Lista 3 - MAT-206 - MAP-216 - 2023

(I) Dada uma função $f : A \longrightarrow B$, dizemos que

(i) f é injetora se $(\forall\, x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2))$, ou, equivalentemente, $(\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2)\ \rightarrow\ x_1 = x_2)$.

(ii) f é sobrejetora se $imf = B$, isto é: $(\forall\ y \in B)(\exists\ x \in A : f(x) = y)$.

(iii) f é bijetora se é injetora e sobrejetora.

Se $f : A \longrightarrow B$ é bijetora, podemos definir a função inversa de f, que designamos por f^{-1}. Temos que $f^{-1} : B \longrightarrow A$ se caracteriza pela seguinte condição:
$(\forall\ b \in B, \forall\ a \in A)(f^{-1}(b) = a \leftrightarrow\ f(a) = b)$.

Prove que as seguintes funções são bijetoras e determine suas respectivas inversas:

(a) $f :]0, +\infty[\longrightarrow\ ]0, +\infty[\qquad f(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $f :]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[\qquad f(x) = x^2$

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow\ ]-1, 1[\qquad f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

(II) Sejam I, J intervalos e $f : I \longrightarrow J$ uma função estritamente crescente, isto é:
$\forall\ x_1, x_2 \in I(x_1 < x_2 \rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$

(i) Prove que f é injetora.

(ii) Suponha que f seja estritamente crescente e sobrejetora.
Prove que f^{-1} também é estritamente crescente.

(III) Dada uma função $f : A \longrightarrow B$ e $V \subseteq B$, a imagem inversa de V por f é definida como $f^{-1}(V) = \{x \in A\colon\ f(x) \in V\}$

Dados $V, W \subseteq B$, prove que:

(i) $V \subseteq W \longrightarrow f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$

(ii) $f^{-1}(V \cup\ W) = f^{-1}(V) \cup\ f^{-1}(W)$

(iii) $f^{-1}(V \cap\ W) = f^{-1}(V) \cap\ f^{-1}(W)$

(iv) $f^{-1}(B - V) = A - f^{-1}(V)$

(IV) Dada uma função $f : A \longrightarrow B$ e $C \subseteq A$, a imagem de C por f é designada por $f(C)$ e é definida por

$f(C) = \{f(x) : x \in C\} = \{y \in B : \exists\ x \in C \text{ e } y = f(x)\}$

Dados $C, D \subseteq A$, prove que:

(i) $C \subseteq D \rightarrow f(C) \subseteq f(D)$

(ii) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$

iii) $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.
Mostre, com um exemplo, que a igualdade pode não valer.

(V) Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função.

(i) Dado $V \subseteq B$, prove que $f(f^{-1}(B)) \subseteq V$.

(ii) Dado $C \subseteq A$, prove que $C \subseteq f^{-1}(f(C))$.

(iii) Quando é que vale a igualdade em (i) ? E em (ii) ?

(VI) Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que $imf \subseteq D_g$. Então está definida a função composta $g \circ f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Prove:

(i) Se f e f são injetoras então $g \circ f$ é injetora.

(ii) Se f e g são sobrejetoras então $g \circ f$ é sobrejetora.

(iii) Se $g \circ f$ é injetora então f é injetora.

(iv) Se $g \circ f$ é sobrejetora então g é sobrejetora.