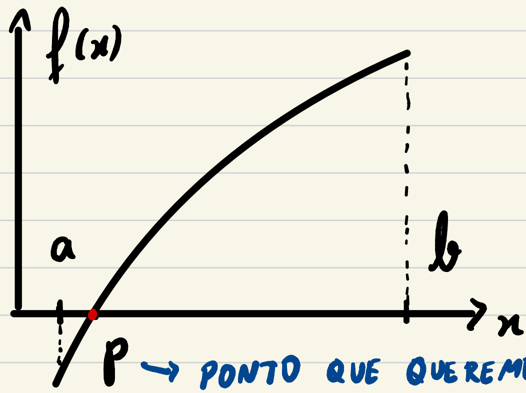
Zero de Funções

- Descrição do Problema:

Dado uma função contínua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, ache um ponto $p \in [a,b]$ tal que $f(p)=0$. O ponto p é chamado de zero (ou raiz) da função f.



$\to$ ponto que queremos encontrar.

- Métodos que serão estudados:

- Bissecção ou Dicotomia.
- Método do Ponto fixo.
- Ordem de convergência. Convergência Alternada e Monótona.
- Método de Newton.

- Típicas questões que serão abordadas.
  - O método converge? Sob quais condições?
  - Como podemos estimar o erro?
  - Qual é a eficiência do método?

O Método da Bissecção (ou Dicotomia)

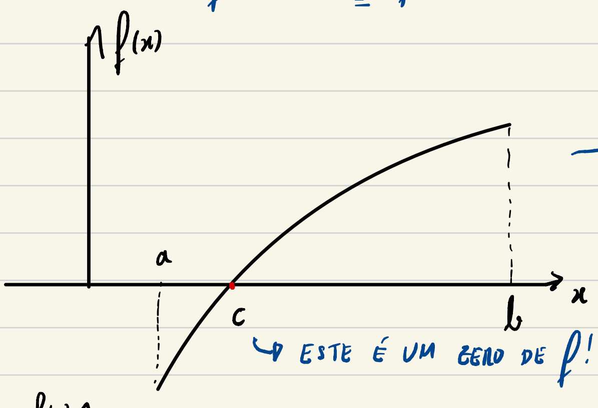
É o mais simples! Mas não é o mais eficiente.

Pré-Requisito

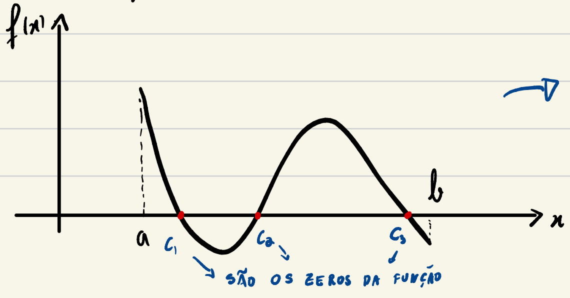
Teorema de Bolzano

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então $\exists\, c \in\,]a,b[$ tal que $f(c) = 0$ ($\exists$ ao menos um zero da função f em $]a,b[$)

Observação: $f(a)f(b) < 0$ é o mesmo que dizer que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos ($f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ ou $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$).



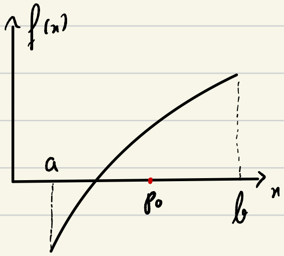
→ Neste caso $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. O teorema garante que $\exists$ (ao menos) um zero de f.



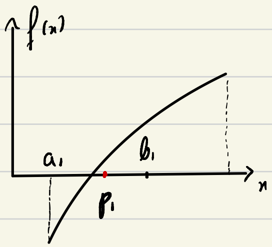
→ Neste caso $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. O teorema garante que $\exists$ (ao menos) um zero de f.

Como funciona o método?

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.



