



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# **PME 3100 Mecânica 1**

## **Estática**

**Atrito seco de escorregamento**  
**Notas de Aula**

**Prof. Leandro V. da S. Macedo**



## Conteúdo

**Simbologia**

**Unidades**

**Formulário**

**Atrito Seco de Escorregamento**

**Lei de Coulomb do Atrito**



## Simbologia

$\vec{F}$  Força

$F_{AB}$  Força na barra  $AB$

$\vec{R}$  Resultante de um sistema de forças

$I$  Invariante escalar de um sistema de forças

$\vec{M}_O$  Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um pólo  $O$

$M_u$  Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um eixo  $O\vec{u}$

$G$  Baricentro

$m_i$  massa do ponto  $i$

$M$  massa total do sistema

$\vec{g}$  aceleração da gravidade (também  $g$  tomado como módulo)

$V$  volume

$A$  área

$\ell$  linha

$\rho$  massa específica

$\mu$  coeficiente de atrito

$F_{at}$  Força de atrito

$N$  Força normal



## Unidades no SI (Sistema Internacional de Unidades)

$\vec{F}$	força	[N]	Newton
$\vec{M}_O$	momento de força	[Nm]	Newton.metro
$M_u$	momento de força em relação a eixo	[Nm]	Newton.metro
$(P - O)$	vetor posição	[m]	metro
$x$	coordenada de posição, distância ou deslocamento	[m]	metro
$m$	massa	[kg]	kilograma
$\mu$	Coeficiente de atrito	-	adimensional



## Formulário

$$(\vec{F}, P)$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$

$$(H - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$|\vec{M}_H| = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N M_x \vec{i} + \sum_{i=1}^N M_y \vec{j} + \sum_{i=1}^N M_z \vec{k}$$

$$(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^N h_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^N h_i}$$

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)}{M}$$

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0}$$

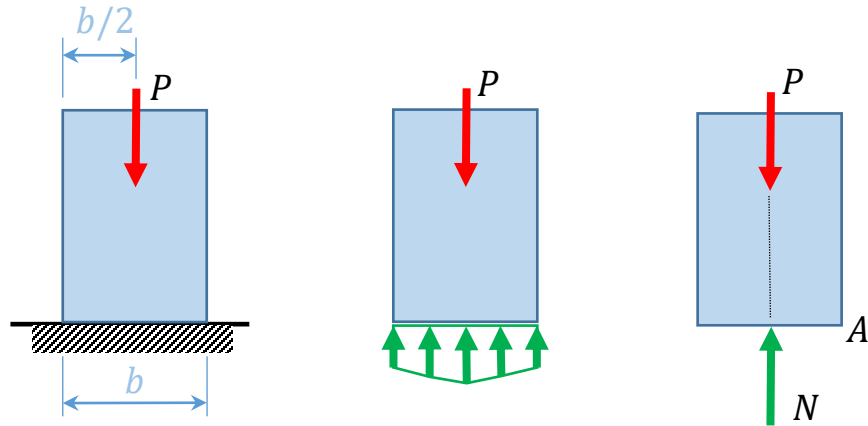
$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

$$F_{at} \leq \mu N$$



# Atrito Seco de Escorregamento

Quando submetido apenas ao peso próprio a reação do plano de apoio está simetricamente distribuída e pode ser substituída por uma única força normal ao plano de apoio



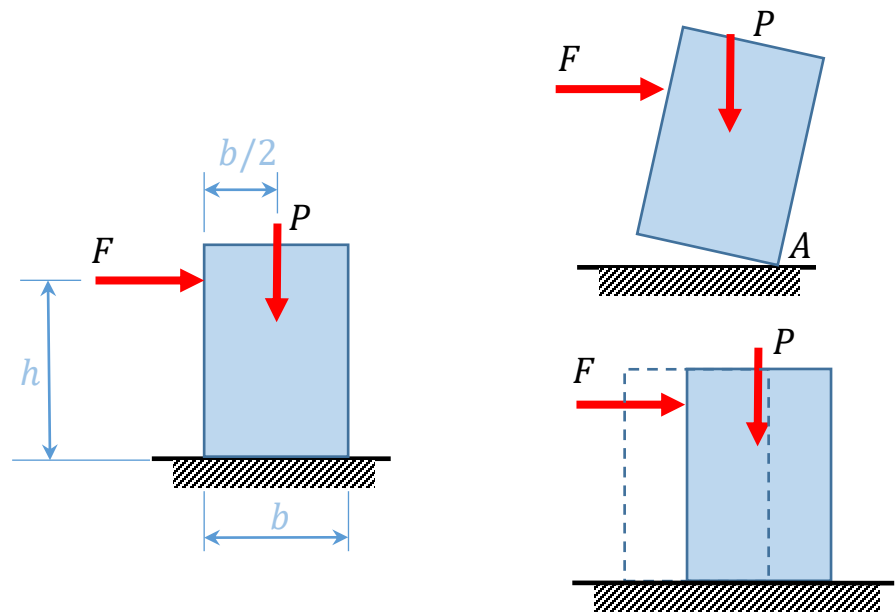
$$\sum F_y = 0 \therefore N - P = 0$$

$$N = P$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore 0 = 0$$

As linhas de ação do peso e da normal são coincidentes para não haver tombamento (para o momento ser nulo).

Ao aplicar-se uma força horizontal o bloco poderia vir a sair do equilíbrio escorregando ou tombando em torno do vértice A.

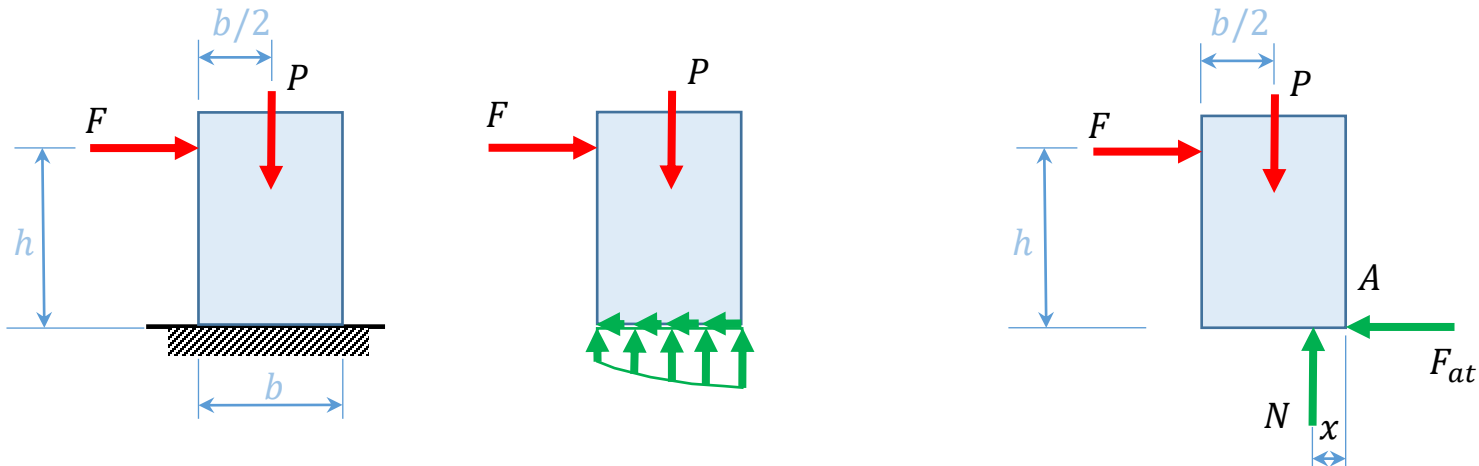


Tombamento

Escorregamento



## Atrito Seco de Escorregamento



Ao aplicar-se uma força horizontal:

- a reação normal começa a tornar-se assimétrica;
- a linha de ação da reação normal começa a se deslocar para a direita;
- surge força de reação distribuída segundo a direção tangente ao contato chamada força de atrito;
- este tipo de contato é um apoio simples unilateral com atrito;
- **ATENÇÃO:** o sentido da força de atrito deve ser contrário à hipótese de iminência de escorregamento!

$$\sum F_x = 0 \therefore F - F_{at} = 0$$

$$F_{at} = F$$

$$\sum F_y = 0 \therefore N - P = 0$$

$$N = P$$

$$\sum M_{ZA} = 0 \therefore P \cdot \frac{b}{2} - F \cdot h - N \cdot x = 0$$

$$x = \frac{1}{P} \left( P \cdot \frac{b}{2} - F \cdot h \right)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow P \cdot \frac{b}{2} \geq F \cdot h$$

Para não tombar!



