Introdução à Física das Partículas Elementares

4300422

edisciplinas.if.usp.br

(buscar: física das partículas elementares)

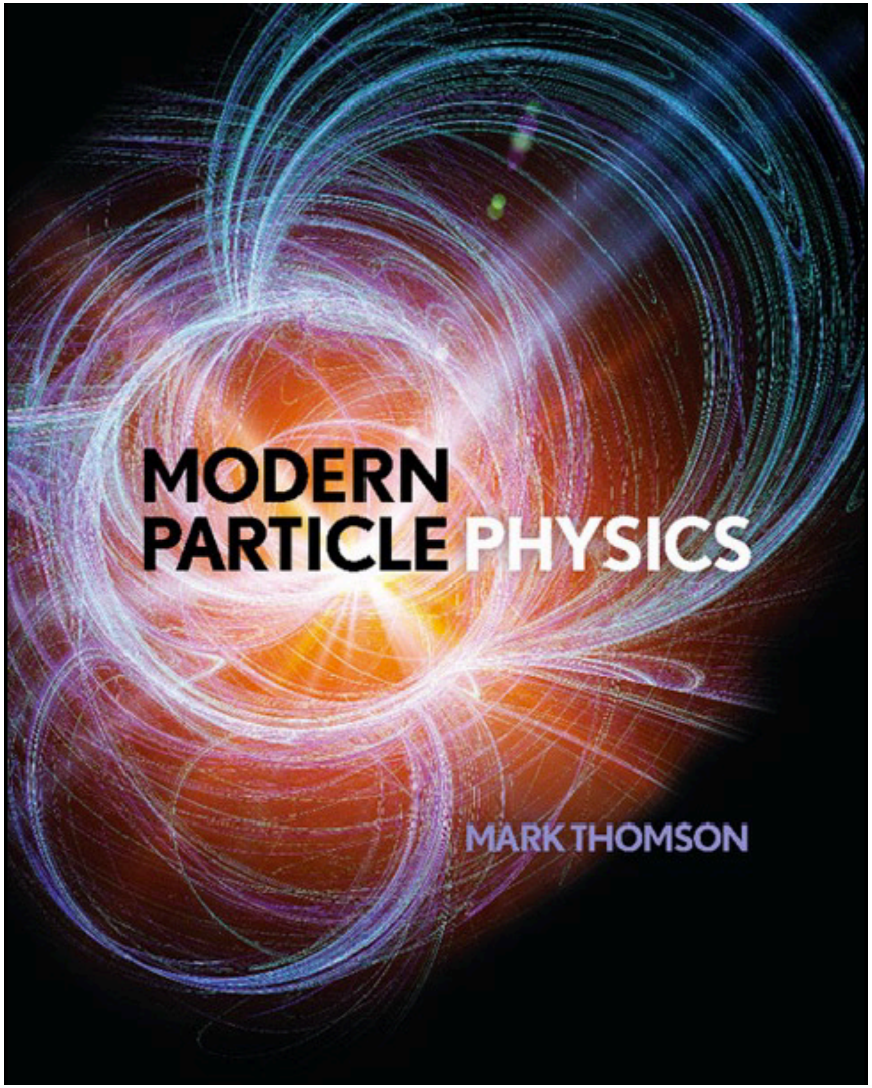
Fernando S Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano

guilherme.germano@usp.br

Bibliografia



CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

First published 2013

Plano do Curso

14/03	Cap. 1	25/04	Cap. 6	25/05	Cap. 9
16/03	Cap. 1	27/04	Cap. 6	30/05	Cap. 9
21/03	Cap. 2	04/05	Cap. 7	01/06	Cap. 9
23/03	Cap. 2	09/05	Cap. 7	06/06	
28/03	Cap. 3	11/05	Cap. 8	08/06	
30/03	Cap. 4	16/05	Cap. 8	13/06	Cap. 10
04/04		18/05	Cap. 8	15/06	Cap. 10
06/04		23/05	P2	20/06	Cap. 10
11/04	Cap. 4			22/06	Cap. 11
13/04	Cap. 4			27/06	Cap. 11
18/04	Cap. 5			29/06	P3
20/04	P1			04/07	Sub

Aula 4

Capítulo 2

Mecânica Quântica

Mecânica quântica de Schrödinger

Função de onda da partícula livre: $\psi(\mathbf{x}, t) \propto \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\}.$