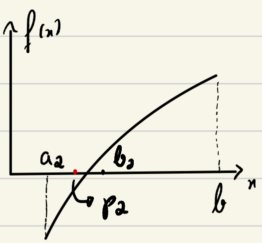
$f(a)f(b) < 0$. Escolho $p_0 = \frac{a+b}{2}$



$f(p_0)f(a) < 0 \Rightarrow \exists$ zero de f em $]a, p_0[$

$f(p_0)f(b) > 0$

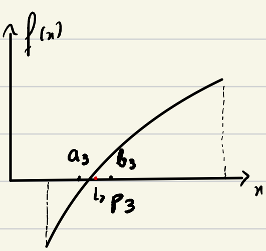
Definimos $a_1 = a$, $b_1 = p_0$ e $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$



$f(p_1)f(a_1) < 0 \Rightarrow \exists$ zero de f em $]a_1, p_1[$

$f(p_1)f(b_1) > 0$

Definimos $a_2 = a_1$, $b_2 = p_1$ e $p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$



$f(p_2)f(a_2) > 0$

$f(p_2)f(b_2) < 0 \Rightarrow \exists$ zero de f em $]p_2, b_2[$

Definimos $a_3 = p_2$, $b_3 = b_2$ e $p_3 = \frac{a_3+b_3}{2}$

O ALGORITMO: COMEÇAMOS COM $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTÍNUA.

TAL QUE $f(a)f(b)<0$. LOGO

1) $a_0=a$, $b_0=b$ E $p_0=\frac{a_0+b_0}{2}$

2) PARA $n\geq 0$, TEMOS

i) SE $f(p_n)=0$, ENTÃO ACHAMOS UM ZERO DE f.

ii) SE $f(a_n)f(p_n)<0$, ENTÃO $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=p_n$ E $p_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$

iii) SE $f(b_n)f(p_n)<0$, ENTÃO $a_{n+1}=p_n$, $b_{n+1}=b_n$ E $p_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$

OBSERVAÇÃO: UMA E SOMENTE UMA DAS CONDIÇÕES i), ii) E iii) OCORRE.

QUANDO DEVEMOS PARAR?

A RESPOSTA SERÁ DADA COM A ESTIMATIVA DE ERRO.

PARA IMPLEMENTAR O MÉTODO BASTA USAR 3 VARIÁVEIS a,b E p, COMEÇANDO COM $p=\frac{a+b}{2}$
PARA CADA PASSO, TEMOS:

i) SE $f(p)==0$, ENTÃO PARAMOS O PROGRAMA
ii) SE $f(a)f(p)<0$, ENTÃO $b=p$ E $p=\frac{a+b}{2}$
iii) SE $f(b)f(p)<0$, ENTÃO $a=p$ E $p=\frac{a+b}{2}$

EXEMPLO: SEJA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DADA POR $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

i) MOSTRE QUE $\exists$ UM ZERO DE f EM $]1,2[$.

ii) FAÇA 4 ITERAÇÕES DO MÉTODO DA BISSECÇÃO (DETERMINE p_3).

SOLUÇÃO:

