ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1
Hidrostática
Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

Simbologia

$p \quad pressão\ hidrostática$

$\gamma \quad peso\ específico$

$\rho \quad massa\ específica$

$h \quad profundidade$

$\vec{n} \quad versor\ normal\ à\ superficie$

$\vec{F}_H\ força\ hidrostática$

$V \quad volume\ imaginário\ de\ pressão$

$S \quad superfície\ sobre\ a\ qual\ quer\ se\ calcular\ a\ resultante\ de\ forças\ hidrostáticas$

$W \quad peso\ do\ volume\ de\ líquido$

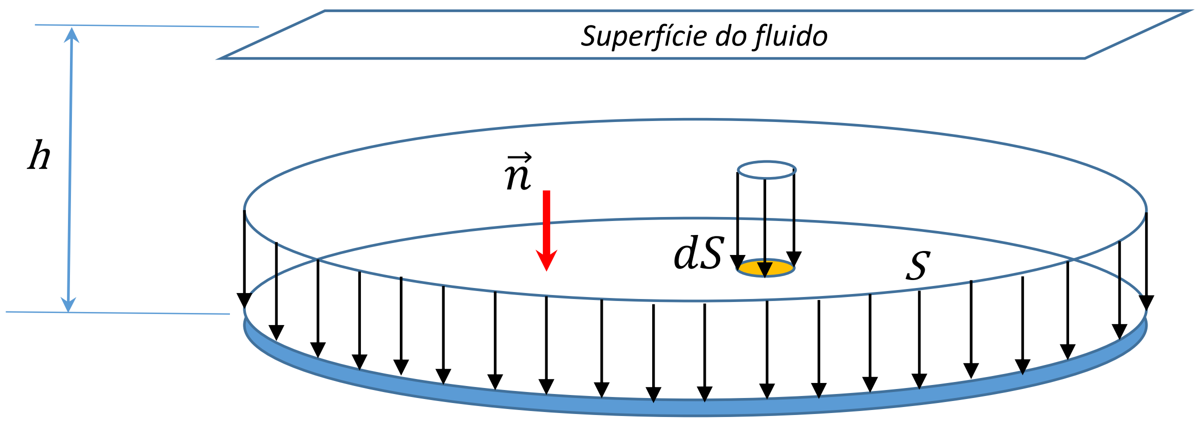
$L \quad largura\ da\ barragem$

Forças Hidrostáticas sobre superfície plana

Hipóteses:

Pressão hidrostática atuando sobre superfície plana.
Sistemas de forças paralelas normais à superfície.
Pressão é linearmente proporcional à profundidade ➔ $p = \gamma h = \rho g h$

A resultante de força hidrostática atuando sobre a superfície será: $\vec{F}_H = \int_S p\vec{n}dS = \gamma \int_S h\vec{n}dS$



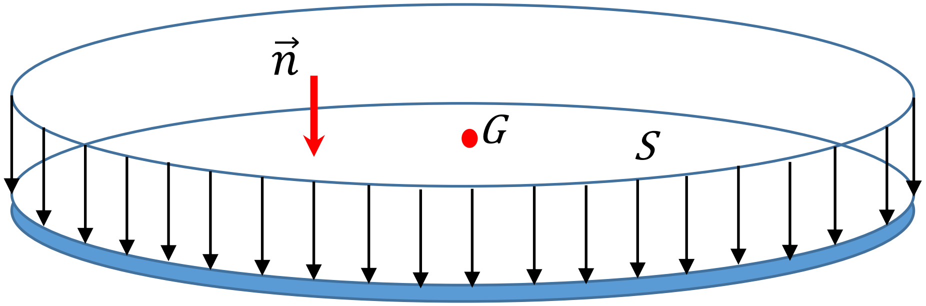
$$V = \int_S pdS$$

O módulo da força hidrostática resultante sobre a superfície pode ser calculado pelo volume de pressões imaginário cuja base é a própria superfície e a altura é a pressão hidrostática atuante em cada ponto:

