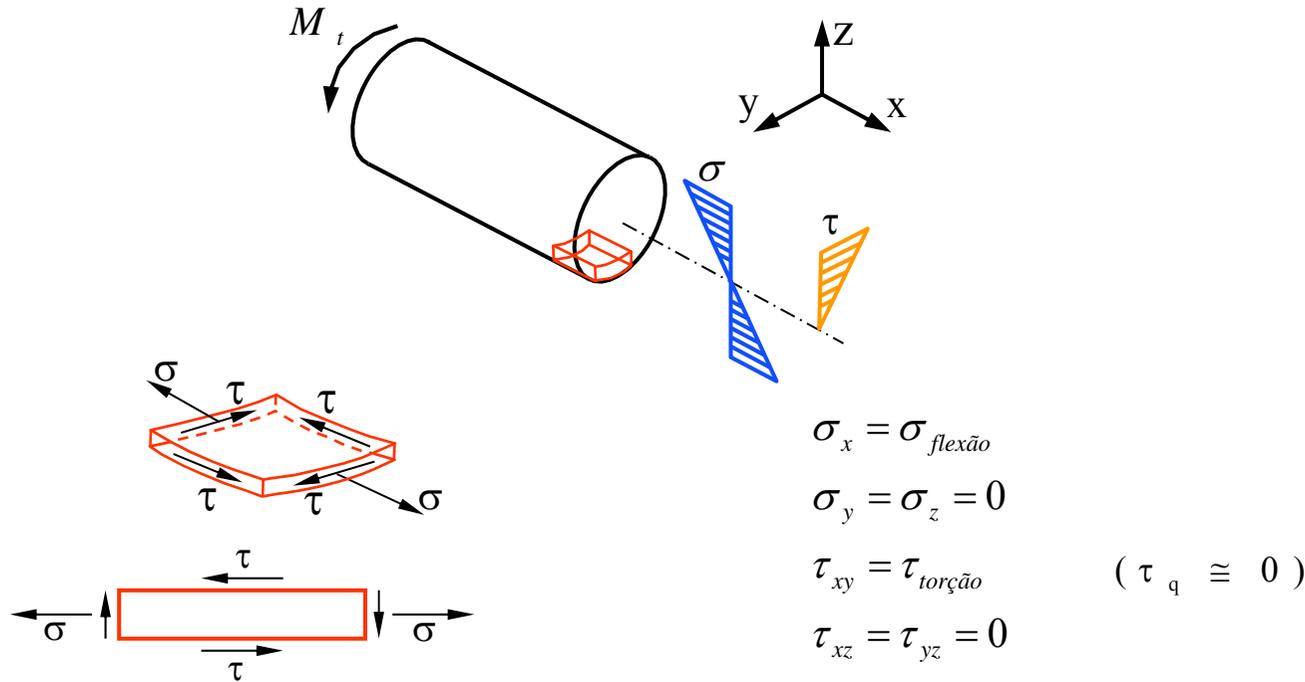
N : [HP]  
M<sub>t</sub> : [Kgf/mm]  
n : [rpm]

$$M_t = 716200 \frac{N}{n} \Rightarrow \bar{d} = 1.72 \cdot \sqrt[3]{\frac{716200 \cdot N}{n \cdot \tau_{adm}}}$$

$$\bar{d} = 15389 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n \cdot \tau_{adm}}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

a3) Flexão e torção combinadas



$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Tensões principais } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

Critério Energia Distorção (Von MISES)

Para flexão e torção em eixos temos situação biaxial de sollicitação (2D)

$$\begin{array}{l} \text{Tensões principais} \\ \text{para 2D} \end{array} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (\text{eq.1})$$

$$\text{Se } \sigma_y = 0 \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad (\text{eq.2})$$

$\sigma_i$  para 2D ( $\sigma_3 = 0$ ) é :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2)} \\ &\Rightarrow \sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \quad (\text{eq.3}) \end{aligned}$$