i) BASTA CALCULAR $f(1) = 1 + 4 - 10 = -5$

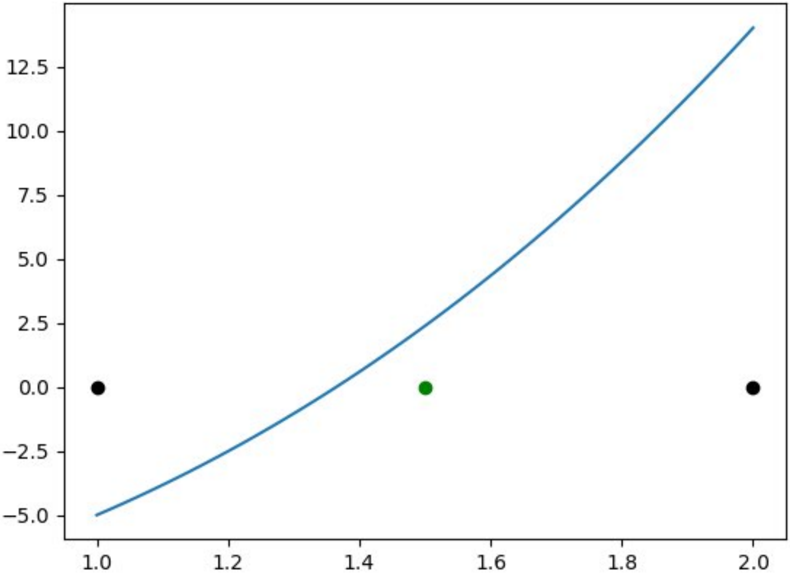
$$f(2) = 8 + 16 - 10 = 14.$$

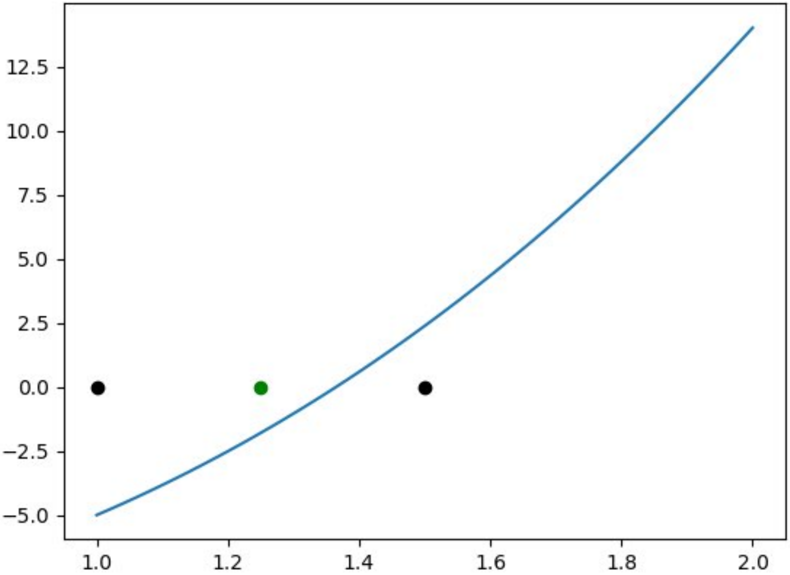
COMO $f(1)f(2) < 0$, $\exists$ UM ZERO DE f PELO TEOREMA DE BOLZANO

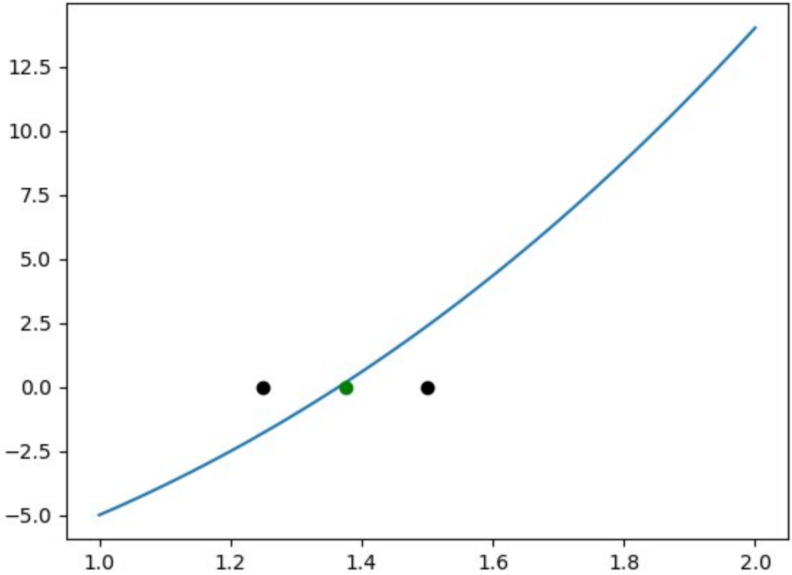
ii)

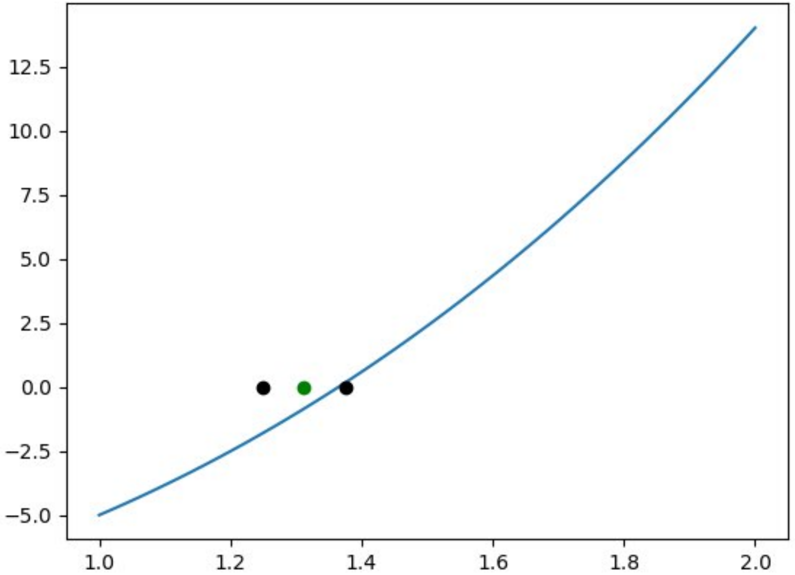
	a_n	b_n	p_n	SINAL $f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(p_n)$
$n=0$	1	2	1.5	-5	14	2.375
$n=1$	1	1.5	1.25	-5	2.375	-1.7968
$n=2$	1.25	1.5	1.375	-1.7968	2.375	0.16211
$n=3$	1.25	1.375	$\boxed{1.3125}$			