Vetor de onda : $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Energia : $E = \hbar\omega$

Em unidades naturais : $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ $\omega = E$

Substituindo : $\psi(\mathbf{x}, t) = N \exp\{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)\}$

N é uma constante de normalização : $\int \psi^* \psi \, dV = 1$

Equação de auto-valores:

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

Definimos os operadores: $\hat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$ $\hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t}$,

Operadores agem na função de onda: $\psi(\mathbf{x}, t) = N \exp\{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)\}$

Aplicando estes operadores na função de onda da partícula livre temos:

$$\hat{\mathbf{p}}\psi = -i\boldsymbol{\nabla}\psi = \mathbf{p}\psi,$$

$$\hat{E}\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi$$

"Dedução" da Equação de Schrödinger

$$E = H \qquad H = T + V \qquad E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V,$$

E e p viram operadores :

$$\hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$$

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\mathbf{x},t)$$

Equação de Schrödinger dependente do tempo

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + \hat{V}$$

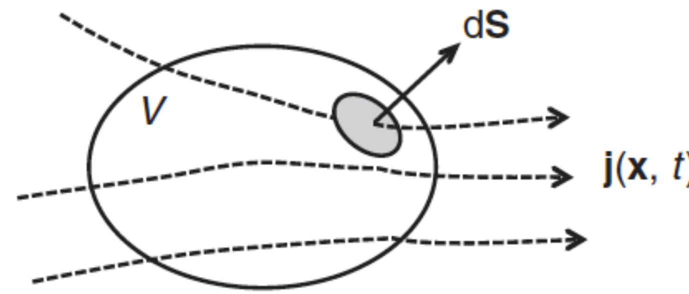
Assim:

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{x},t)}{\partial x^2} + \hat{V}\psi(\mathbf{x},t)$$

Conservação da probabilidade

A carga elétrica é conservada. Para a densidade de carga e corrente vale:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, \mathrm{d}V = -\int_S \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$



Carga que o volume perde com o tempo = carga que sai através da fronteira

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, \mathrm{d}V = -\int_V \nabla\cdot \mathbf{j}\, \mathrm{d}V. \longrightarrow \nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Equação da continuidade

Definimos a densidade de probabilidade : $\rho(\mathbf{x}, t) = \psi^*(\mathbf{x}, t)\,\psi(\mathbf{x}, t)$

$$\psi^* \times \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi, \qquad \psi \times \quad -i\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*$$

(a primeira equação menos a segunda equação)

$$-\frac{1}{2m}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right) = i\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right)$$

(usamos a definição da derivada do produto)

$$-\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) = i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = i\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Concluimos que $\quad \mathbf{j} = \frac{1}{2im}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.}$

Probabilidade é conservada !

Evolução temporal

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\mathbf{x},t)$$

Se Psi for autoestado do Hamiltoniano : $\hat{H}\psi_i(\mathbf{x},t) = E_i\psi_i(\mathbf{x},t)$

$$i\frac{\partial\psi_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} = E_i\psi_i(\mathbf{x},t)$$

$$\psi_i(\mathbf{x},t) = \phi_i(\mathbf{x})\, f_i(t) \quad \longrightarrow \quad i\,\phi_i(\mathbf{x})\,\frac{df(t)}{dt} = E_i\,\phi_i(\mathbf{x})\,f(t)$$

$$\psi_i(\mathbf{x},t) = \phi_i(\mathbf{x})e^{-iE_it}$$

Estado na notação de Dirac (ket): $|\psi(\mathbf{x},t)\rangle$

(é mais geral do que uma função de onda; pode incluir spin)

Estado genérico escrito como combinação de autoestados :

$$|\varphi\rangle = \sum_i c_i|\psi_i\rangle \qquad |\psi_i\rangle = \psi_i \qquad \psi_i(\mathbf{x},t) = \phi_i(\mathbf{x})e^{-iE_it}$$

$$|\varphi(\mathbf{x},t)\rangle = \sum_i c_i\,|\phi_i(\mathbf{x})\rangle e^{-iE_it}$$

Produto escalar de dois estados: $$\langle\psi|\phi\rangle = \int \psi^*(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\,d^3\mathbf{x}$$