Da equação 2:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2\right) + 2 \times \frac{\sigma}{2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2\right) - 2 \times \frac{\sigma}{2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

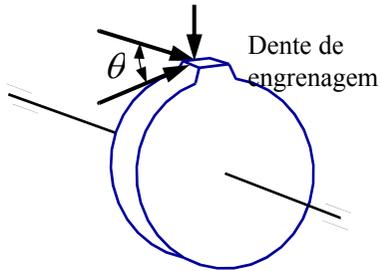
$$- \sigma_1 \times \sigma_2 = - \left[ \frac{\sigma^2}{4} - \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2\right) \right] = - \frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4} + \tau^2$$

---


$$\sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 4 \frac{\sigma^2}{4} + 3\tau^2$$

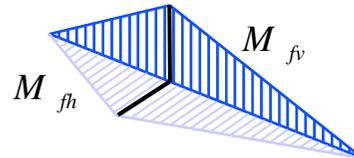
$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

No caso de eixos



$$\sigma = \frac{M_{fr}}{W_f}$$

$$M_{fr} = \sqrt{M_{fh}^2 + M_{fv}^2}$$



$$\tau = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{M_{fr}^2}{W_f^2} + 3 \frac{M_t^2}{W_t^2}}$$

Tendo-se secção circular :

$$W_f = \frac{1}{2} W_t$$

$$\sigma^* = \frac{1}{W_f} \sqrt{M_{fr}^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

$$\Rightarrow M_{eq} = \sqrt{M_{fr}^2 + \frac{3}{4} M_t^2} \Rightarrow \sigma^* = \frac{M_{eq}}{W_f}$$

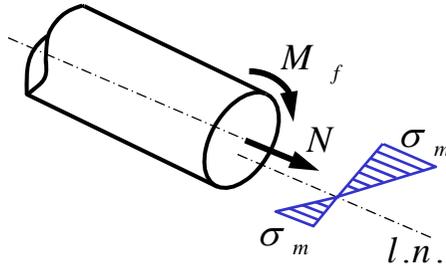
$$\sigma^* \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{M_{eq}}{\pi d^3} \times 32 \leq \sigma_{adm}$$

$$\bar{d} = 2,173 \sqrt{\frac{M_{eq}}{\sigma_{adm}}}$$

$$d = 1,1 \sim 1,3 \bar{d}$$

**B) Cálculo da tensão de confronto sob solitação dinâmica (fadiga)**

**b1) Flexão Pura**



$$\sigma^* = \sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{fr}}{W_f} \leq \sigma_{fadm}$$

Havendo força normal :

$$\sigma = \pm \frac{N}{S} \pm \frac{M_{fr}}{W_f}$$

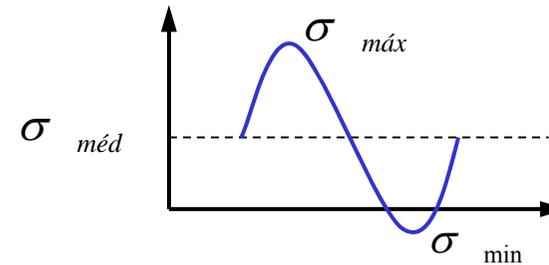
Por exemplo :

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N}{S} + \frac{M_{fr}}{W_f} \quad e \quad \sigma_{\text{min}} = \frac{N}{S} - \frac{M_{fr}}{W_f}$$