$p_3 = 1.3125$


12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0


12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0


12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0


12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0

Estimativa de erro e Convergência

<u>Teorema</u>: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)f(b) < 0$

Logo $\exists$ $p \in]a,b[$ tal que:

1) $f(p) = 0$

Se $f(p_N) = 0$, definimos $p_n = p_N$, $\forall n \geq N$.

2) $|p - p_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Em particular, $\lim_{n \to \infty} p_n = p$

Demonstraremos abaixo apenas o caso em que o zero de f em $]a,b[$ é único. (Caso geral no apêndice da aula).

<u>Demo</u>: Por construção, $p_0 = \frac{a+b}{2}$ e $[a_1, b_1] = [a, p_0]$ ou $[p_0, b]$.

Logo $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Da mesma forma, $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e $[a_2, b_2] = [a_1, p_1]$ ou $[p_1, b_1]$

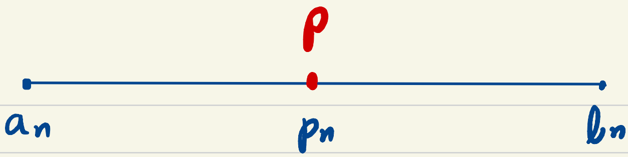
Logo $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$.

Continuando o argumento, vemos que $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$.

Sabemos que $f(a_n)f(b_n) < 0$. Logo $\exists$ um zero de f em $]a_n, b_n[$, que, por hipótese, é único. Vamos denotá-lo por p.

Como $p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, temos 3 possibilidades:

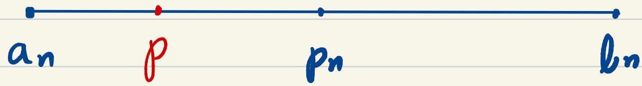
1)



$p = p_n$

NESTE CASO, $|p - p_n| = 0 < \frac{b-a}{2^{n+1}}$

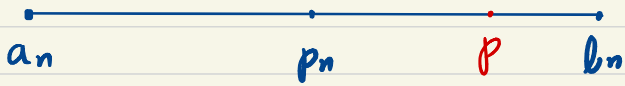
2)



$p \in]a_n, p_n[$.

NESTE CASO, $|p - p_n| < p_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

3)



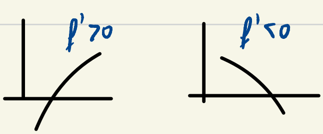
$p \in]p_n, b_n[$

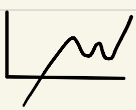
NESTE CASO, $|p - p_n| < b_n - p_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$. $\blacksquare$

OBSERVAÇÃO: EM GERAL, O MÉTODO SEMPRE CONVERGE PARA UMA RAIZ DE f, MESMO QUE ELA NÃO SEJA ÚNICA.

OBSERVAÇÃO: UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA UNICIDADE DE ZEROS É A FUNÇÃO f SER ESTRITAMENTE CRESCENTE (OU DECRESCENTE).

POR EXEMPLO, SE f É C^1 E $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, ENTÃO A RAIZ É ÚNICA.





→ A CONDIÇÃO NÃO É NECESSÁRIA.

Exemplo: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

Já vimos que existe um zero de f em $[1,2]$. Esse zero é único, pois $f'(x) = x^2(3x+8) > 0$ se $x \in [1,2]$.

Ache $n \geq 0$ tal que $|p_n - p| \leq 0.001$.