## Atrito Seco de Escorregamento – Lei de Coulomb do Atrito

Intuitivamente sabemos que há também o risco do escorregamento.

Verifica-se experimentalmente que a partir de uma certa intensidade da força ativa a força de reação de atrito não consegue mais oferecer resistência e o bloco sai do equilíbrio escorregando.

Ainda experimentalmente verifica-se que o valor limite para a força de atrito é linearmente proporcional à força normal no contato, isto é, aumentando-se a força normal consegue-se resistir mais.

Ainda experimentalmente verifica-se que o valor limite depende da natureza das superfícies em contato (tipos de materiais, rugosidade superficial, lubrificação, etc...)

Iremos considerar o caso do atrito seco de escorregamento entre duas superfícies.

Um bom modelo matemático para o valor limite que a força de atrito consegue assumir é dado pela Lei de Coulomb do atrito seco de escorregamento.

$$F_{at} \leq \mu N$$

**ATENÇÃO:** o sentido da força de atrito não deve ser simplesmente arbitrado e sim colocado em oposição à hipótese de iminência de escorregamento por causa desta inequação da Lei de Coulomb.

$\mu$  *coeficiente de atrito*

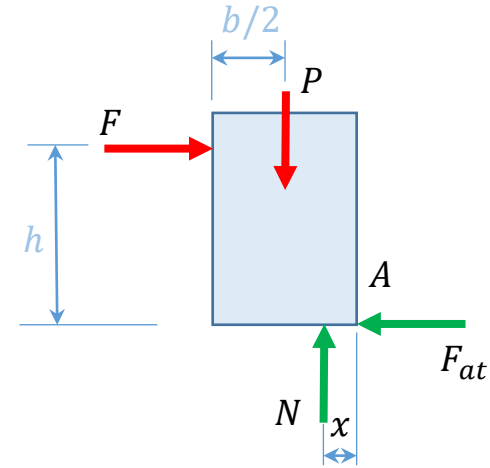
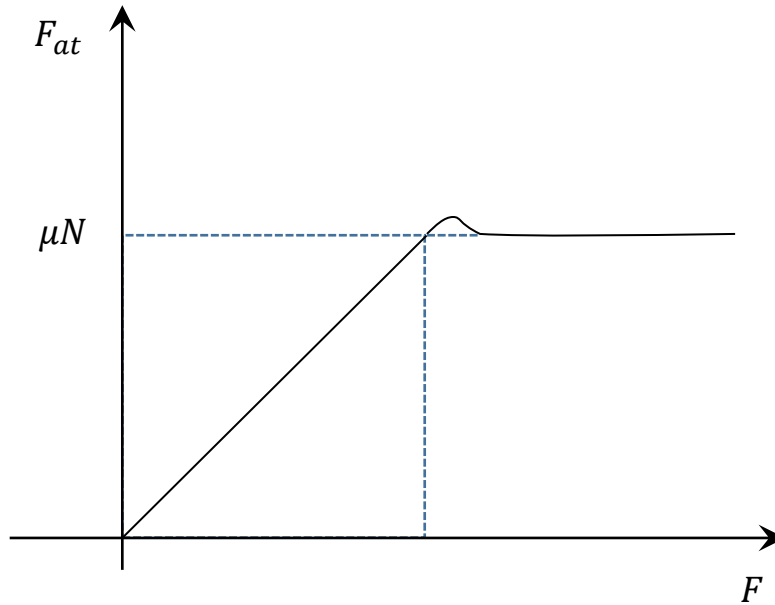
**Depende da natureza das superfícies em contato:  
tipos de materiais, rugosidade superficial**





## Atrito Seco de Escorregamento – Lei de Coulomb do Atrito

$$F_{at} \leq \mu N$$



**Observação:** aqui na Estática não faremos diferenciação entre coeficiente de atrito estático e cinético.



## Atrito Seco de Escorregamento

Assim, retomando as equações de equilíbrio do bloco:

$$\sum F_x = 0 \therefore F - F_{at} = 0$$

$$F_{at} = F$$

$$\sum F_y = 0 \therefore N - mg = 0$$

$$N = P$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore mg \cdot \frac{b}{2} - F \cdot h - N \cdot x = 0$$

$$x = \frac{1}{P} \left( P \cdot \frac{b}{2} - F \cdot h \right)$$

Para não tombar!

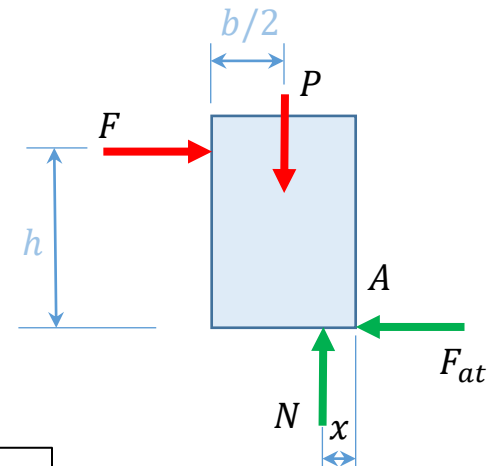
$$x \geq 0 \Rightarrow$$

$$P \cdot \frac{b}{2} \geq F \cdot h$$

Para não escorregar!

$$F_{at} \leq \mu N \Rightarrow$$

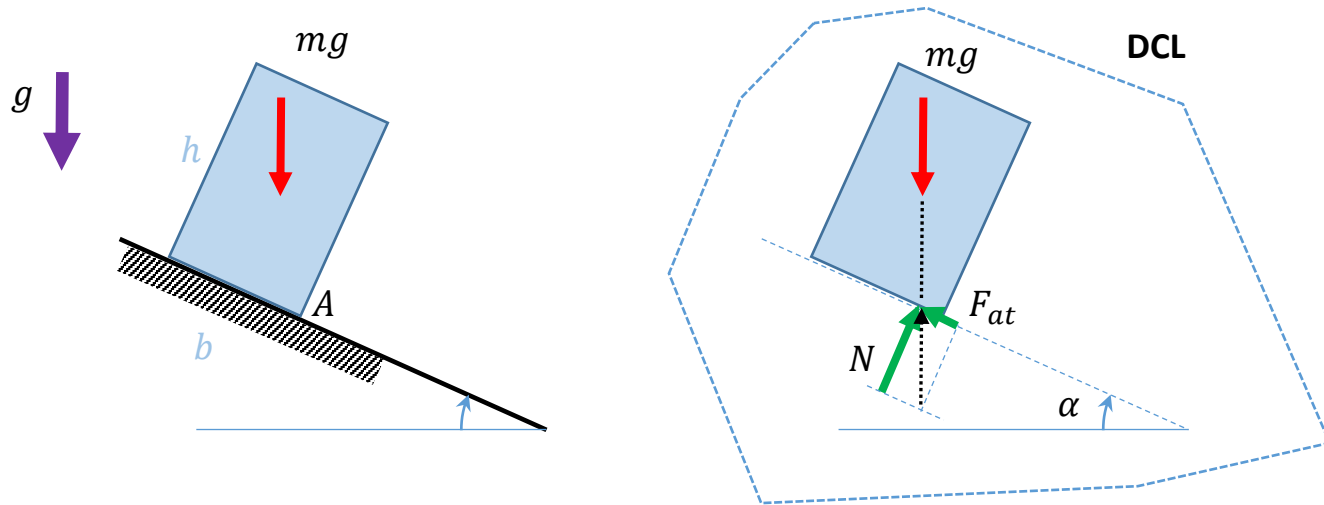
$$F \leq \mu P$$





## Exercício 1 - Bloco sobre plano inclinado

Seja o bloco de massa  $m$ , de base  $b$  e altura  $h$ , apoiado sobre o plano inclinado, com coeficiente de atrito entre bloco e plano  $\mu$ . Pede-se determinar a máxima inclinação do plano compatível com o equilíbrio.