Neste caso  $1 < k < \infty$  e calcular sempre usando

$$S_m = \text{máx}(|\sigma_{\text{máx}}|, |\sigma_{\text{min}}|)$$

$$\sigma^* = S_m \leq \sigma_{fadm}$$



## b2) Torção Pura

$$\tau^* = \tau = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{fadm}$$

Se não houver flutuações de  $M_t \rightarrow k = 1$

Se houver  $S_m = \max(|\tau_{m\acute{a}x}|, |\tau_{m\acute{i}n}|)$

$$\tau^* = S_m \leq S_{fadm} \quad (k \neq 1)$$

### b3) Flexão e Torção Combinadas

#### b3.1) Flexão e torção tem o mesmo “k”

$$\sigma^* = \sqrt{(\sigma_{m\acute{a}x} \beta_{kf})^2 + H^2 (\tau_{m\acute{a}x} \beta_{kt})^2}$$

com 
$$H = \frac{\sigma_F}{\tau_F}$$

$\sigma_F$  - limite resist\ecencia \u00e0 fadiga por flex\u00e3o para valor k

$\tau_F$  - limite resist\ecencia \u00e0 fadiga por tor\u00e7\u00e3o para valor k

$\beta_{kf}$  - coeficiente de entalhe din\u00e2mico para fadiga \u00e0 flex\u00e3o e valor k

$\beta_{kt}$  - coeficiente de entalhe din\u00e2mico para fadiga \u00e0 tor\u00e7\u00e3o e valor k

#### b3.2) Flex\u00e3o e tor\u00e7\u00e3o tem k diferentes

$$\sigma^* = \sqrt{(\sigma_{m\acute{a}x} \beta_{kf})^2 + H_{Fadm}^2 (\tau_{m\acute{a}x} \beta_{kt})^2}$$

com 
$$H_{Fadm} = \frac{\sigma_{Fadm}}{\tau_{Fadm}};$$

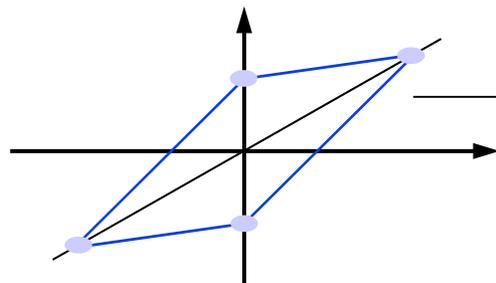
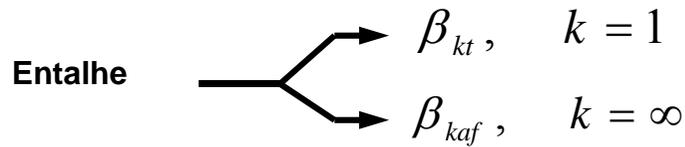
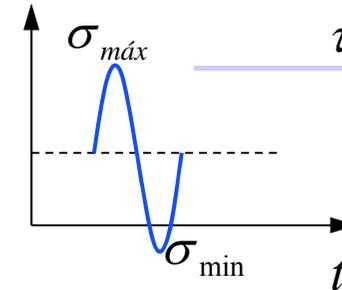
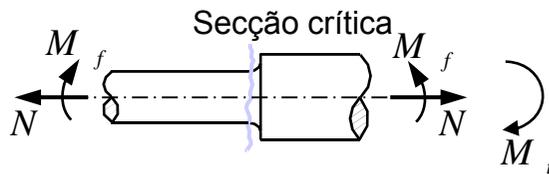
$$\sigma_{Fadm} = S_{Ffk} \frac{b_1 b_2 b_3}{\beta_{kf} \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5}, \quad \tau_{Fadm} = S_{Ftk} \frac{b_1 b_2 b_3}{\beta_{kt} \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5}$$

Obs.: Se n\u00e3o dispuser de  $\beta_k$ 's exatos usar  $\beta_k$  para  $k=\infty$

b3.3) Caso particular onde  $k_f = \infty$  e  $k_t = 1$

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_{m\acute{a}x}^2 + H^2 \tau^2}$$

$$H = \frac{\sigma_{Faf} \beta_{kt}}{\tau_e \beta_{kaf}}$$



Goodman

$\sigma_{Faf}$

(estimativa)