Solução: Sabemos que $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Logo $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 0.001 \Rightarrow \frac{1}{0.001} \leq 2^{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} > 10^3$

$$\Rightarrow (1+n)\ln(2) > 3\ln(10) \Rightarrow n > 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)} - 1$$

Como $3\frac{\ln(10)}{\ln(2)} - 1 = 8.965\ldots$, basta $\boxed{n > 9}$

Calculando $p_9 = 1.364257\ldots$

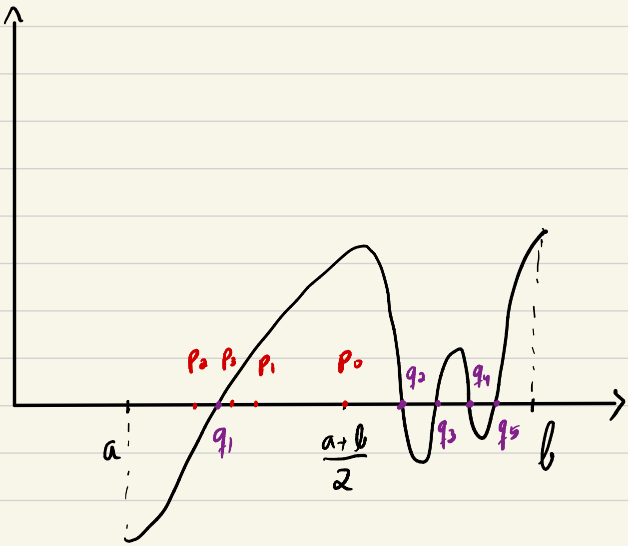
Raiz $p = 1.36523001$

Diferença 0.0009722.

Ok!

EXEMPLO: (CUIDADO!) CONSIDERE UMA FUNÇÃO $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

CONTÍNUA COM O GRÁFICO ABAIXO



TEMOS 5 RAÍZES: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5.

OS 4 PRIMEIROS PONTOS DO MÉTODO DA BISSECÇÃO SÃO: p_0, p_1, p_2, p_3.

- ASSIM $\lim_{n \to \infty} p_n = q_1$. NÃO ACHAMOS AS OUTRAS RAÍZES USANDO O INTERVALO $[a,b]$.
- OBSERVE TAMBÉM QUE p_0 ESTÁ MAIS PRÓXIMO A q_2 DO QUE A q_1

Apêndice

Teorema: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)f(b) < 0$

Logo $\exists\ p \in\ ]a, b[$ tal que:

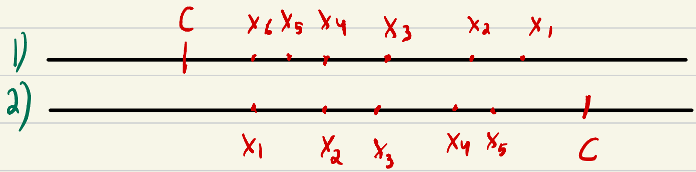
1) $f(p) = 0$

Se $f(p_N) = 0$, definimos $p_n = p_N$, $\forall n \geq N$.

2) $|p - p_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Em particular, $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$

Lema: Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$.

1) Se $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n$, e se $\exists\ C > 0$ tal que $x_n \geq C$, $\forall n$, então $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
2) Se $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n$, e se $\exists\ C > 0$ tal que $x_n \leq C$, $\forall n$, então $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$



$\Longrightarrow (x_n)$ converge.

Demo: **Caso 1:** $\exists\ N \geq 0$ tal que $f(p_N) = 0$ (e $f(p_n) \neq 0$, $n < N$).

Por construção, temos $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \leq N-1$.

Como $a_N \leq p_N \leq b_N$, temos $p_N \in [a_m, b_m]$, $\forall m < N$. Assim, seja $p := p_N$.

$$|p - p_m| = \left|p_N - \left(\frac{b_m + a_m}{2}\right)\right| \leq \frac{b_m - a_m}{2} = \frac{b-a}{2^{m+1}},\ \forall m < N.$$

Por construção, $p_n = p$, se $n \geq N$. Logo

$$|p - p_n| = 0 \leq \frac{b_n - a_n}{2^{n+1}},\ \forall n \geq N.$$

(Por convenção $b_n = b_N$, $\forall n \geq N$; $a_n = a_N$, $\forall n \geq N$)

Caso 2: $f(p_n) \neq 0, \forall n \geq 0$

Por construção, temos $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $f(b_n)f(a_n) \leq 0$ e

$a_0 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n := \bar{a}$, $\bar{a} \geq a_n, \forall n \geq 0$

$a \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} b_n := \bar{b}$, $\bar{b} \leq b_n, \forall n \geq 0.$

Note que $\bar{b} - \bar{a} = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

Seja $p = \bar{a} = \bar{b}$. Assim, $f(p)^2 = f(\bar{b})f(\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)f(a_n) \leq 0.$

Como $f(p)^2 \geq 0$ (é o quadrado de um número real),

concluímos que $f(p) = 0$.