**Nota:** esta seria uma forma de determinação experimental do coeficiente de atrito, eleva-se a inclinação até a iminência do escorregamento e aí:  
 $\mu = \arctan \alpha$

$$\sum F_x = 0 \therefore mg \sin \alpha - F_{at} = 0 \quad \boxed{F_{at} = mg \sin \alpha}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore N - mg \cos \alpha = 0 \quad \boxed{N = mg \cos \alpha}$$

$$\sum M_{ZA} = 0 \therefore mg \cos \alpha \cdot \frac{b}{2} - mg \sin \alpha \cdot \frac{h}{2} - N \cdot x = 0 \quad \boxed{x = \frac{b}{2} \cos \alpha - \frac{h}{2} \sin \alpha}$$

**Para não escorregar!**

$$F_{at} \leq \mu N$$

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\tan \alpha \leq \mu}$$

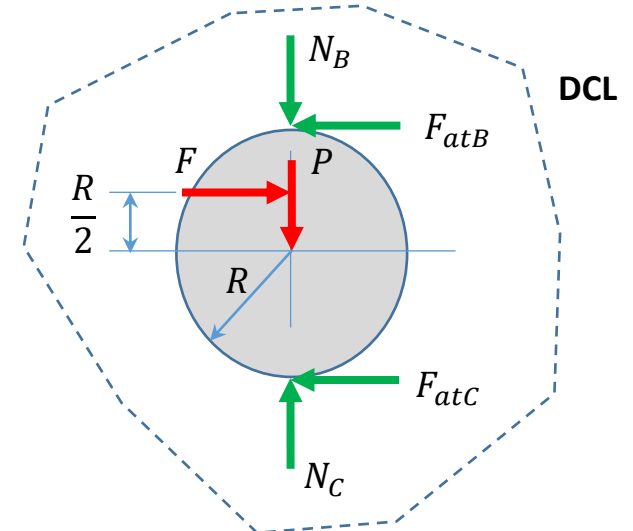
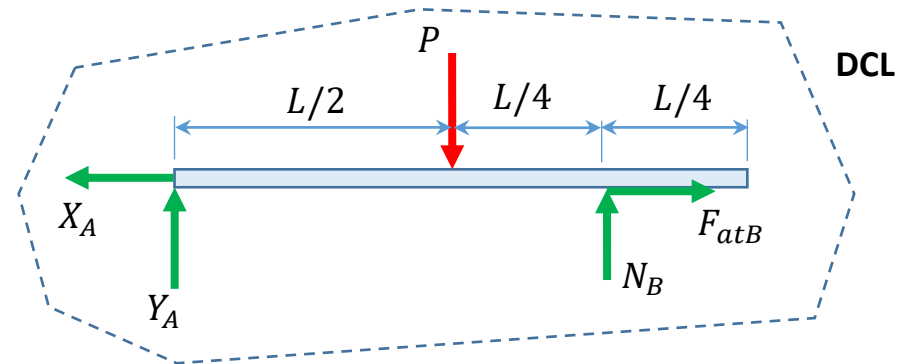
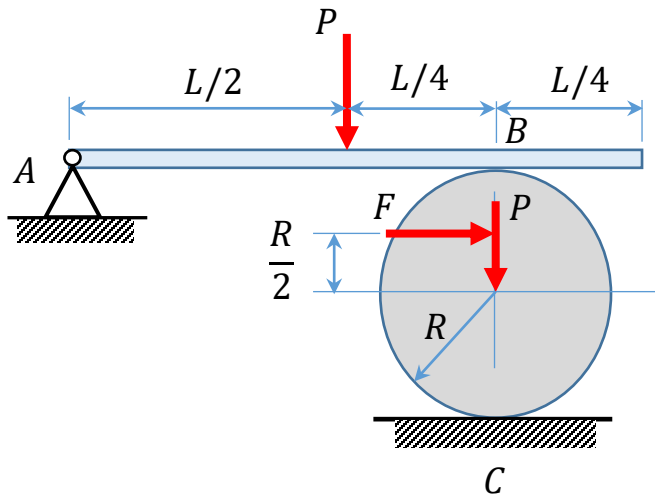
**Para não tombar!**

$$x \geq 0 \Rightarrow \boxed{\tan \alpha \leq \frac{b}{h}}$$



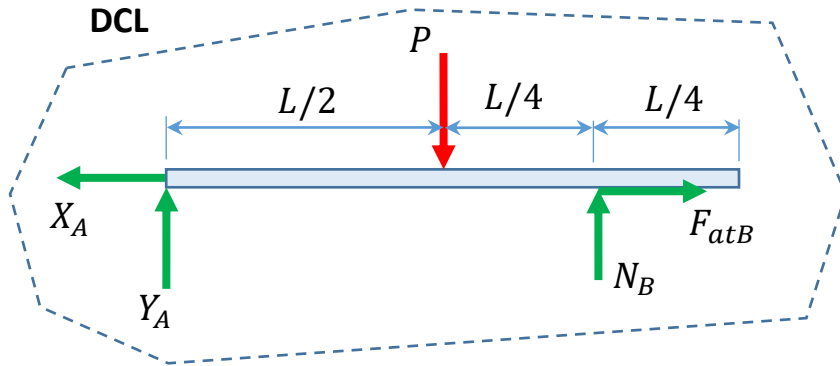
## Exercício 2

A barra de peso  $P$  apoia-se sobre o cilindro também de mesmo peso  $P$ . Pede-se determinar a máxima força  $F$  que pode ser aplicada no cilindro compatível com o equilíbrio estático. O coeficiente de atrito em ambos os contatos é  $\mu$ .





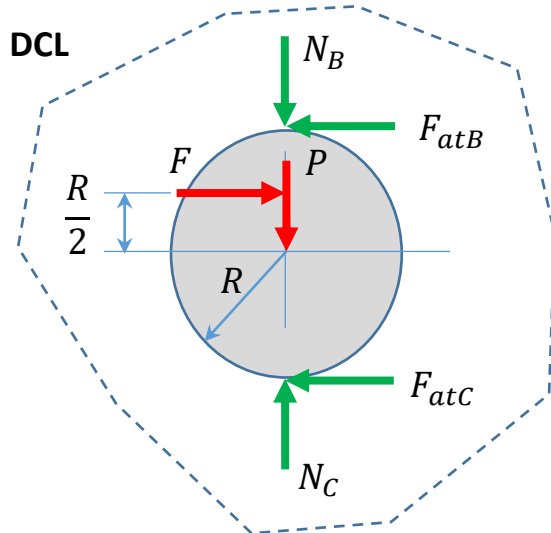
## Exercício 2



$$\sum F_x = 0 \therefore -X_A + F_{atB} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + N_B - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore N_B \cdot \frac{3L}{4} - P \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad (3)$$



$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{atB} - F_{atC} + F = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore N_C - N_B - P = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore F_{atB} \cdot 2R - F \cdot \frac{3R}{2} = 0 \quad (6)$$



## Exercício 2

$$\sum F_x = 0 \therefore -X_A + F_{atB} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + N_B - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore N_B \cdot \frac{3L}{4} - P \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{atB} - F_{atC} + F = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore N_C - N_B - P = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore F_{atB} \cdot 2R - F \cdot \frac{3R}{2} = 0 \quad (6)$$