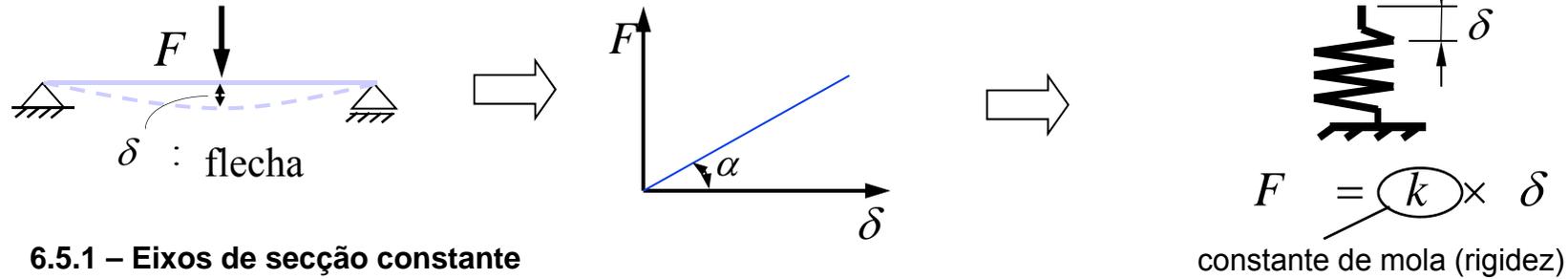
$$\tau_e \cong 0,577 \cdot \sigma_e$$

Normalmente não temos  $\beta_{kt}$  para  $k = 1$ . Usamos  $\beta_{kt}$  para  $k = \infty$  a favor da segurança.

Se existir força normal N recai-se no caso b3.2) porque

$$k_f \neq \infty$$

### 6.5 - Cálculo de Eixos quanto à Rigidez (ou flecha admissível)

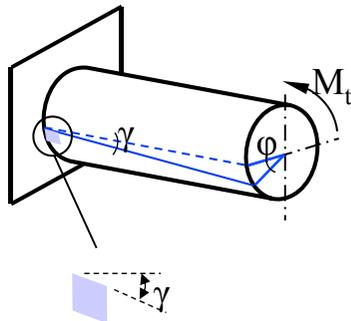


#### 6.5.1 – Eixos de seção constante

##### • Tração / compressão

$$\sigma = E \times \varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \Rightarrow P = \left( \frac{EA}{L} \right)_k \delta \Rightarrow k_{en} = \frac{EA}{L}$$

##### • Torção



$$\begin{aligned} \gamma \cdot L &= \varphi \frac{d}{2} \\ \varphi &= \frac{\gamma L}{\frac{d}{2}} \\ \gamma &= \varphi \frac{d}{2L} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \tau &= G \cdot \gamma \\ \tau &= \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t d}{J_t \cdot 2} \\ \Rightarrow \frac{M_t \cdot d}{J_t \cdot 2} &= G \cdot \varphi \cdot \frac{d}{2 \cdot L} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow M_t = \left( \frac{G \cdot J_t}{L} \right)_k \varphi \Rightarrow k_{et} = \frac{G \cdot J_t}{L}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad J_t = \frac{\pi d^4}{32}$$

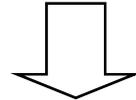
• Flexão

Da teoria de flexão :

Curvatura  $\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$   
 $\frac{dM}{dx} = Q$

$\frac{dQ}{dx} = q$  (carga distribuída)

Estudo das curvas planas



$\theta = \text{inclinação} = \frac{dy}{dx}$  (1)

$\frac{M}{EJ} = \frac{\text{momento fletor}}{EJ} = \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$  (2)