Autoestados são ortogonais: $$\langle\phi_j|\phi_k\rangle = \delta_{jk}$$

Regra de ouro de Fermi

$$\hat{H}_0\phi_k = E_k\phi_k \qquad \langle\phi_j|\phi_k\rangle = \delta_{jk}$$

H_0 = Hamiltoniano livre

$$i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \left[\hat{H}_0 + \hat{H}'(\mathbf{x},t)\right]\psi$$

H' = Hamiltoniano de interação

$$\psi(\mathbf{x},t) = \sum_k c_k(t)\phi_k(\mathbf{x})e^{-iE_kt}$$

$$i\sum_k\left[\frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t}\phi_k e^{-iE_kt} - \cancel{iE_kc_k\phi_k e^{-iE_kt}}\right] = \sum_k \cancel{c_k\hat{H}_0\phi_k e^{-iE_kt}} + \sum_k \hat{H}'c_k\phi_k e^{-iE_kt}$$

$$i\sum_k\frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t}\phi_k e^{-iE_kt} = \sum_k \hat{H}'c_k(t)\phi_k e^{-iE_kt}$$

No instante inicial: $t=0$ $\quad |i\rangle = \phi_i \quad c_k(0) = \delta_{ik}$

A interação é uma perturbação : $c_i(t) \approx 1$ $c_{k\neq i}(t) \approx 0$

$$i\sum_k \frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t}\phi_k e^{-iE_k t} = \sum_k \hat{H}' c_k(t)\phi_k e^{-iE_k t} \longrightarrow i\sum_k \frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t}\phi_k e^{-iE_k t} \approx \hat{H}'\phi_i e^{-iE_i t}$$

Transição para o estado final f: $|f\rangle = \phi_f$ $c_f(t)$

Multiplicamos a equação acima por $\langle\phi_f|$ e usamos $\langle\phi_f|\phi_k\rangle = \delta_{fk}$ (integrando no volume)

$$\frac{\mathrm{d}c_f}{\mathrm{d}t} = -i\langle f|\hat{H}'|i\rangle e^{i(E_f - E_i)t}$$

Onde
$$\langle f|\hat{H}'|i\rangle = \int_V \phi_f^*(\mathbf{x})\hat{H}'\phi_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}.$$

$T_{fi} = \langle f|\hat{H}'|i\rangle$ Elemento de matriz de transição

Integrando a equação acima de 0 a T :

$$\frac{\mathrm{d}c_f}{\mathrm{d}t} = -i\langle f|\hat{H}'|i\rangle e^{i(E_f-E_i)t} \quad \rightarrow \quad c_f(T) = -i\int_0^T T_{fi}\, e^{i(E_f-E_i)t}\,\mathrm{d}t.$$

Se a perturbação não depende do tempo T_{fi} também não.

$$c_f(T) = -iT_{fi}\int_0^T e^{i(E_f-E_i)t}\,\mathrm{d}t$$

A probabilidade de transição é dada por

$$P_{fi} = c_f(T)c_f^*(T) = |T_{fi}|^2 \int_0^T \int_0^T e^{i(E_f-E_i)t} e^{-i(E_f-E_i)t'}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'$$

A taxa de transição é dada por

$$\mathrm{d}\Gamma_{fi} = \frac{P_{fi}}{T} = \frac{1}{T}|T_{fi}|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i(E_f-E_i)t} e^{-i(E_f-E_i)t'}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'$$

$$d\Gamma_{fi} = \frac{P_{fi}}{T} = \frac{1}{T}|T_{fi}|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i(E_f - E_i)t} e^{-i(E_f - E_i)t'} \, dt \, dt'$$

O integrando é estreito e então

$$d\Gamma_{fi} = |T_{fi}|^2 \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i(E_f - E_i)t} e^{-i(E_f - E_i)t'} \, dt \, dt' \right\}$$

Usando a definição da função delta na integral em t' :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k_0)x} dx = 2\pi\delta(k - k_0)$$

$$d\Gamma_{fi} = 2\pi \, |T_{fi}|^2 \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) \, dt \right\}$$

Considerando as transições para n estados finais com energias ~ E_f :

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i)\, dt \right\} dE_f .$$

(a exponencial vira 1 e a delta vai para fora da integral)

