

Geometria Analítica

Operações com vetores

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Operações com vetores

- Multiplicação por um escalar
- Adição
- Diferença

Multiplicação por um escalar

Sejam α um número real e $\vec{v}$ um vetor.

(a) Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

(b) Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ caracteriza-se por:

- $\alpha\vec{v} // \vec{v}$;
- $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ são de mesmo sentido se $\alpha > 0$, e de sentido contrário se $\alpha < 0$;
- $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$.

Propriedades da multiplicação por um número real

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

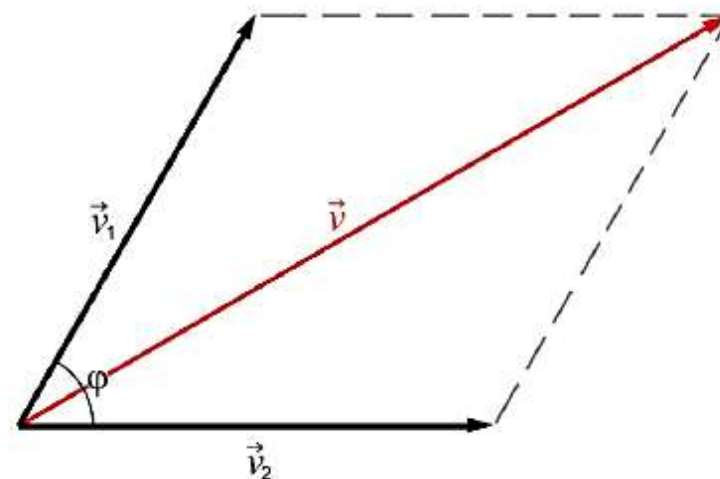
- I) $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ (associativa)
- II) $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de escalares)
- III) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributiva em relação à adição de vetores)
- IV) $1\vec{v} = \vec{v}$ (identidade)

Soma de vetores

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dois vetores. A soma desses vetores é um terceiro vetor, o vetor resultante $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Para determinarmos o módulo, a direção e o sentido desse vetor resultante, utilizamos a regra do paralelogramo. Primeiramente, desenhamos o paralelogramo definido a partir dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.



Propriedades da adição

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo o vetor $\vec{v}$ se tem:

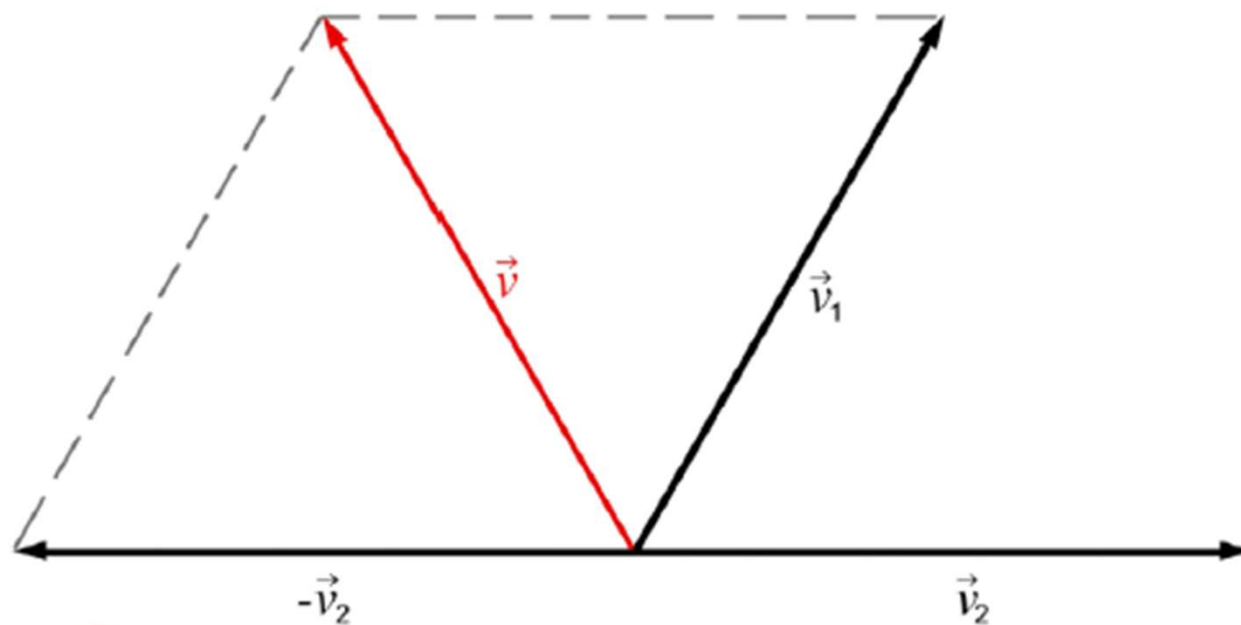
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

IV) Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um só vetor $-\vec{v}$ (vetor oposto de $\vec{v}$) tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

Diferença de vetores

Consideremos os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. A subtração de vetores resulta em um terceiro vetor $\vec{v}$ chamado diferença, cujas propriedades são inferidas a partir da soma dos vetores $\vec{v}_1$ e $(-\vec{v}_2)$.