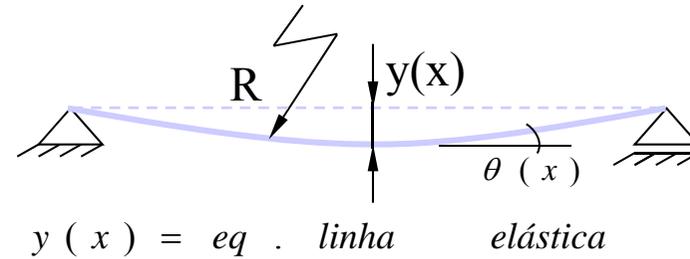
$\frac{Q}{EJ} = \frac{\text{força cortante}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$

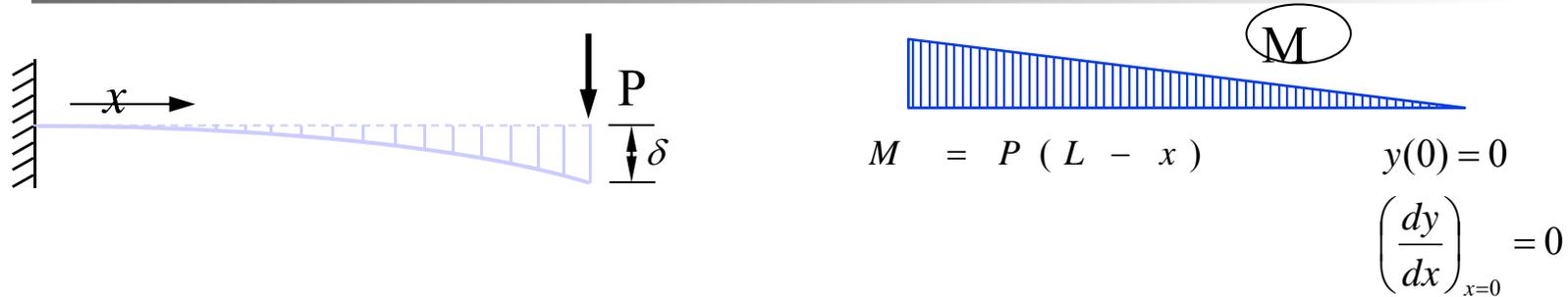
$\frac{q}{EJ} = \frac{\text{carga distribuída}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$

De (1) e (2) , partindo-se do diagrama de momento fletor :

$$\int_{0l}^l \frac{M}{EJ} dx = \frac{dy}{dx} = \theta \quad \text{e}$$

$$\int_0^l \left( \int_0^l \frac{M}{EJ} dx \right) dx = y(x) \quad \text{eq. linha elástica}$$





$$\int M dx = PL \int dx - P \int x dx = P \left[ Lx - \frac{x^2}{2} \right] + C_1$$

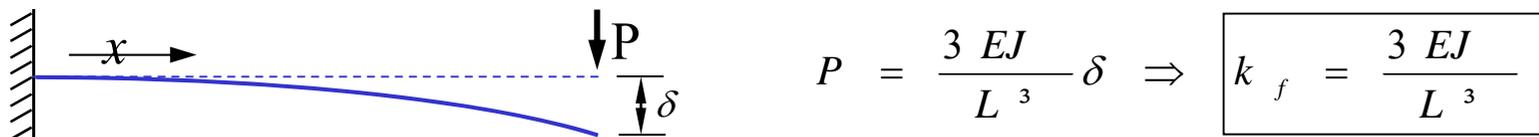
$$\frac{d}{dx}(EJ \cdot y(x)) = \int M dx = P \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \Rightarrow$$

$$EJ \cdot y(x) = \int \left[ P \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right] dx = PL \frac{x^2}{2} - \frac{P}{2} \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