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \right\} dE_f$$

(a integral dividida por T dá 1)

$$= 2\pi \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i)\, dE_f$$

$$= 2\pi |T_{fi}|^2 \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i}$$

$$\rho(E_i) = \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i}$$

densidade de estados

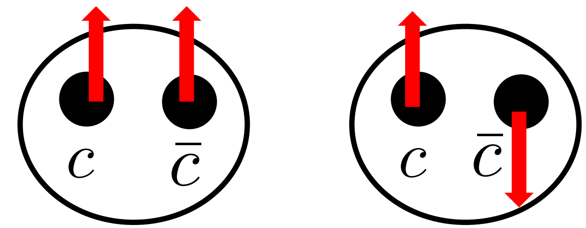
$$\boxed{\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i)}$$

Fermi !

Exercícios

Qual é o gráfico de Feynman do processo:

$$e^- + e^+ \to J/\psi + \eta_c$$

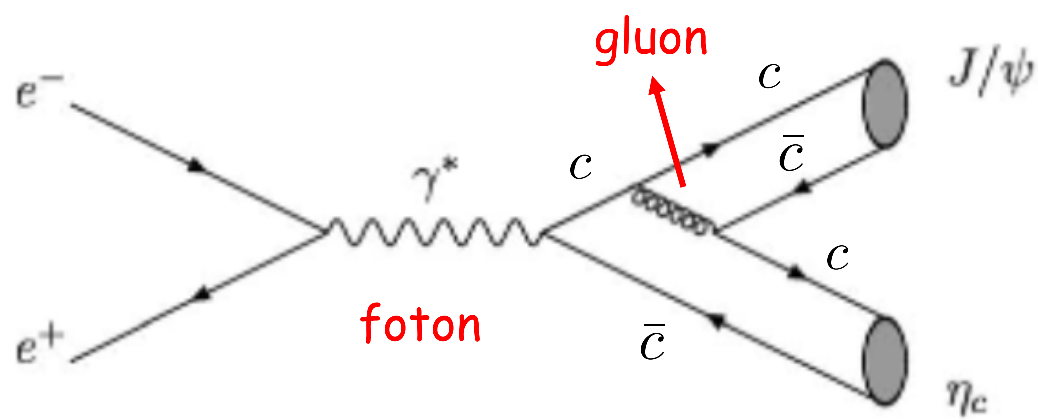


J/ψ η_c

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Physics Letters B 570 (2003) 39–45
PHYSICS LETTERS B
www.elsevier.com/locate/npe
ELSEVIER

Exclusive J/ψ productions at e^+e^- colliders

Kaoru Hagiwara[a], Emi Kou[b], Cong-Feng Qiao[c,d]



Os 4-momentos das partículas são:

$$p_1^\mu = (E, 0, 0, p) \qquad p_2^\mu = (E, 0, 0, -p) \qquad p_3^\mu = (M, 0, 0, 0)$$

Energia total e momento total são conservados: $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu$

$$E + E = M \qquad 2E = M \qquad E = \sqrt{p^2 + m^2} \qquad p = \gamma m v$$

$$p^2 + m^2 = \frac{M^2}{4} \qquad \gamma^2 m^2 v^2 = \frac{M^2}{4} - m^2 \qquad \frac{v^2}{1 - v^2} = \frac{M^2}{4m^2} - 1$$

$$v^2 = 1 - \frac{4m^2}{M^2} \qquad v = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \qquad M \geq 2m$$

FIM

Relações de comutação e observáveis compatíveis

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0.$$

$$\hat{A}|\phi\rangle = a|\phi\rangle \qquad \hat{A}\hat{B}\,|\phi\rangle = \hat{B}\hat{A}\,|\phi\rangle = a\hat{B}\,|\phi\rangle.$$

Isto implica que $\hat{B}\,|\phi\rangle \propto |\phi\rangle$ e portanto $\hat{B}|\phi\rangle = b|\phi\rangle$

$|a, b\rangle$ a e b podem ser medidos simultaneamente !