Extensão para muitos vetores

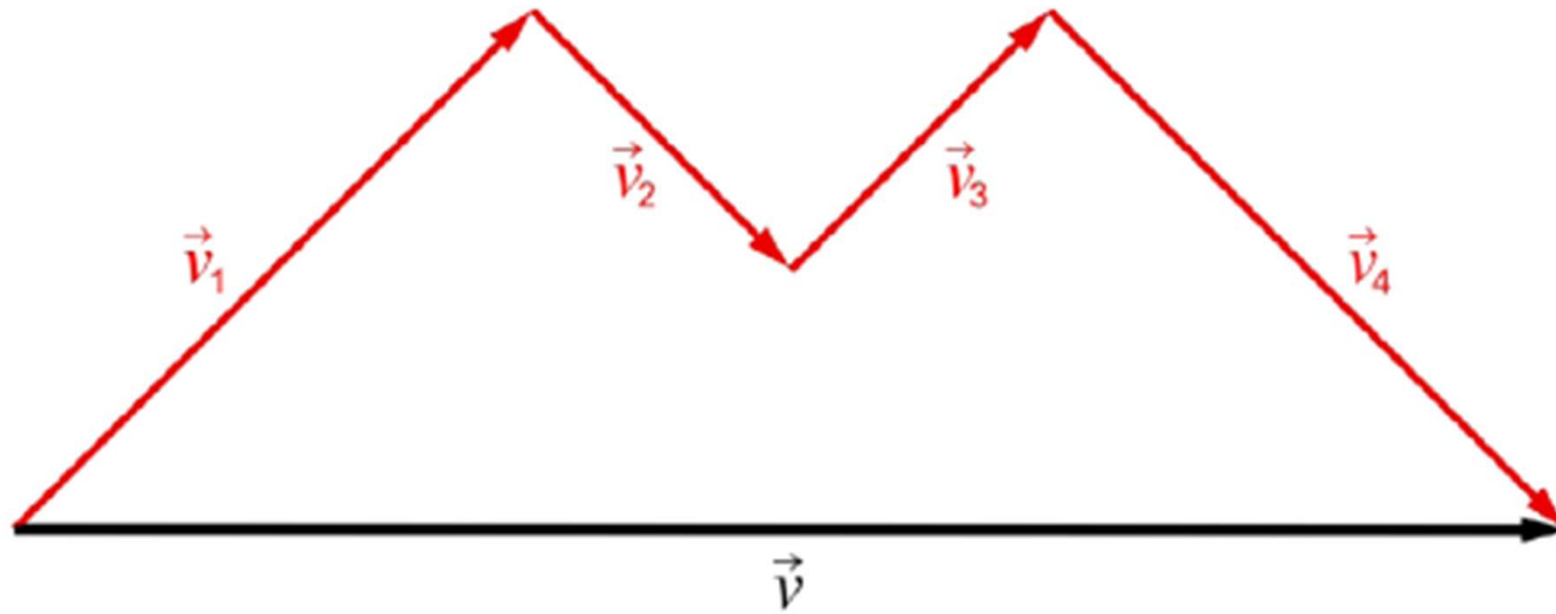


Figura 1.8: Posicionando-se os vetores, um em seguida ao outro, o vetor soma é aquele que fecha o polígono

Exercícios

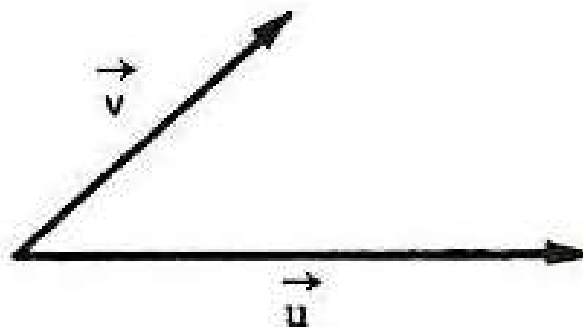
1) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar, num gráfico, um representante do vetor:

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

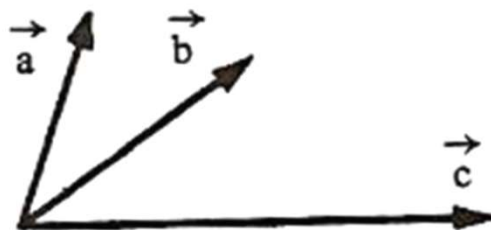


2) Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, como na figura, apresentar um representante de cada um dos vetores:

a) $4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$

b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

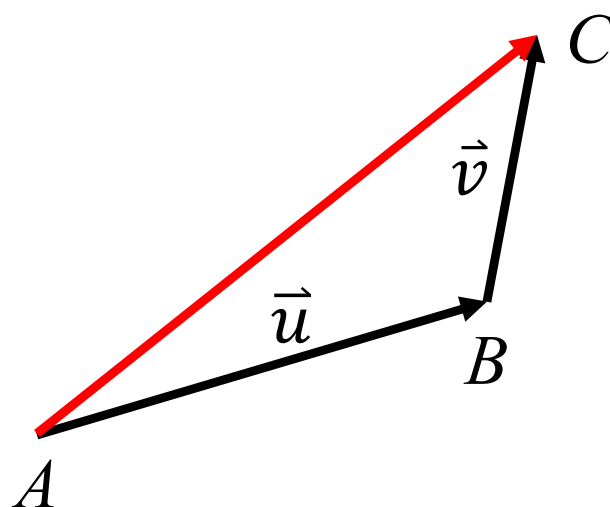
c) $2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$



Soma de vetores (definição)

Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sejam (A, B) um representante qualquer de $\vec{u}$ e (B, C) o representante de $\vec{v}$ que tem origem B . O vetor soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, indicado por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor que tem (A, C) por representante:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Exercícios

- Prove que $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.
- Prove as seguintes leis do cancelamento da adição de vetores:

$$\vec{u} + \vec{x} = \vec{u} + \vec{y} \rightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

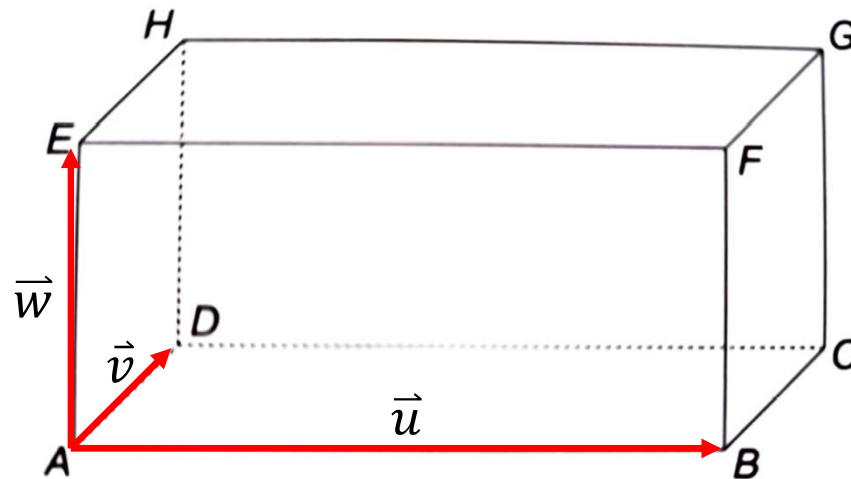
- Prove:

$$\text{a) } \vec{x} + \vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\text{b) } \vec{u} = \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$$

- Prove que $\vec{u} + \vec{z} = \vec{u} \rightarrow \vec{z} = \vec{0}$ e que $\vec{u} + \vec{z} = \vec{0} \rightarrow \vec{z} = -\vec{u}$.
Essas propriedades asseguram a unicidade do elemento neutro e a do elemento oposto.

- Na figura representa-se um paralelepípedo $ABCDEFGH$. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{EC}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



Multiplicação por um escalar

- Prove que, se $\alpha \neq 0$, então $\alpha \vec{v} = \vec{w} \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{w}}{\alpha}$.
- Prove que $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c} \rightarrow \vec{b} = \frac{(\vec{a} - \vec{c})}{2}$.

Regras dos sinais

Quaisquer que sejam o escalar α e o vetor $\vec{v}$, valem as igualdades:

$$\text{a) } (-\alpha)\vec{v} = -(\alpha\vec{v})$$

$$\text{b) } \alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$$

$$\text{c) } (-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$$

Vetores paralelos

- Dois vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existe um escalar λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, conseqüentemente, $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\lambda}$.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Exercícios

- Sejam B e C dois pontos distintos e M o ponto médio de BC . Prove que se A é um ponto qualquer, então $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.
- Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e tem a metade da sua medida.
- Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a metade da soma das medidas das bases.