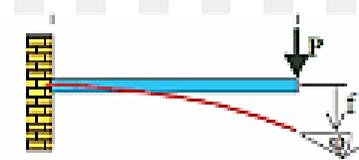
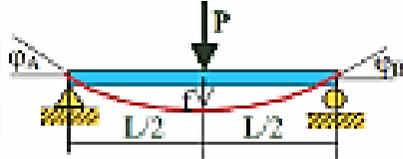
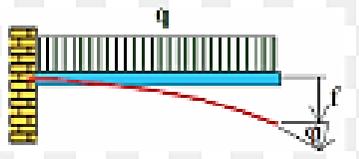
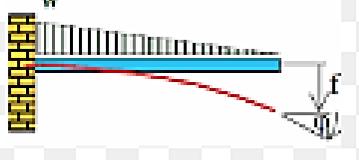
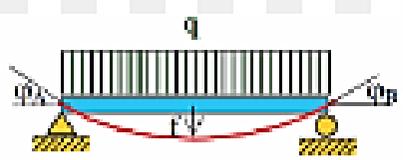
$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ e } \theta(0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left[ PL \frac{x^2}{2} - \frac{P}{6} x^3 \right], \text{ pondo } x = L \text{ vem}$$

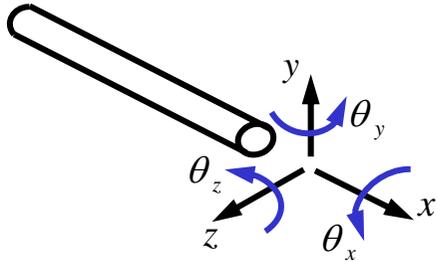
$$y(L) = \frac{P}{EJ} \left( \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right) \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{3EJ}$$



Para demais casos simples tabelas.

|  |   |  |   |
|--|---|--|---|
|   | $f = - PL^3 / 3 EI$ $M+ = 0$ $M- = -PL$       |   | $f = - PL^3 / 48 EI$ $M+ = PL/4$ $M- = 0$   |
|   | $f = - qL^4 / 8 EI$ $M+ = 0$ $M- = -qL^2$     |   | $f = - P b (L^2 - b^2)^{3/2} / 9\sqrt{3} EI$ <p>para <math>x_m = \sqrt{(L^2 - b^2)}/3</math></p> $M+ = (P(L-a) a) / L$ $M- = 0$ |
|  | $f = - w L^4 / 30 EI$ $M+ = 0$ $M- = -wL^2/6$ |  | $f = - 5 q L^4 / 384 EI$ $M+ = qL^2/8$ $M- = 0$   |

### 6.5.1. Cálculo de Flechas de Eixos de Secção Variável (escalonados)



6 solicitações, deformações = 6 graus de liberdade

1 gdl  $\longrightarrow$  1 k (coeficiente de mola)

Vários gdl  $\longrightarrow$  [ K ] Matriz de rigidez

$$F = kx \iff \{F\}_{n \times 1} = [K]_{n \times n} \cdot \{x\}_{n \times 1}$$

Cálculo dos  $K_{ij}$



**Método dos Elementos Finitos**

Método numérico para resolver equações diferenciais



Aplicações do MEF :

- Problemas de elasticidade em sólidos –  $\sigma, \epsilon, \delta$
- Vibrações em sólidos –  $\omega_i, \{X\}_i$
- Escoamento em fluidos –  $v, p$
- Transmissão de calor – T
- Campos elétricos
- etc

Softwares de MEF disponíveis :

- Micro / workstations e Host
- Ansys, COSMOS, ABAQUS, IDEAS

### Associação de Rigidezes (molas)



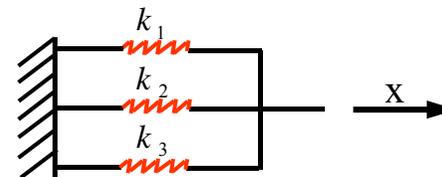
### Molas em paralelo

Deslocamento igual para todas.

$$F_t = k_1 x + k_2 x + k_3 x \Rightarrow \underbrace{k_{eq //}}_{F_t} \cdot x = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot x$$

$$F_t = \sum F_i$$

$$k_{eq //} = k_1 + k_2 + k_3$$



### Molas em série

Força igual para todas.