De (3):

$$N_B = \frac{2P}{3}$$

Em (2):

$$Y_A = \frac{P}{3}$$

Em (5):

$$N_C = \frac{5P}{3}$$

De (6):

$$F_{atB} = \frac{3F}{4}$$

Em (4):

$$F_{atC} = \frac{F}{4}$$

Em (1):

$$X_A = \frac{3F}{4}$$



## Exercício 2

Para não escorregar em B, verificando a Lei de Coulomb no contato em B:

$$F_{atB} \leq \mu N_B$$

$$\frac{3F}{4} \leq \mu \frac{2P}{3} \Rightarrow F \leq \frac{8\mu P}{9}$$

Para não escorregar em C, verificando a Lei de Coulomb no contato em C:

$$F_{atC} \leq \mu N_C$$

$$\frac{F}{4} \leq \mu \frac{5P}{3} \Rightarrow F \leq \frac{20\mu P}{3}$$

O valor limite é o menor dentre estes dois:

$$F_{m\acute{a}x} = \text{mínimo} \left\{ \frac{8\mu P}{9}; \frac{20\mu P}{3} \right\}$$

Assim:

$$F_{m\acute{a}x} = \frac{8\mu P}{9}$$



## Exercício 2

$$X_A = \frac{3F}{4}$$

$$Y_A = \frac{P}{3}$$

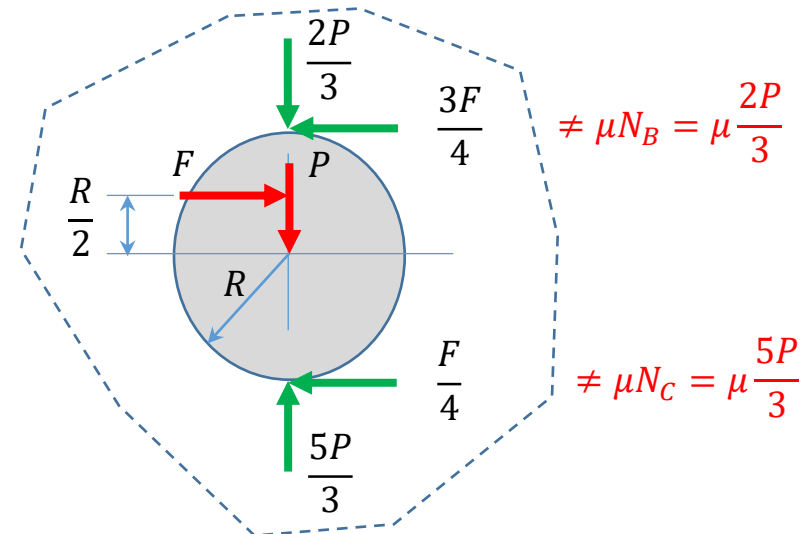
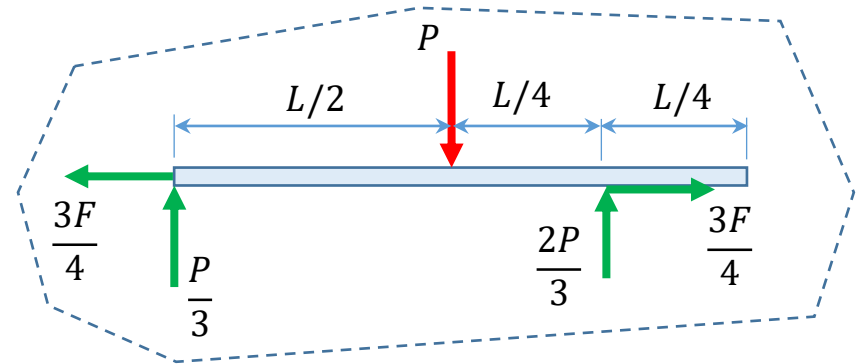
$$N_B = \frac{2P}{3}$$

$$F_{atB} = \frac{3F}{4}$$

$$N_C = \frac{5P}{3}$$

$$F_{atC} = \frac{F}{4}$$

Com:  $F_{m\acute{a}x} = \frac{8\mu P}{9}$



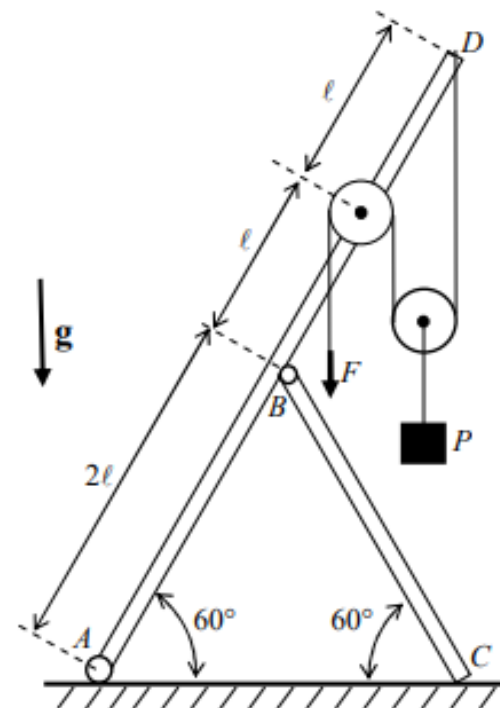




## Exercício 3

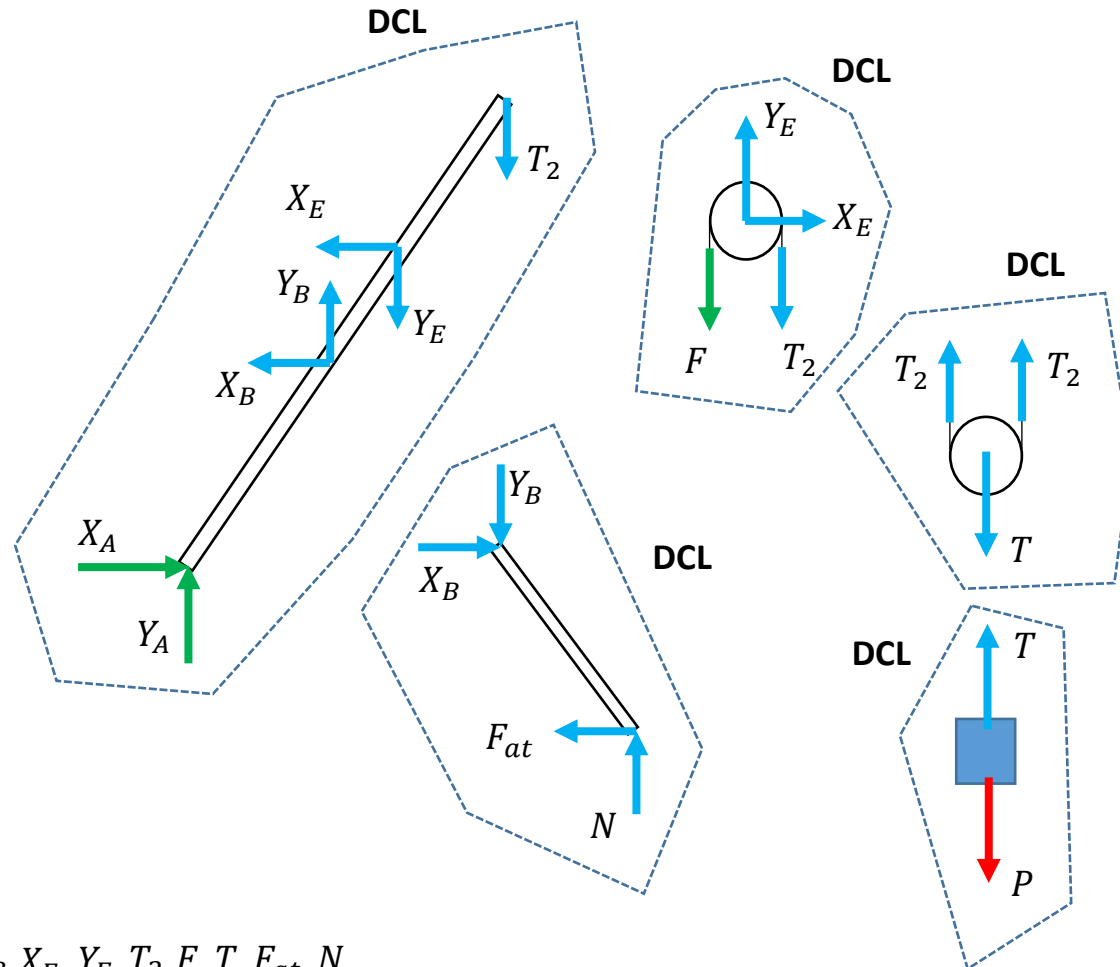
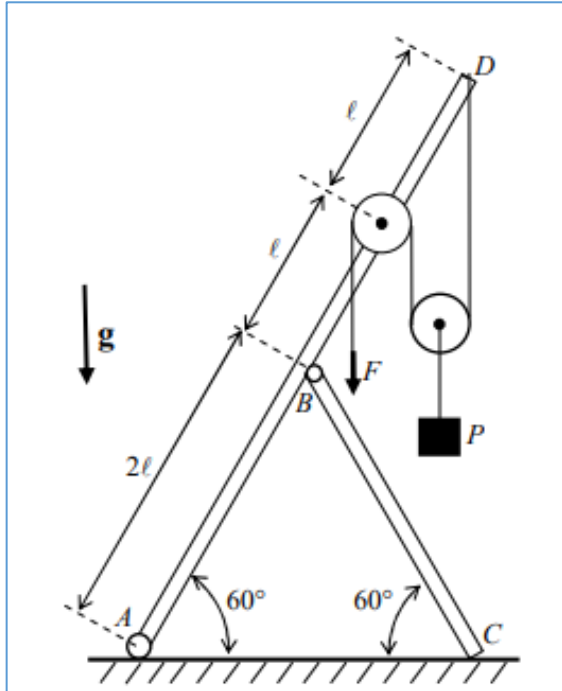
A figura mostra um equipamento de levantamento de cargas composto por duas barras delgadas e um sistema de polias e fios ideais. As massas das barras, das polias e dos fios são desprezíveis. A barra  $BC$  é articulada em  $B$  e a sua extremidade  $C$  está diretamente apoiada sobre o solo. Considere que no contato  $C$  o coeficiente de atrito é  $\mu$ . Pede-se:

- determinar a força  $F$  que deve ser aplicada na extremidade livre do fio para sustentar a carga de peso  $P$ ;
- desenhar os diagramas de corpo livre das barras;
- determinar as reações vinculares na extremidade  $C$  da barra  $BC$ ;
- determinar o valor mínimo de  $\mu$  compatível com o equilíbrio estático da estrutura.





### Exercício 3

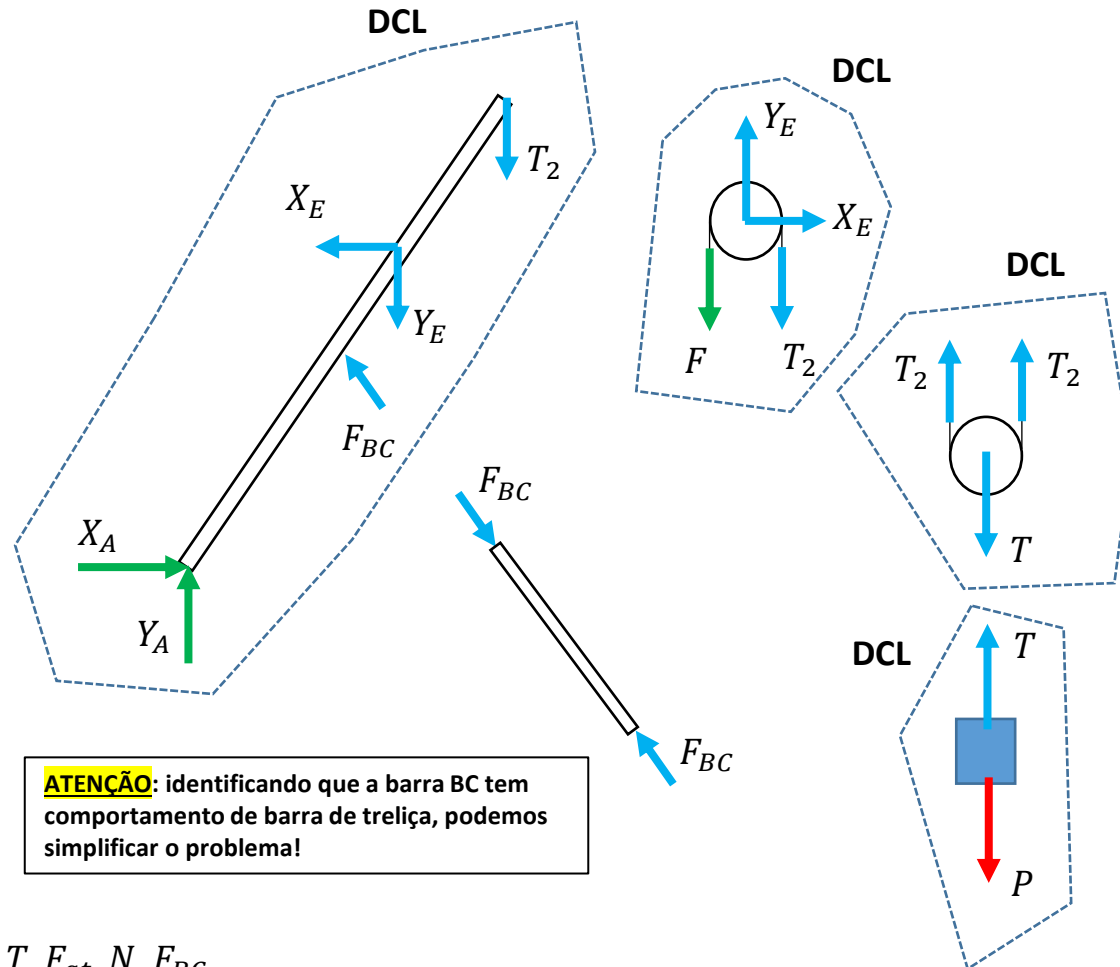
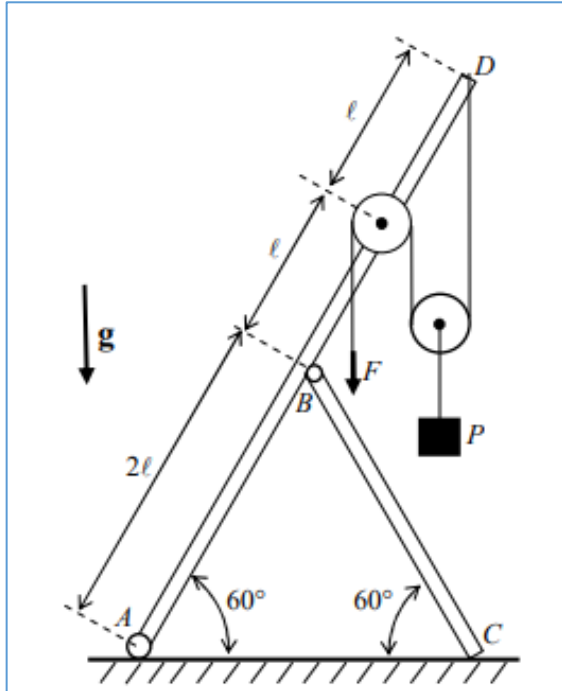


11 incógnitas  $X_A$   $Y_A$   $X_B$   $Y_B$   $X_E$   $Y_E$   $T_2$   $F$   $T$   $F_{at}$   $N$

11 equações (barra ABD 3, barra BC 3, polia centro E 3, outra polia 1, massa suspensa 1)