Relação de Incerteza

Se $\quad [\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0,$

$$\Delta A\, \Delta B \geq \tfrac{1}{2} \left| \langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

onde $\quad (\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$

$$\hat{x}\psi = x\psi \qquad\qquad \hat{p}_x \psi = -i \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = -ix \frac{\partial}{\partial x}\psi + i \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) \quad = -ix\frac{\partial \psi}{\partial x} + i\psi + ix\frac{\partial \psi}{\partial x} = +i\psi$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = +i$$

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Momento Angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x)$$

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \qquad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \qquad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \left[\hat{y}, \hat{p}_y\right] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = +i$$

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hat{L}_z \qquad \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hat{L}_x \qquad \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_y\right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_z\right] = 0$$

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad \hat{L}_+^\dagger = \hat{L}_-$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y \qquad \hat{L}_-^\dagger = \hat{L}_+$$

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm\right] = 0$$

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] \pm i\left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right] \quad = i\hat{L}_y \pm \hat{L}_x$$

$$\boxed{\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hat{L}_\pm}$$

$$\boxed{\hat{L}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z + \hat{L}_z^2}$$

Seja um autoestado simultâneo de L^2 e de L_z : $|\lambda, m\rangle$

$$\hat{L}_z |\lambda, m\rangle = m |\lambda, m\rangle \qquad \hat{L}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle$$

$$\psi = \hat{L}_+ |\lambda, m\rangle$$

$$\hat{L}^2 \psi = \hat{L}^2 \hat{L}_+ |\lambda, m\rangle = \hat{L}_+ \hat{L}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda \hat{L}_+ |\lambda, m\rangle = \lambda \psi$$

$$\boxed{\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm \hat{L}_\pm} \qquad \hat{L}_z \hat{L}_+ = \hat{L}_+ \hat{L}_z + \hat{L}_+$$

$$\hat{L}_z \psi = \hat{L}_z \left[\hat{L}_+ |\lambda, m\rangle\right] = (\hat{L}_+ \hat{L}_z + \hat{L}_+) |\lambda, m\rangle$$

$$= (m+1) \left[\hat{L}_+ |\lambda, m\rangle\right] = (m+1)\psi$$

$\psi = \hat{L}_+ |\lambda, m\rangle$ também é autoestado simultâneo com autovalores λ $\quad m+1$

Como $\langle \hat{L}_z^2 \rangle \leq \langle \hat{L}^2 \rangle$ existe um m máximo $m = \ell$ tal que

$$\hat{L}_+ |\lambda, \ell\rangle = 0$$

$$\hat{L}^2 |\lambda, \ell\rangle = \left(\hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_z + \hat{L}_z^2\right) |\lambda, \ell\rangle$$

$$\lambda |\lambda, \ell\rangle = (0 + \ell + \ell^2) |\lambda, \ell\rangle$$

Assim $\lambda = \ell(\ell + 1)$

$m = -\ell, -\ell + 1, \ldots, +\ell - 1, +\ell.$ $2\ell + 1$ estados

ℓ é quantizado assumindo valores inteiros ou semi-inteiros

$$\hat{L}_z |\ell, m\rangle = m |\ell, m\rangle \quad \text{and} \quad \hat{L}^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell + 1) |\ell, m\rangle$$

Valor esperado do operador A : $$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \psi^\dagger \hat{A} \psi \, \mathrm{d}^3\mathbf{x},$$

$\psi^\dagger = (\psi^*)^T$ Hermitiano conjugado ou adjunto

$$\frac{\mathrm{d}\langle \hat{A} \rangle}{\mathrm{d}t} = \int \left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \hat{A} \psi + \psi^\dagger \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \mathrm{d}^3\mathbf{x}, \qquad \partial \hat{A} / \partial t = 0$$

Calculamos as derivadas usando $$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\mathbf{x}, t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\langle \hat{A} \rangle}{\mathrm{d}t} &= \int \left[\left\{ \tfrac{1}{i} \hat{H} \psi \right\}^\dagger \hat{A} \psi + \psi^\dagger \hat{A} \left\{ \tfrac{1}{i} \hat{H} \psi \right\} \right] \mathrm{d}^3\mathbf{x} \\
&= i \int \left[\psi^\dagger \hat{H}^\dagger \hat{A} \psi - \psi^\dagger \hat{A} \hat{H} \psi \right] \mathrm{d}^3\mathbf{x} \\
&= i \int \psi^\dagger (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) \psi \, \mathrm{d}^3\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\langle \hat{A} \rangle}{\mathrm{d}t} = i \left\langle [\hat{H}, \hat{A}] \right\rangle,}$$

$$\frac{d\langle \hat{A}\rangle}{dt} = i\left\langle [\hat{H},\hat{A}]\right\rangle,$$

$$[\hat{H},\hat{A}] = \hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H}$$ é o comutador !