$$x_t = \sum x$$

$$x_t = \frac{F}{k_{eqS}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

$$k_{eqS} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}$$

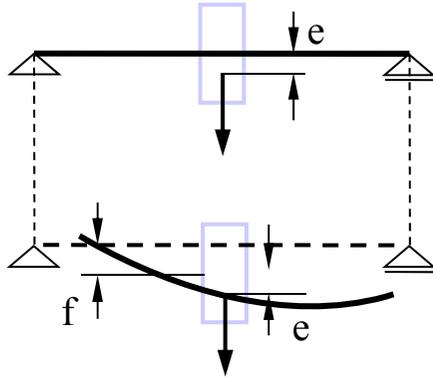


Valores de flecha e ângulo de flexão admissíveis para algumas construções mecânicas

| Aplicação   | Flecha admissível ( $f_{adm}$ ) | Ângulo de inclinação $\beta$ [rad] |
|---|---------------------------------|------------------------------------|
| Eixos de máquinas ferramentas com engrenagens                     | 0.1 m                           | -                                  |
| Motores assíncronos   | 0.1 $\delta$                    | -                                  |
| Construções mecânicas em geral                                    | 0.0002 L                        | -                                  |
| Eixos apoiados em mancais hidrodinâmicos ou de lubrificação mista | -                               | 0.001                              |
| Eixos apoiados em mancais de rolamento radial fixo de esferas     | -                               | 0.008                              |
| Eixos apoiados em mancais autocompensadores                       | -                               | 0.05                               |

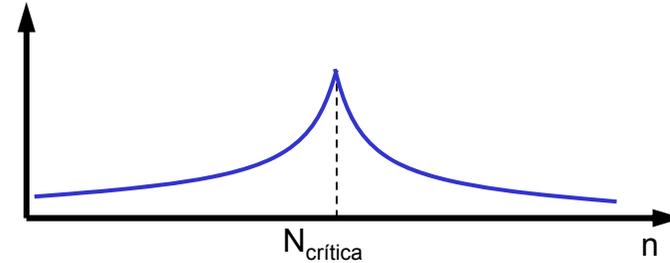
- m = módulo da engrenagem
- $\delta$  = entreferro do motor elétrico
- L = distância entre apoios do eixo

### 6.6 - Cálculo de Eixos quanto à Rotação Crítica



Modelagem :

Amplitude vibrações



- Despreza-se o peso do eixo
- Despreza-se a inércia do eixo
- Despreza-se o momento centrífugo

$$\sum F_{ext} = M \cdot a = M \cdot \omega^2 r = M \cdot \omega^2 (f + e)$$

No caso de viga bi-apoiada :

$$f = \frac{FL^3}{48 EJ} \Rightarrow F = \frac{\overbrace{48 EJ}^k}{L^3} \cdot f$$

como

$$\sum F_{ext} = F \Rightarrow k \cdot f = M \omega^2 (f + e) \Rightarrow$$

$$kf - Mf \omega^2 - Me \omega^2 = 0 \Rightarrow f = \frac{Me \omega^2}{k - M \omega^2} \quad \text{ou}$$

$$f = \frac{e}{\frac{k}{M \omega^2} - 1}$$

quando  $\frac{k}{M \omega^2} \rightarrow 1 \Rightarrow f \rightarrow \infty, \forall e!! \Rightarrow \omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad [\text{rad/s}]$

$$\omega_{crit} = \frac{2\pi}{60} n_{crit} \Rightarrow n_{crit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (\text{rpm})$$

Novamente desprezando-se o peso do eixo, a flecha estática é

$$f_{st} = \frac{GL^3}{48 EJ} \Rightarrow f_{st} = \frac{G}{k} = \frac{Mg}{k} \quad , M = \text{massa do disco}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{M} = \frac{g}{f_{st}} \Rightarrow \boxed{n_{crit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}}$$

### OBSERVAÇÕES

1.  $N_{crit} \exists$  mesmo se  $e = 0$ , entretanto desbalanceamento favorece fenômeno.