# Exercício 3 (resolução alternativa para o DCL da barra BC)



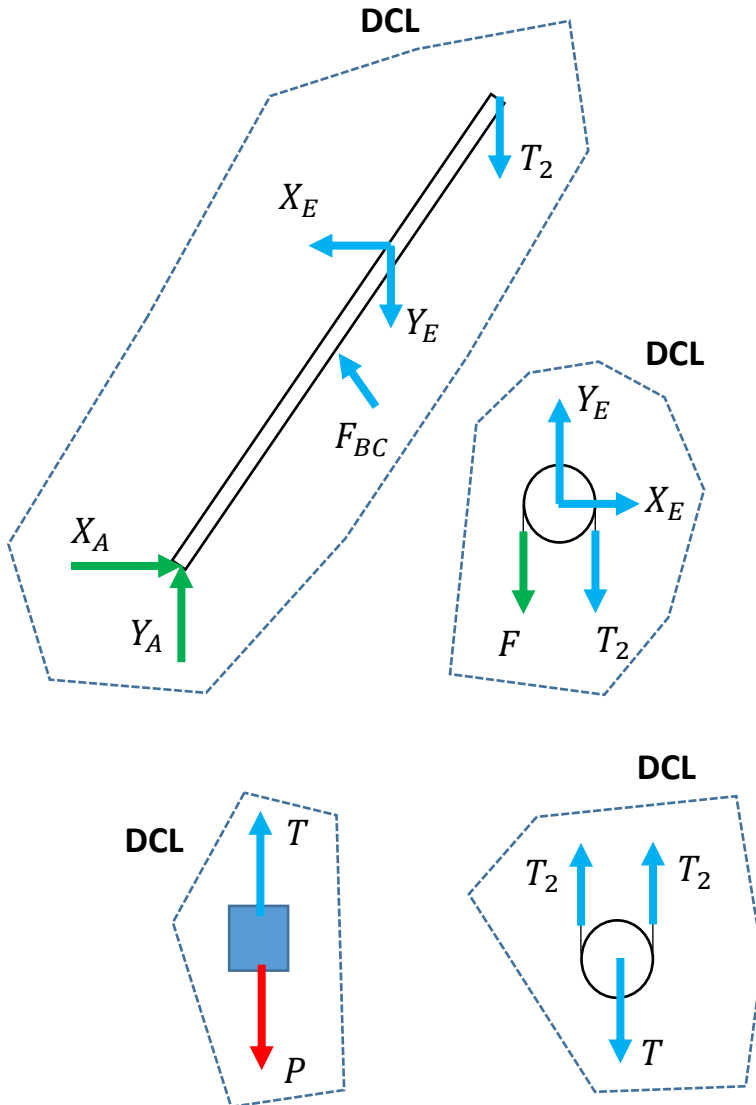
**ATENÇÃO:** identificando que a barra BC tem comportamento de barra de treliça, podemos simplificar o problema!

8 incógnitas  $X_A$   $Y_A$   $T_2$   $F$   $T$   $F_{at}$   $N$   $F_{BC}$

8 equações (barra ABD 3, polia centro E 3, outra polia 1, massa suspensa 1)



### Exercício 3



Equilíbrio da carga suspensa:

$$\sum F_y = 0 \therefore T - P = 0 \Rightarrow T = P$$

Equilíbrio da polia mais baixa:

$$\sum F_y = 0 \therefore 2T_2 - T = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{P}{2}$$

Equilíbrio da outra polia:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_E = 0 \Rightarrow X_E = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_E - F - T_2 = 0$$

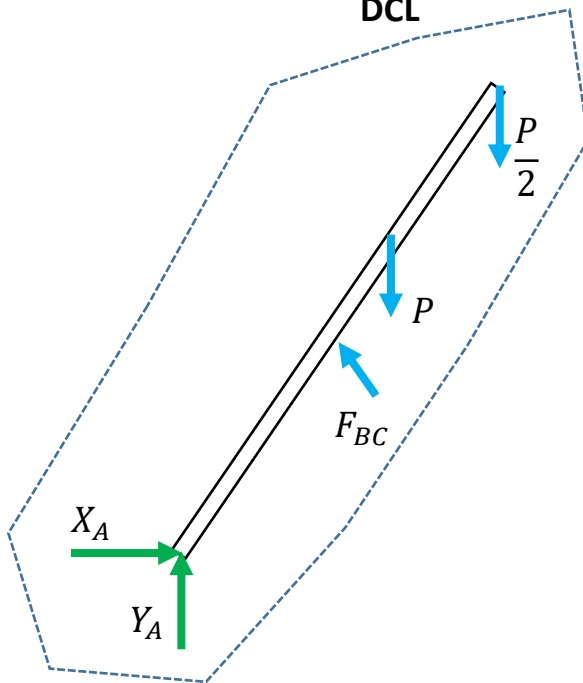
$$\sum M_{zE} = 0 \therefore F \cdot R - T_2 \cdot R = 0 \Rightarrow F = T_2 = \frac{P}{2}$$

$$Y_E = P$$



### Exercício 3

DCL



$$X_E = 0$$

$$Y_E = P$$

$$T_2 = \frac{P}{2}$$

Equilíbrio da barra:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - F_{BC} \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A - P - \frac{P}{2} + F_{BC} \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{ZA} = 0 \therefore F_{BC} \sin 60^\circ \cdot 2L \cos 60^\circ + F_{BC} \cos 60^\circ \cdot 2L \sin 60^\circ - P \cdot 3L \cos 60^\circ - \frac{P}{2} \cdot 4L \cos 60^\circ = 0 \quad (3)$$

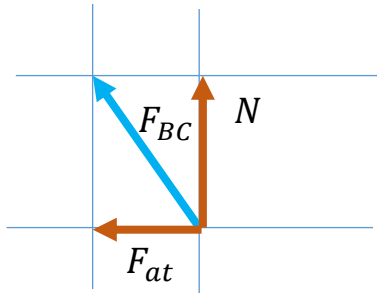
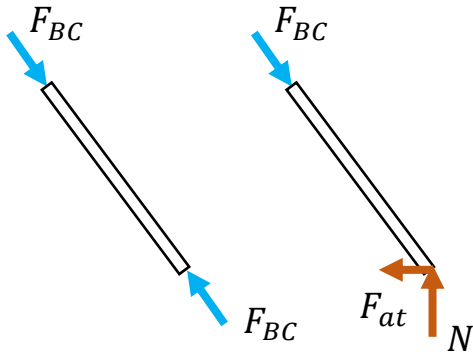
De (3):

$$F_{BC} = \frac{5\sqrt{3}}{6} P$$

(C) compressão



### Exercício 3



A componente vertical da força na barra é a força normal no contato e a componente horizontal é a força de atrito, assim:

$$N = F_{BC} \text{sen}60^{\circ} \Rightarrow N = \frac{5P}{4}$$

$$F_{at} = F_{BC} \text{cos}60^{\circ} \Rightarrow F_{at} = \frac{5\sqrt{3}}{12} P$$

Para não escorregar em C, verificando a Lei de Coulomb no contato em C:

$$F_{atC} \leq \mu N_C$$

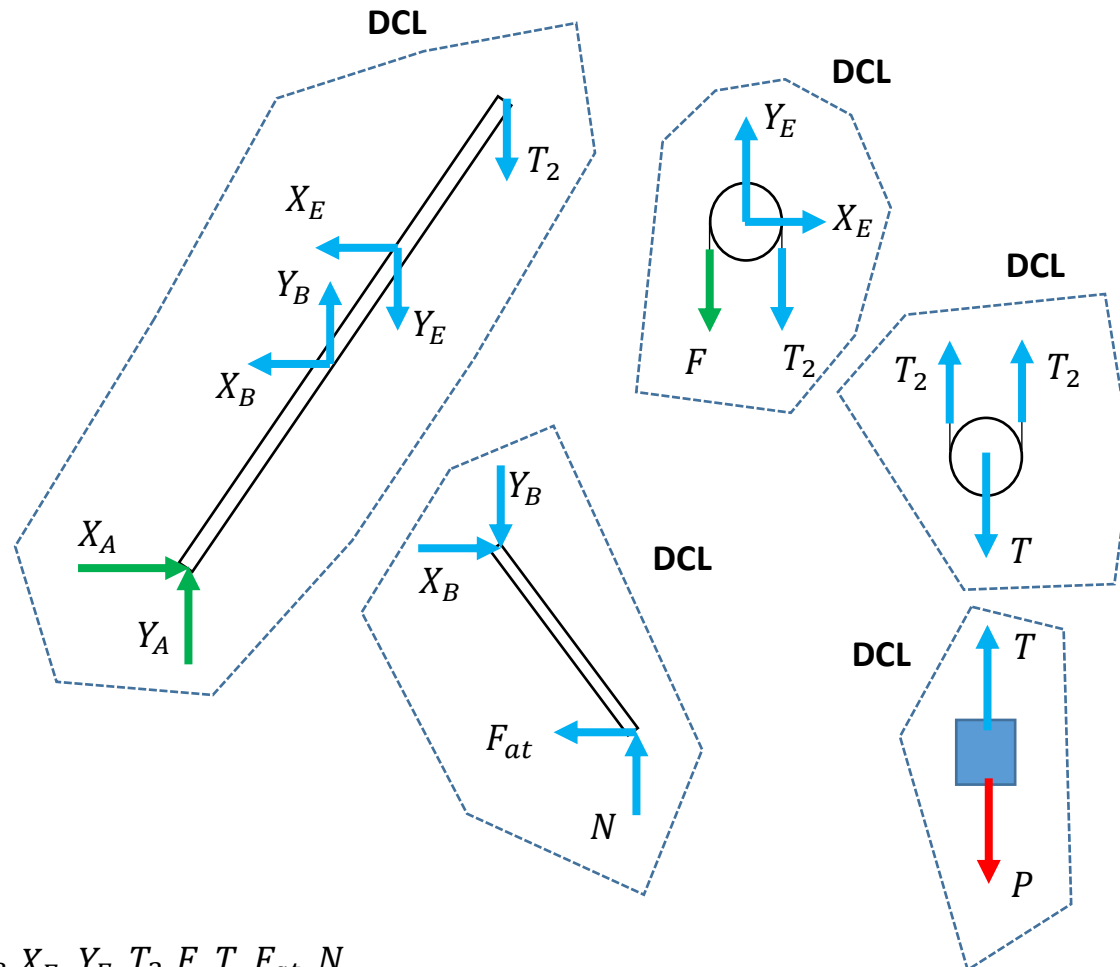
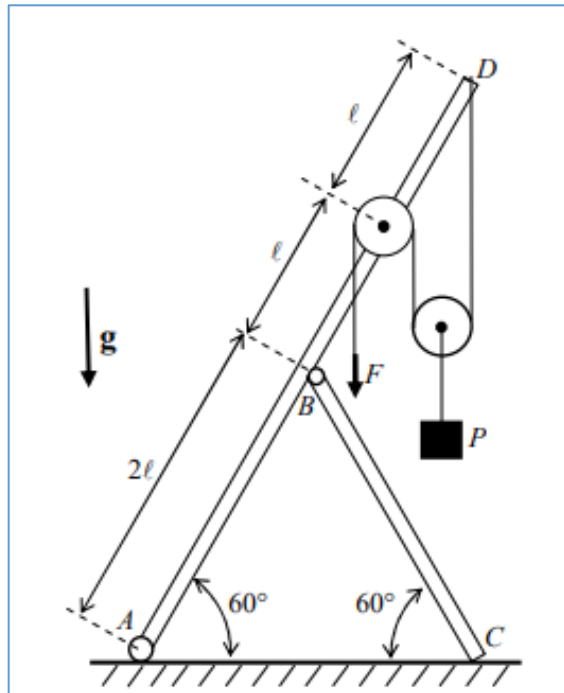
$$\frac{5\sqrt{3}}{12} P \leq \mu \frac{5P}{4}$$

$$\mu \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$



### Exercício 3

Sugestão: Resolva considerando este DCL para a barra BC!

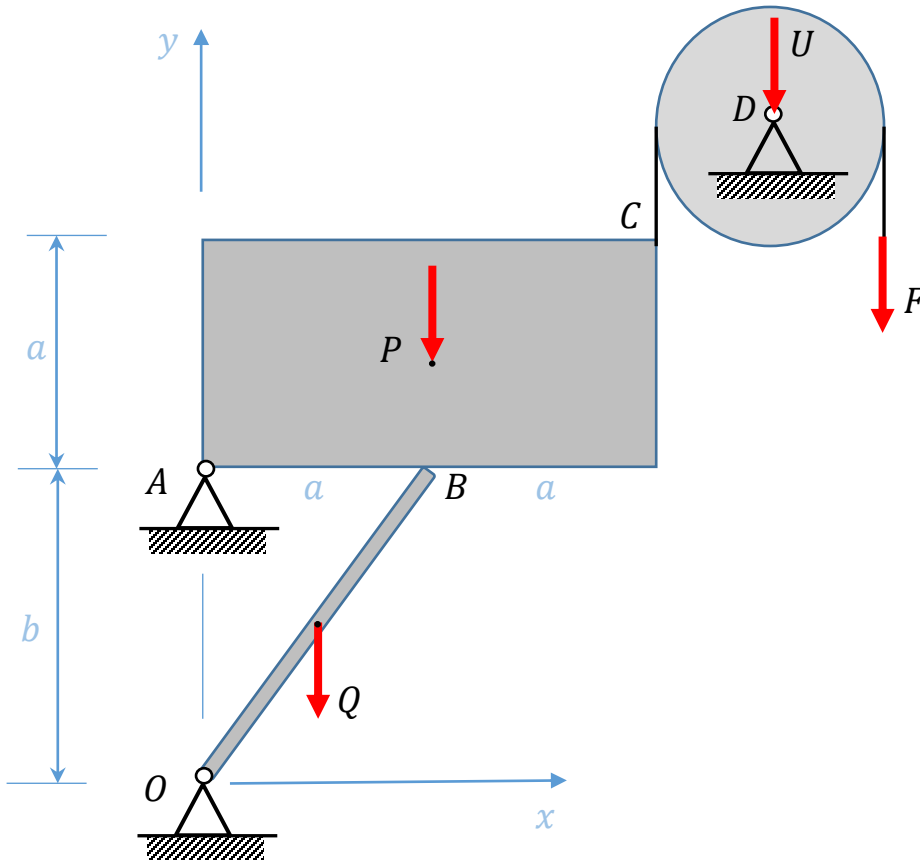


11 incógnitas  $X_A$   $Y_A$   $X_B$   $Y_B$   $X_E$   $Y_E$   $T_2$   $F$   $T$   $F_{at}$   $N$

11 equações (barra ABD 3, barra BC 3, polia centro E 3, outra polia 1, massa suspensa 1)



## Exercício 4



Considere o sistema ilustrado, em equilíbrio estático. Seja a placa articulada em A, apoiada com atrito pela barra em B e suspensa pelo fio ideal em C. Pesos dos componentes conforme indicado.

**Pede-se:**  
Diagrama de corpo livre da estrutura explodida.  
Equações de equilíbrio para cada parte.  
Reações em D.  
Tração no fio.  
Reações em O.  
Reações no contato.  
Reações em A.  
Mínimo valor do coeficiente de atrito compatível com o equilíbrio.