Se A comuta com o Hamiltoniano o observável correspondente não muda no tempo. É uma grandeza conservada.

Se Psi for autoestado do Hamiltoniano : $\hat{H}\psi_i(\mathbf{x},t) = E_i\psi_i(\mathbf{x},t)$

$$\psi_i^\dagger(\mathbf{x},t)\hat{H}^\dagger = E_i\psi_i^\dagger(\mathbf{x},t)$$

$$\int \psi^\dagger(\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H})\psi \, d^3\mathbf{x}.$$

$$\frac{d\langle \hat{A}\rangle}{dt} = \int \left[[iE_i\psi_i^\dagger]\hat{A}\psi_i + \psi_i^\dagger\hat{A}[-iE_i\psi_i] \right] d^3\mathbf{x} = 0$$

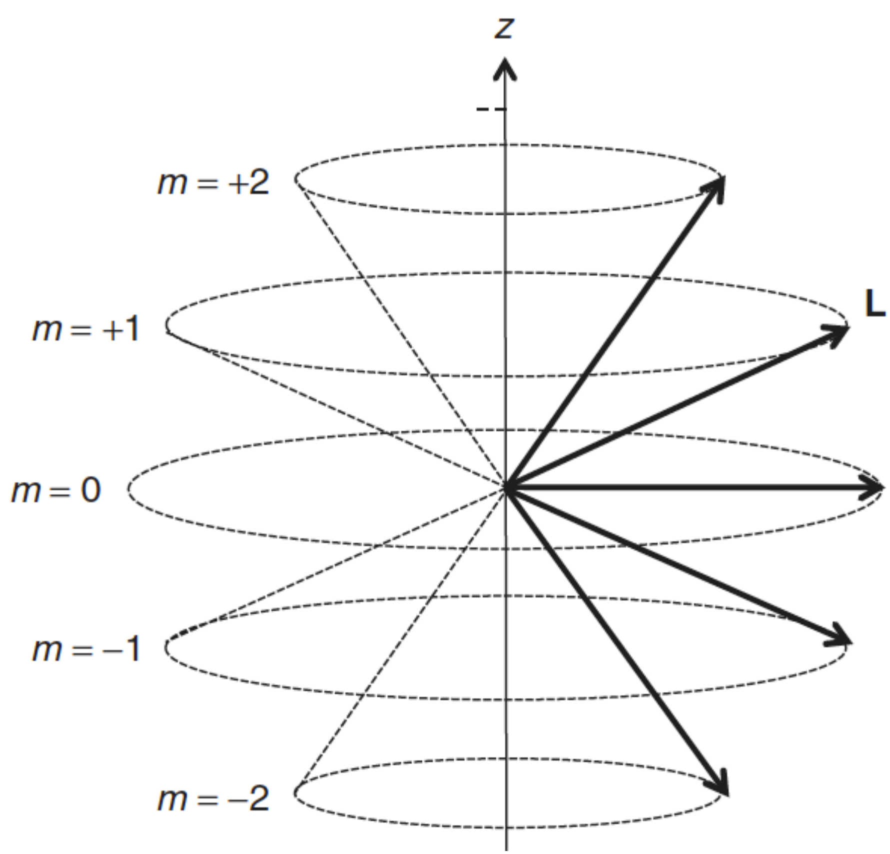
Autoestados : a derivada do valor esperado de qualquer operador é zero !

(Estados estacionários)

Exercício: mostrar que

$$\hat{L}_+ |\ell, m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\, |\ell, m+1\rangle$$

$$\hat{L}_- |\ell, m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\, |\ell, m-1\rangle$$



Unidades de Heaviside-Lorentz

Força entre dois elétrons:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Escolhemos : $\varepsilon_0 = 1$

$$F = \frac{e^2}{4\pi r^2}$$

$$F\,r^2 = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$F\,r^2 = r\,F\,r = r\,W$$ = comprimento X energia

$$[F\,r^2] = fm\,GeV$$

adimensional

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}.$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$$

$$1/(\varepsilon_0\mu_0) = c^2$$

$$\mu_0 = 1$$

$$\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$$

Roy Lichtenstein