2. A dedução vale para  $M_{eixo} \ll M_{disco} !!$

3.  $n_{crit} \propto \sqrt{k} \Rightarrow$  influem

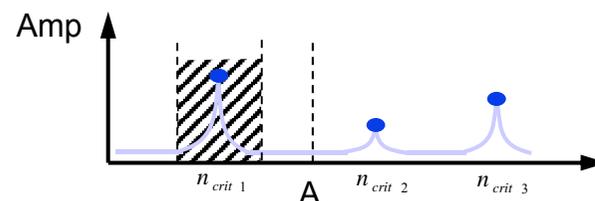
- Elasticidade E
- Forma da secção J
- Tipo de carregamento
- Vínculos

4.  $N_{trabalho}$  fora da faixa :  $0,7 \sim 1,3 n_{crit}$ .

5.  $\exists n_{crit} \dots 1, 2, 3$

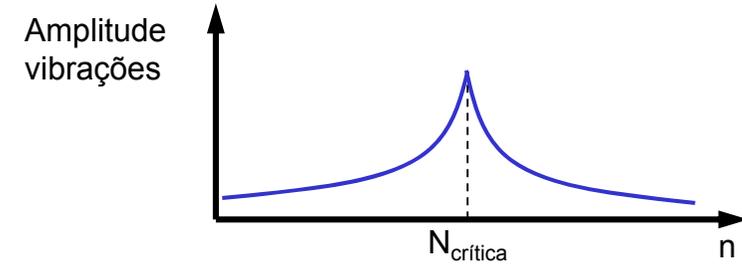
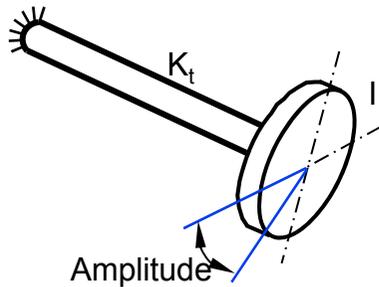
6. Pode-se trabalhar em "A"

Passa-se pela crítica com potência suficiente e amortecimento alto.



## ROTAÇÃO CRÍTICA TORCIONAL

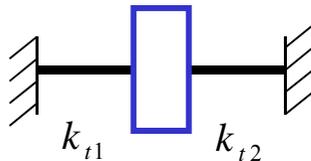
Da mesma forma que flexional, existe  $n_{crit}$  torcional, especialmente para eixos  $d \ll L$



$$n_{crit \text{ torc}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k_t}{I}}$$

- $K_t$  : Rigidez torcional
- $I$  : Inércia do disco
- $G$  : Módulo de elasticidade transversal

Neste caso (eixo em balanço) :



$$\left\{ \begin{array}{l} k_t = \frac{GJ_t}{L} \\ I = m \frac{d^2}{8} \end{array} \right.$$

$$k_{eq \parallel} = k_{t1} + k_{t2}$$

### Exemplo de cálculo ( Exercício 06 – Lista 06)

Dimensionar o eixo abaixo pertencente a um redutor utilizado em um sistema de elevação de cargas .

A engrenagem 1 recebe 30 [HP] a 80 [rpm] . A engrenagem 2 é montada com interferência sobre o eixo.

|                          |     |     |
|--------------------------|-----|-----|
| Dados: Engrenagem :      | 1   | 2   |
| Número de dentes (retos) | 57  | 34  |
| Módulo [mm]              | 8   | 8   |
| Ângulo de pressão        |     |     |
| Largura [mm]             | 100 | 100 |

- Eixo feito de ABNT 8620, acabamento médio em torno;

- Adotar demais dados que julgar necessários.