**Valores numéricos:**

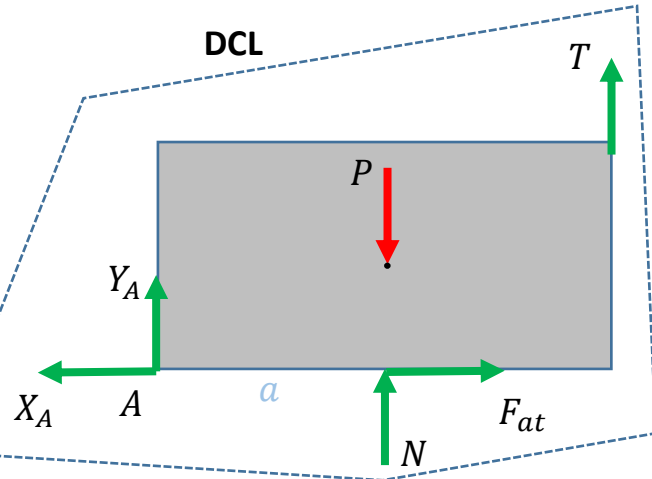
$$\begin{aligned} P_{potia} &= U = 20 \text{ [N]} \\ F &= 300 \text{ [N]} \quad P_{placa} = P = 1000 \text{ [N]} \\ P_{barra} &= Q = 40 \text{ [N]} \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &= 3 \text{ [m]} \\ b &= 4 \text{ [m]} \end{aligned}$$



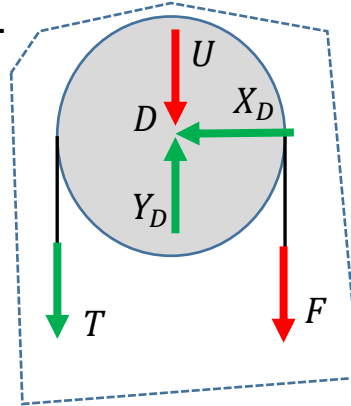


## Exercício 4

DCL



DCL



Equações de equilíbrio na polia:

$$\sum F_x = 0 \therefore -X_D = 0 \Rightarrow X_D = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_D - U - F - T = 0$$

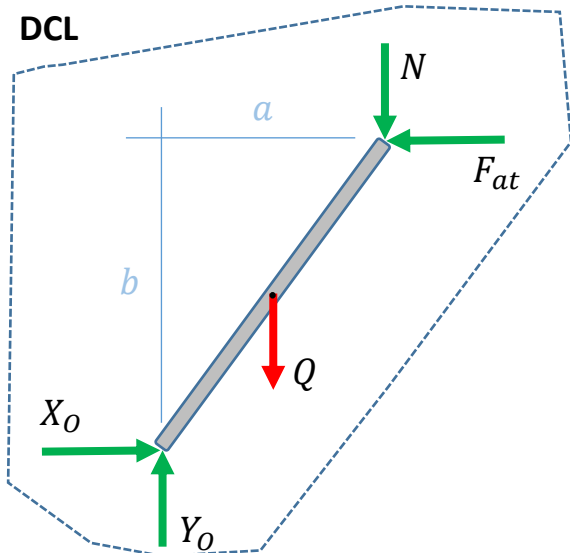
$$\sum M_{zD} = 0 \therefore T \cdot R - F \cdot R = 0 \Rightarrow T = F$$

$$T = 300 \text{ [N]}$$

$$Y_D = U + 2F$$

$$Y_D = 620 \text{ [N]}$$

DCL



Equações de equilíbrio na placa:

$$\sum F_x = 0 \therefore -X_A + F_{at} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + N - P + F = 0$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore F \cdot 2a - P \cdot a + N \cdot a = 0$$

Equações de equilíbrio na barra:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_O - F_{at} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_O - Q - N = 0$$

$$\sum M_{zO} = 0 \therefore F_{at} \cdot b - N \cdot a - Q \cdot \frac{a}{2} = 0$$



## Exercício 4

Equações de equilíbrio na placa:

$$\sum F_x = 0 \therefore -X_A + F_{at} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + N - P + F = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore F \cdot 2a - P \cdot a + N \cdot a = 0 \quad (3)$$

Equações de equilíbrio na barra:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_O - F_{at} = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_O - Q - N = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{zO} = 0 \therefore F_{at} \cdot b - N \cdot a - Q \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad (6)$$

De (1) e (4):  $X_A = X_O = F_{at}$

De (3):  $N = P - 2F$   $N = 400 \text{ [N]}$

De (2):  $Y_A = P - F - N$   $Y_A = 300 \text{ [N]}$

De (5):  $Y_O = Q + P - 2F$   $Y_O = 440 \text{ [N]}$

De (6):  $F_{at} = \frac{a}{b} \left( P + \frac{Q}{2} - 2F \right)$   $F_{at} = 315 \text{ [N]}$

De (4):  $X_O = \frac{a}{b} \left( P + \frac{Q}{2} - 2F \right)$   $X_O = 315 \text{ [N]}$

$X_A = \frac{a}{b} \left( P + \frac{Q}{2} - 2F \right)$   $X_A = 315 \text{ [N]}$

Com sinal negativo  
para a resposta no  
e-disciplinas!



## Exercício 4

Verificando o escorregamento, Lei de Coulomb no contato:

$$F_{at} \leq \mu N$$

$$\frac{a}{b} \left( P + \frac{Q}{2} - 2F \right) \leq \mu (P - 2F)$$

$$\mu \geq \frac{\frac{a}{b} \left( P + \frac{Q}{2} - 2F \right)}{(P - 2F)}$$

$$\mu \geq 0,79$$

$$N = P - 2F$$

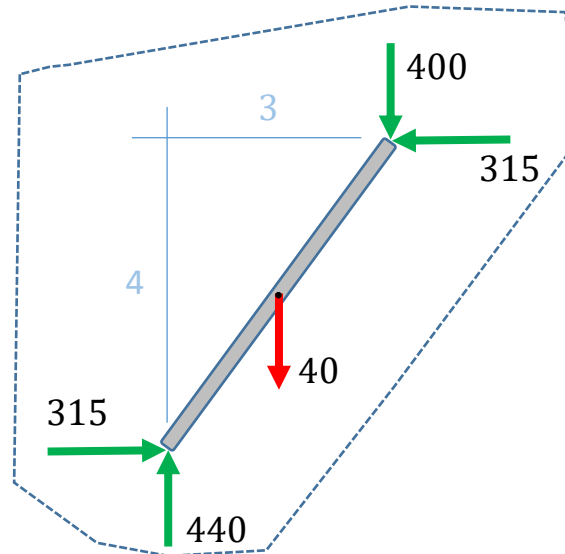
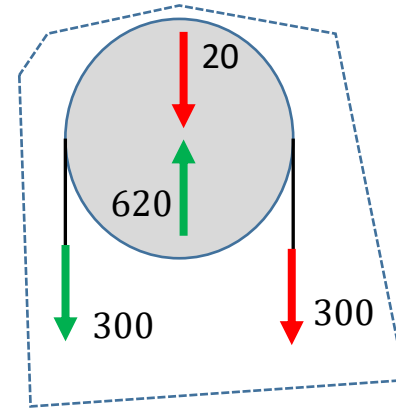
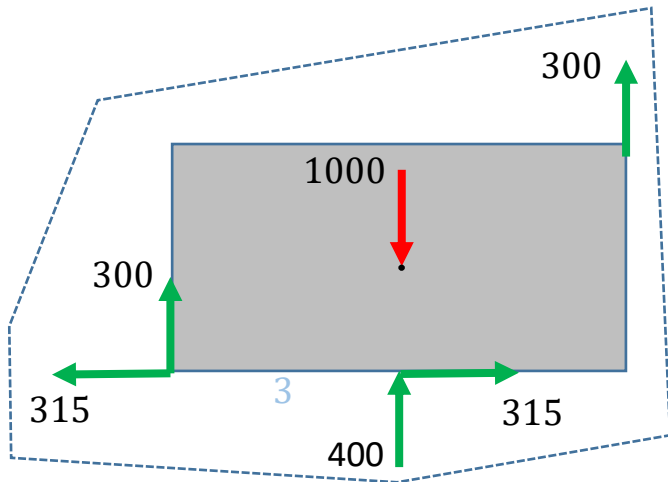
$$N = 400 \text{ [N]}$$

$$F_{at} = \frac{a}{b} \left( P + \frac{Q}{2} - 2F \right)$$

$$F_{at} = 315 \text{ [N]}$$



## Exercício 4





Duvidem  
Pensem  
Comuniquem  
 Perguntem  
Cometam erros  
Aprendam dos seus erros  
... e mais importante,  
Tenham alegria em aprender.

Estupidez:  
Você pensa que sabe tudo, sem questionar.

Inteligência:  
Você questiona tudo que você pensa que sabe.

Aproveite cada minuto,  
porque o tempo não volta...  
O que volta é a vontade de voltar no tempo.