AGA 0505 - Análise de Dados em Astronomia

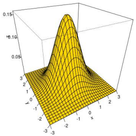
3. Distribuições de Probabilidades

Laerte Sodré Jr.

1o. semestre, 2023

aula de hoje

1. distribuições de probabilidades:
   a distribuição normal ou gaussiana
2. o teorema do limite central
3. distribuições discretas
   - a distribuição uniforme discreta
   - a distribuição binomial
   - a distribuição de Poisson



4. distribuições contínuas
   - a distribuição exponencial
   - a distribuição uniforme
   - a distribuição beta
   - a distribuição de Cauchy
   - distribuições em lei de potência
5. distribuições bivariadas
   - a distribuição gaussiana bivariada

É provável que coisas improváveis aconteçam

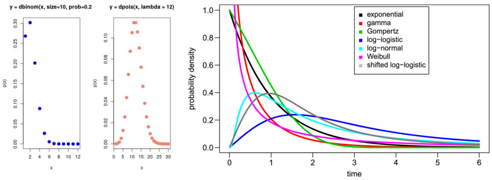
Aristóteles

distribuições de probabilidades

- clássicas
  - uniforme
  - binomial
  - normal
  - Poisson
  - exponencial
- fauna estatística
  - β, Cauchy, χ^2, F, Γ, t, Weibull,...
- astrofísica
  - lei de potência
  - Schechter
  - log-normal
  - ...

dois tipos de distribuições:

- discretas
- contínuas



a distribuição normal ou gaussiana

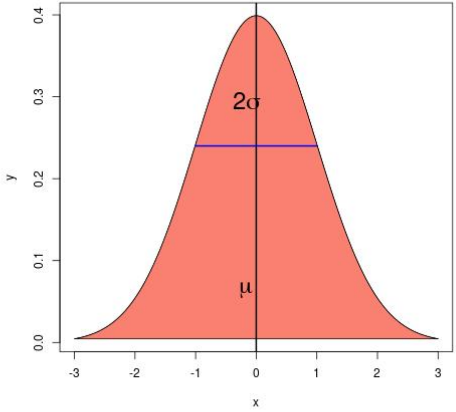
- distribuição gaussiana:

$$P(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

2 parâmetros:

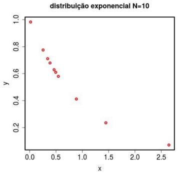
- média μ
- desvio padrão σ (ou variância σ^2)

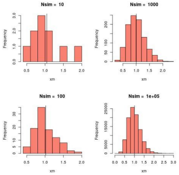
$p = 1/\sigma^2$ é denominado *precisão*



o teorema do limite central

- Teorema do Limite Central:
  em condições bem gerais, fazer médias produz uma distribuição gaussiana, independentemente da distribuição a partir da qual os dados são gerados
  - seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto de variáveis aleatórias amostradas de uma mesma distribuição de probabilidades $P(x)$, que tem média μ e variância σ^2





- para n tendendo a infinito, a média dos $\{x_i\}$ tende a

$$\frac{\sum_i x_i}{n} \longrightarrow \mu$$

e sua variância a

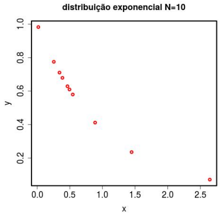
$$Var(\{x_i\}) \longrightarrow \frac{\sigma^2}{n},$$

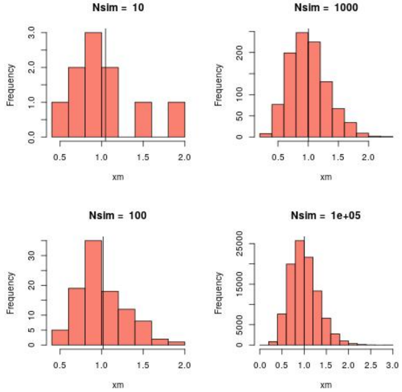
independentemente da forma de $P(x)$

N.B.: $\sigma/\sqrt{n}$: o “erro da média”

o teorema do limite central

- Teorema do Limite Central:
  - exemplo: *valores médios* em $Nsim$ simulações de 10 pontos cada uma, com uma distribuição exponencial
  - conforme $Nsim$ aumenta, a distribuição dos *valores médios* fica cada vez mais parecida com uma gaussiana





- uma consequência: os erros de médias de dados vão tender a ser 'gaussianos'

distribuições discretas

- espaço amostral constituido por variáveis aleatórias discretas:

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

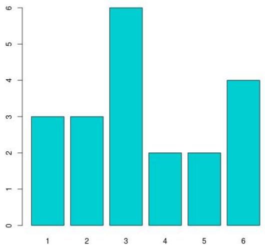
- exemplo: a distribuição uniforme discreta

$$P(x) = 1/k,$$

onde k é a dimensão do espaço amostral
moeda: k=2
dado de 6 faces: k=6

- média da população: $\mu = \sum_{l=1}^{k} l P(l) = \frac{k+1}{2}$
- variância da da população: $\sigma^2 = \sum_{l=1}^{k} (l-\mu)^2 P(l) = \frac{k^2-1}{12}$

- para um dado de 6 faces: k=6
  $\mu = 3.5$ e $\sigma = (35/12)^{1/2} \simeq 1.71$
- exemplo: amostra com simulação de 20 jogadas de um dado:
  3 6 3 2 2 6 3 5 4 6 6 1 2 3 5 3 3 1 4 1
- média da amostra: $\bar{x} = \sum_{x=1}^{20} x_i P(x_i) = 3.45$
- variância da amostra: $\hat{\sigma}^2 = \sum_{x=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 P(x_i) \simeq 1.73$



distribuição binomial

aplica-se quando há apenas dois resultados possíveis:
sucesso/falha, detecção/não-detecção, cara/coroa

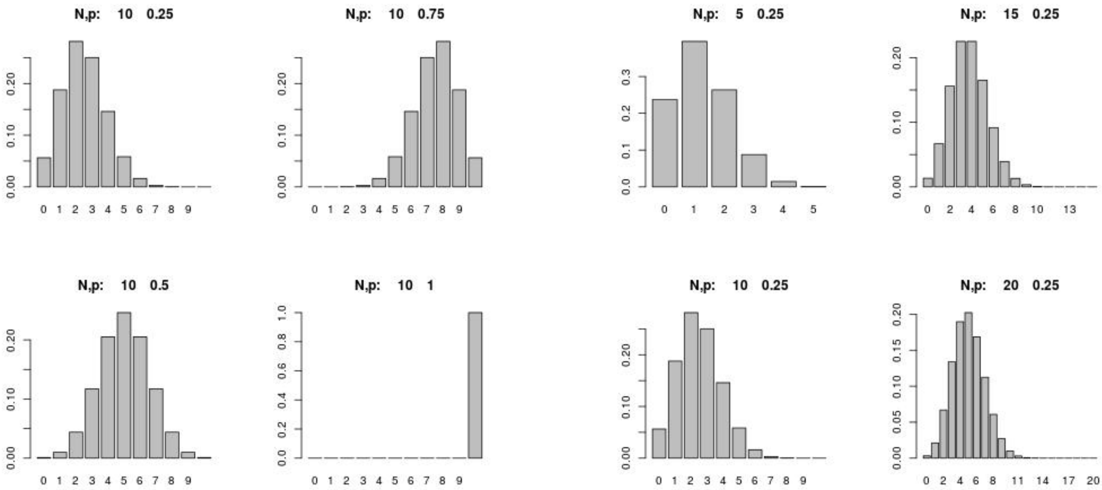
- p: probabilidade de sucesso em cada tentativa (é a mesma para todas as tentativas)
- as sucessivas tentativas são independentes entre si
- probabilidade de n sucessos em N tentativas:

$$P(n|p,N) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N(N-1)...(N-n+1)}{n(n-1)...1} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

- média e variância:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} nP(n) = Np \qquad \sigma^2 = \sum_{n=0}^{N} (n-\bar{n})^2 P(n) = Np(1-p)$$

distribuição binomial



a distribuição binomial

- exemplo: em uma certa região do céu espera-se o mesmo número de estrelas e galáxias até uma certa magnitude
    - considerando-se 10 objetos, qual é a probabilidade de se ter 8 ou mais galáxias?
    - no caso: $N = 10$ e $p = 1/2$
    - probabilidade de $n \geq 8$ sucessos em N tentativas:

$$P(n \geq 8|p, N) = \sum_{n=8}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} =$$

$$= \frac{1}{2^{10}} \sum_{n=8}^{N} \binom{N}{n} = \frac{56}{124} \simeq 0.055$$

- assim, a probabilidade de $n \geq 8$ galáxias em $N = 10$ objetos é ∼5.5%

a distribuição binomial

- exemplo: Um estudante tem que classificar 12 galáxias em 5 tipos diferentes. Suponha que todos os tipos tenham a mesma probabilidade. Se o estudante classificar as galáxias ao acaso, qual é a probabilidade de se obter até 4 classificações corretas?
  - como os 5 tipos têm a mesma probabilidade, a probabilidade de cada um é $p = 1/5 = 0.2$
  - a probabilidade de se obter ao acaso $n \leq 4$ classificações corretas para $N = 12$ galáxias é dada por