Por fim $p = \bar{a} \geq a_n$ e $p = \bar{b} \leq b_n$. Logo $p \in [a_n, b_n]$

Portanto $|p - p_n| = \left|p - \frac{(b_n + a_n)}{2}\right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$ ■

ZERO DE FUNÇÕES

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Estaremos interessados em encontrar um ponto $p \in [a, b]$ tal que $f(p) = 0$. Um ponto p com essa propriedade será chamado de *zero (ou raiz) de* f.

As sequências serão sempre indexadas por $\{0, 1, 2, ...\}$.

Lembramos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^k, $k \geq 1$, se f é contínua e possui derivadas contínuas até ordem até k. (Exemplo: f é C^1 se f é derivável e f' é contínua). As funções contínuas são também chamadas em algumas referências de funções de classe C^0.

A notação $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ indica o máximo da função f no intervalo $[a, b]$. Se f é contínua, esse máximo sempre existe.

Aula 1: Método da bissecção ou da dicotomia

Teorema 1. *(Pré-requisito: Bolzano): Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Observação 2. O Teorema de Bolzano garante existência de um zero de f em $]a, b[$, mas não garante unicidade. No entanto, caso f seja estritamente crescente ou decrescente, então a raiz c é única. Se f for de classe C^1, um condição suficiente para tanto é que f' nunca se anule. (Note que existem casos em que f não é crescente nem decrescente, mas a função tem um único zero. Nesta observação estamos apenas dando condições suficientes para a unicidade, porém não necessárias)

Método da Bissecção (ou da Dicotomia):

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. Definimos sequências (a_n), (b_n) e (p_n) da seguinte maneira:

a) Para $n = 0$, definimos $a_0 = a$, $b_0 = b$ e $p_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

b) Para $n \geq 0$:

i) Se $f(a_n)f(p_n) < 0$, então $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = p_n$ e $p_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$.

ii) Se $f(b_n)f(p_n) < 0$, então $a_{n+1} = p_n$ e $b_{n+1} = b_n$ e $p_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$.

iii) Se $f(p_n) = 0$, então achamos uma raiz. (Na prática, se isto ocorrer paramos o método e pouco importa como definimos a_m, b_m e p_m para $m > n$. Para fixar notação e para o Teorema 4, é conveniente definir $a_m = a_n$, $b_m = b_n$ e $p_m = p_n$ para todo $m \geq n$, se $f(p_n) = 0$).

Observação 3. A condição $f(a)f(b) < 0$ equivale a dizer que os sinais de $f(a)$ e $f(b)$ são opostos, ou seja, ou temos $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, ou temos $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Não é difícil concluir que uma e somente uma das condições $i)$, $ii)$ e $iii)$ pode ocorrer. De fato, pela construção acima, os números $f(a_n)$ e $f(b_n)$ têm sempre sinais opostos. Logo as condições $i)$, $ii)$ e $iii)$ comparam o sinal de $f(p_n)$ com os de $f(a_n)$ e de $f(b_n)$.

Teorema 4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)f(b) < 0$ e (p_n) a sequência construída pelo método da bissecção. Logo existe $p \in [a, b]$ tal que*

i) $f(p) = 0$. (p é uma raiz de f)

ii) $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$.

Observação 5. O teorema acima mostra que o método da bissecção sempre converge para um zero de f, mas não implica que este seja o único zero de f em $[a, b]$. Podem existir outros. A Observação 2 nos fornece algumas condições suficientes para a unicidade.

Observação 6. Cuidado com as convenções! Em alguns livros (como o Burden e Faires), as sequências começam com $p_1 = \frac{a+b}{2}$ ao invés de p_0. Com essa convenção temos $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$.