$$P(n \leq 4|p, N) = \sum_{n=0}^{4} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \simeq 0.92744$$

a distribuição de Poisson

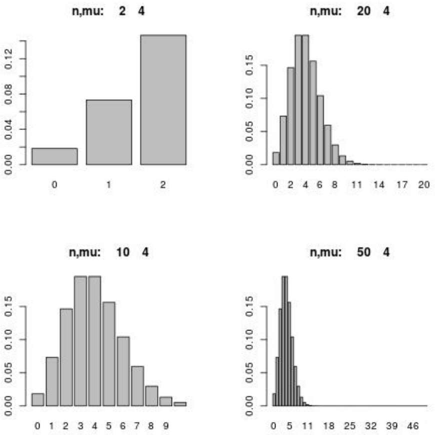
- probabilidade de n eventos ocorrerem num certo intervalo de tempo, ou em certa região do espaço, se estes eventos ocorrem independentemente e com uma média fixa μ

$$P(n|\mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

- média e variância:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} nP(n) = \mu$$

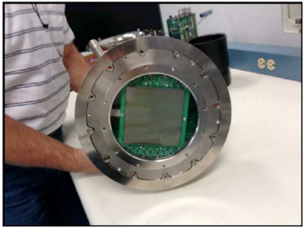
$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{N} (n - \bar{n})^2 P(n) = \mu$$

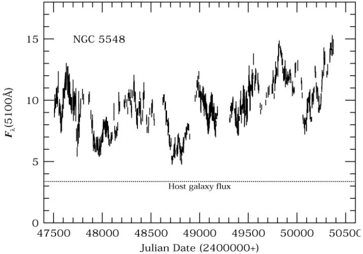


a distribuição de Poisson

aplicações:

- contagens em detectores
- densidade de estrelas/galáxias
- explosões de supernovas
- variabilidade de AGNs
- ...





a distribuição de Poisson

exemplo:

- em um detector, o número esperado de fótons de uma fonte é de 4.5 por segundo; qual é a probabilidade de se detectar 6 fótons em 2 segundos?
  - taxa de fótons: $\lambda = 4.5$/sec
  - número esperado no intervalo de tempo t: $\mu = \lambda t = 4.5 \times 2 = 9$
  - probabilidade:

$$P(n|\mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \frac{9^6}{6!} e^{-9} \simeq 0.09$$

distribuições contínuas: a distribuição exponencial

- descreve o intervalo de tempo entre eventos que obedecem a um processo poissoniano, isto é, que ocorrem continuamente e independentemente, com uma taxa média constante, $\lambda > 0$:

$$P(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

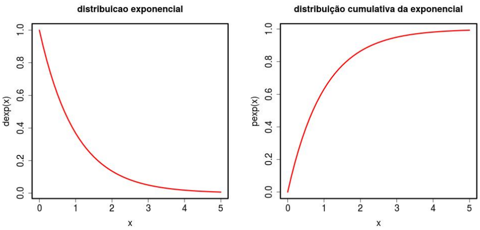
- média e variância:

$\bar{x} = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

- distribuição cumulativa:

$$F(x|\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



distribuições contínuas: a distribuição exponencial

exemplo:

- a taxa de supernovas média em uma galáxia como a Via Láctea é de 1 em 50 anos
- a última supernova conhecida que explodiu na Via Láctea foi a de Kepler, em 1604
- qual é a probabilidade de se esperar mais de 400 anos para se observar uma nova supernova?
- nesse caso,

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t_0} =$$

$$= e^{-400/50} = e^{-8} \simeq 0.00033546$$

  ou, $\sim 0.03\%$
- a distribuição exponencial não tem memória: o passado não afeta a probabilidade futura

a distribuição uniforme

- distribuição uniforme (entre 0 e X):

$$P(x|X) = \begin{cases} \frac{1}{X}, & \text{se } 0 \leq x \leq X \\ 0, & \text{de outro modo} \end{cases}$$

- média

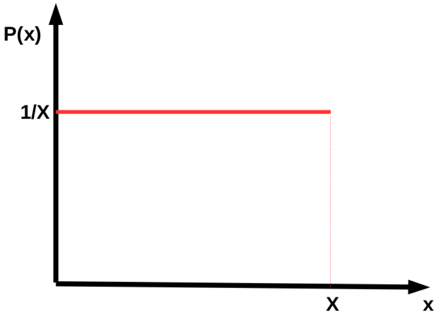
$$E(x) = \int_0^X x\frac{1}{X}dx = \frac{X}{2}$$

- variância

$$\sigma^2 = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{X^2}{3} - \frac{X^2}{4} = \frac{X^2}{12}$$

- distribuição cumulativa:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{X}dx = \frac{x}{X}$$



a versátil distribuição beta

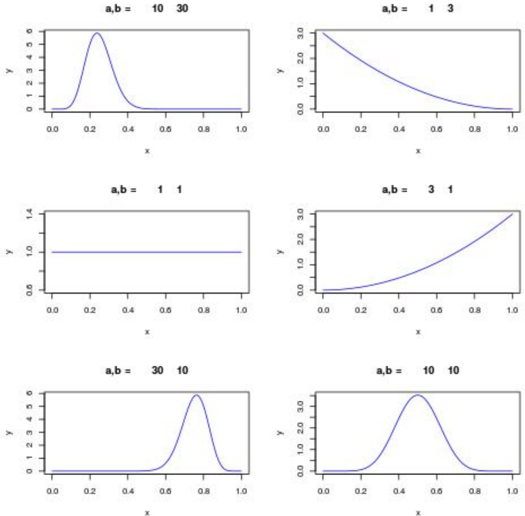
- definida no intervalo $0 < x < 1$

$$Beta(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad (a, b > 0)$$

função gama:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

- propriedades:
    - $\mathrm{E}(x) = a/(a+b)$
    - $\mathrm{var}(x) = ab/[(a+b)^2(a+b+1)]$
    - $\mathrm{moda}(x) = (a-1)/(a+b-2)$



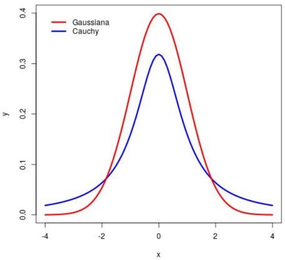
a distribuição de Cauchy

- distribuição de Cauchy ou lorentziana:

$$P(x|\mu,\gamma) = \frac{\gamma}{\pi[\gamma^2 + (x-\mu)^2]}$$

- parâmetro de localização: μ
  parâmetro de escala: $\gamma > 0$
- como $P(x) \propto 1/x^2$ para $x >> 1$, a média, variância e desvio padrão não existem ("caudas pesadas")
- dada uma amostra $\{x_i\}$ com distribuição de Cauchy, μ e γ devem ser estimados com métodos robustos (como medianas e quartis)

- se x e y são duas variáveis gaussianas independentes amostradas de $N(0,1)$, então $z = x/y$ distribui-se como Cauchy com $\mu = 0$ e $\gamma = 1$



distribuição em lei de potência

muito comum em Astronomia:

- exemplos: contagens de galáxias, função de massa inicial de Salpeter
- também muito comum em outras áreas: flutuações no mercado econômico, taxa de crescimento de empresas, distribuição de salários, etc
- $N(>L)$: número de objetos ou eventos com uma dada propriedade medida (e.g. a luminosidade) maior do que um certo valor L

- se a distribuição for uma lei de potência com expoente γ, temos:

$$N(>L) \propto L^{\gamma+1} \qquad \text{(forma integral)}$$

ou

$$dN \propto (\gamma+1)L^{\gamma}dL \qquad \text{(forma diferencial)}$$

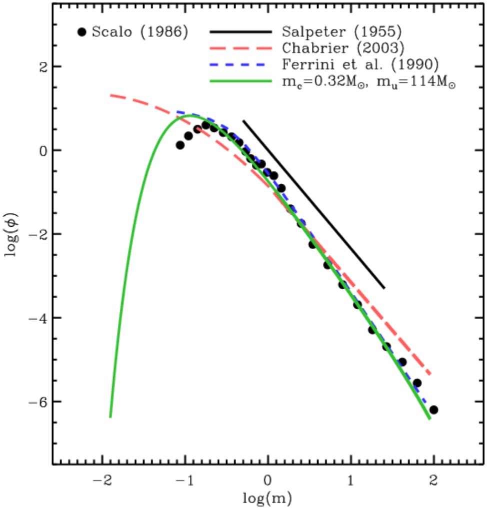
- *distribuição independente de escala*: se $f(x) = x^{\gamma}$, então $f(ax) = a^{\gamma}x^{\gamma} = \text{cte } x^{\gamma} = \text{cte } f(x)$, que é a definição de independência de escala

distribuição em lei de potência

- média e variância infinitas, a menos que limites sejam definidos: isso é o que ocorre na maioria dos casos concretos, pois sempre existem limitações físicas em ambos os 'lados' da distribuição
- exemplo: a função de massa inicial de Salpeter (1955)

$$\xi(M) = \xi_0 M^{-2.35}$$

$\xi(M)dM$: número de estrelas nascidas com massas entre M e $M + dM$



distribuições bivariadas

- vamos considerar agora distribuições de duas ou mais variáveis
- dadas 2 variáveis x e y a distribuição de probabilidades conjunta de x e y é $P(x,y)$:
  - $P(x,y) \geq 0$
  - $\int P(x,y)dxdy = 1$ ou $\sum_{x,y} P(x,y) = 1$
- As distribuições $P(x)$ e $P(y)$ são as **distribuições marginais** de $P(x,y)$:

$P(x) = \int P(x,y)dy$ ou $P(x) = \sum_y P(x,y)$

$P(y) = \int P(x,y)dx$ ou $P(y) = \sum_x P(x,y)$

- distribuição cumulativa conjunta (não é muito usada):

$$F(x',y') = P(x < x', y < y')$$

valor esperado e correlação

- **valor esperado** de uma função $f(x,y)$:

$$E(f) = \int_x \int_y f(x,y)P(x,y)dxdy$$

ou

$$E(f) = \sum_x \sum_y f(x,y)P(x,y)$$

- **covariância** entre x e y

$$Cov(x,y) = E[(x-E(x))(y-E(y))] = E(xy) - E(x)E(y) \equiv \sigma_{xy}$$

- o **coeficiente de correlação de Pearson** é um número entre -1 e +1 definido como

$$\rho = Corr(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

σ_x^2, σ_y^2: valores esperados da variância de x e y

distribuições condicionais

- regra do produto:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y)$$

ou

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$

- se x e y são **independentes**,

$$P(x|y) = P(x)$$

e

$$P(x, y) = P(x)P(y)$$

e também

$$Cov(x, y) = 0$$

exemplo

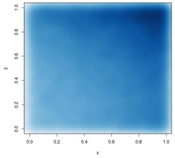
consideremos a distribuição:

$$P(x,y) = \frac{6}{5}(x+y^2), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

- $P(x) = \int_0^1 P(x,y)dy = \frac{6}{5}(x + \frac{1}{3})$
- $P(y) = \int_0^1 P(x,y)dx = \frac{6}{5}(\frac{1}{2} + y^2)$
- $E(x) = \int_0^1 xP(x)dx = \frac{3}{5}$
- $E(y) = \int_0^1 yP(y)dy = \frac{3}{5}$
- $E(xy) = \int_0^1 \int_0^1 xyP(x,y)dxdy = \frac{7}{20}$
- $Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = -\frac{1}{100}$

- $P(x,y) = P(x|y)P(y)$
- $P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{2(x+y^2)}{1+2y^2}$
- $P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)} = \frac{3(x+y^2)}{1+3x}$

- note que x e y não são variáveis independentes



a distribuição gaussiana bivariada

- gaussiana bivariada:

$$P(x, y|\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{Z^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

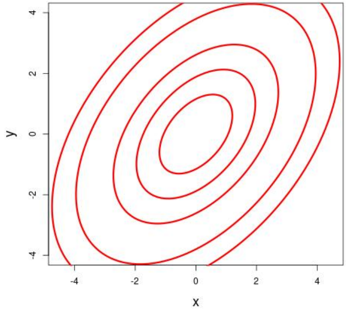
onde

$$Z^2 = \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

- coeficiente de correlação:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

- contornos $P(x, y) =$ cte: elipses



distribuição gaussiana bivariada em notação vetorial

$$P(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

notação vetorial:

- vetor com as variáveis:

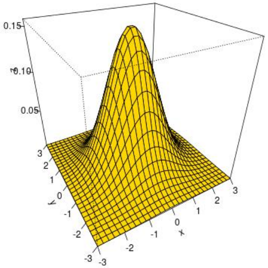
$$\mathbf{x}=(x,y)^T$$

- vetor com as médias:

$$\mu=(\mu_x,\mu_y)^T$$

- matriz de covariância:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{bmatrix}$$



então,

$$P(x,y)=\frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\}\sim N(\mu,\Sigma)$$

a distribuição gaussiana bivariada

Note que:

- $-1 \leq \rho \leq +1$
- x e y são independentes apenas se $\rho = 0$
- as distribuições marginais são

$$P(x) \sim N(\mu_x, \sigma_x) \quad e \quad P(y) \sim N(\mu_y, \sigma_y)$$

- covariância entre x e y:

$$Cov(x, y) = \rho$$

- distribuições condicionais (ver completando_o_quadrado.pdf):

$$P(y|x) \sim N(\mu_{y|x}, \sigma_{y|x}),$$

onde

$$\mu_{y|x} = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}$$