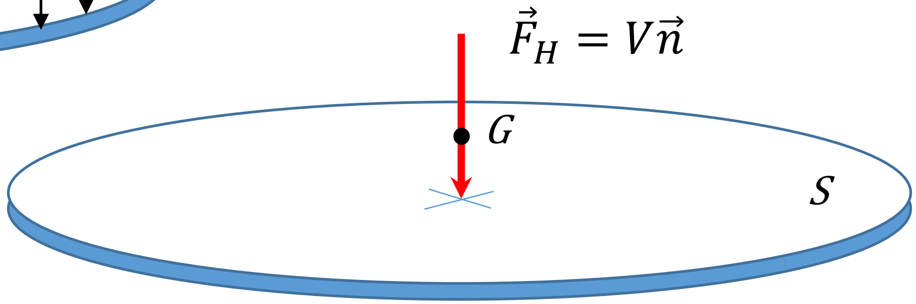
$$\vec{F}_H = V\vec{n}$$

Forças Hidrostáticas sobre superfície plana

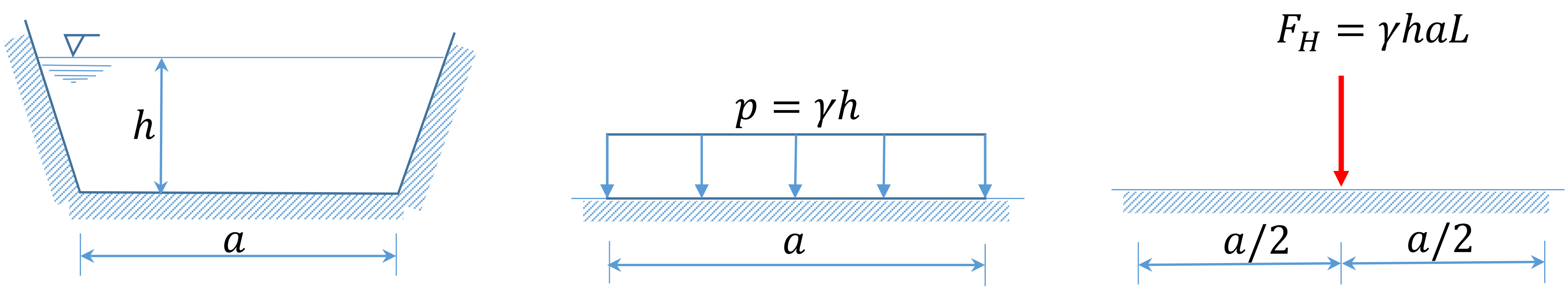
O sistema de forças distribuídas paralelas é equivalente a uma única força aplicada no centro de forças paralelas, chamado centro de pressão, que por sua vez é a projeção do baricentro do volume imaginário de pressões sobre a superfície em questão:

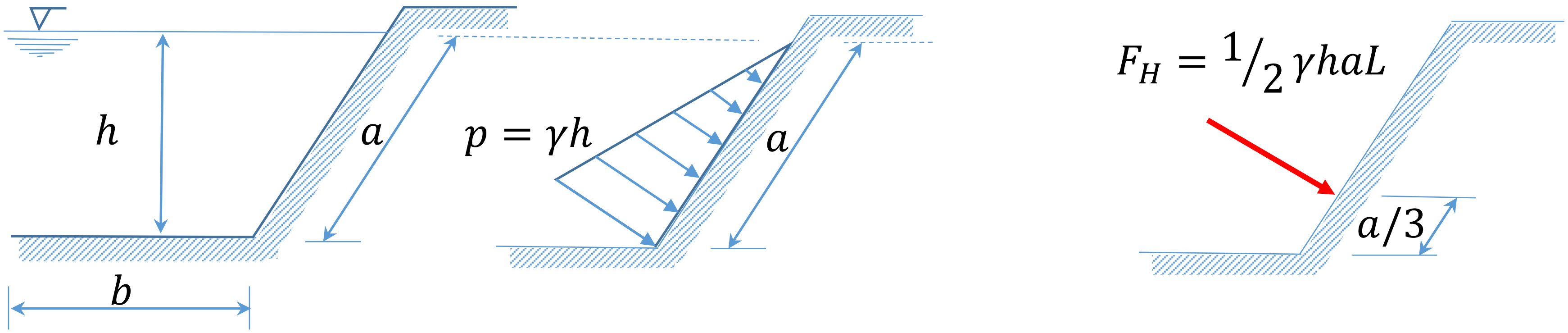


$\equiv$

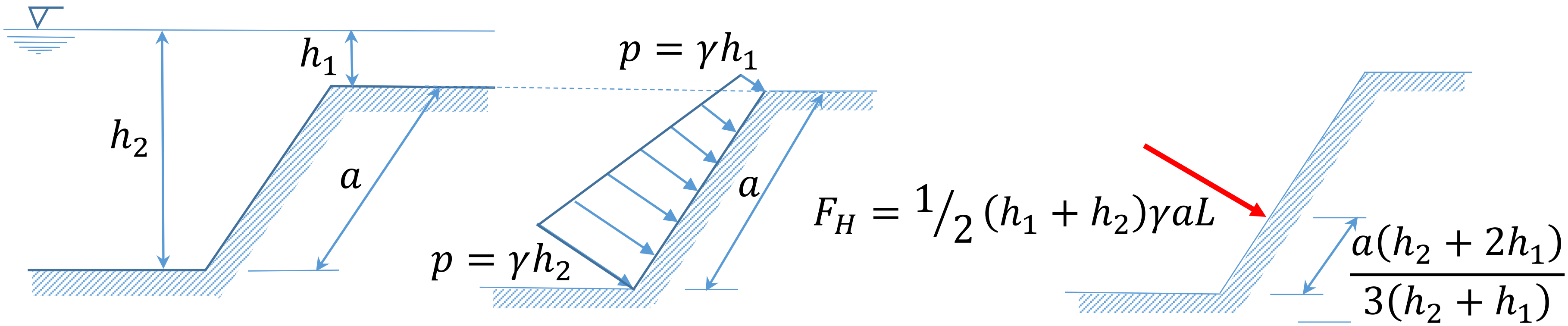


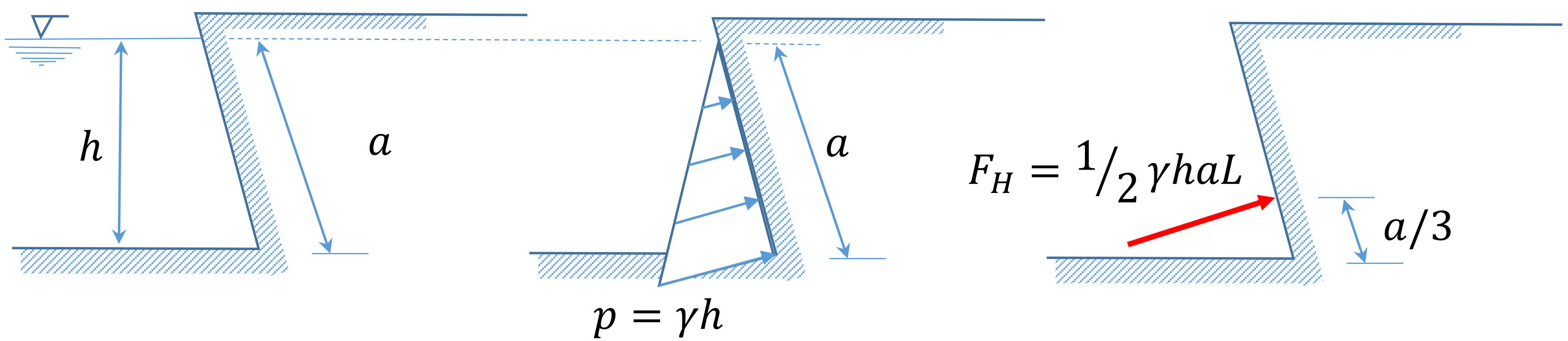
Forças Hidrostáticas sobre superfície plana





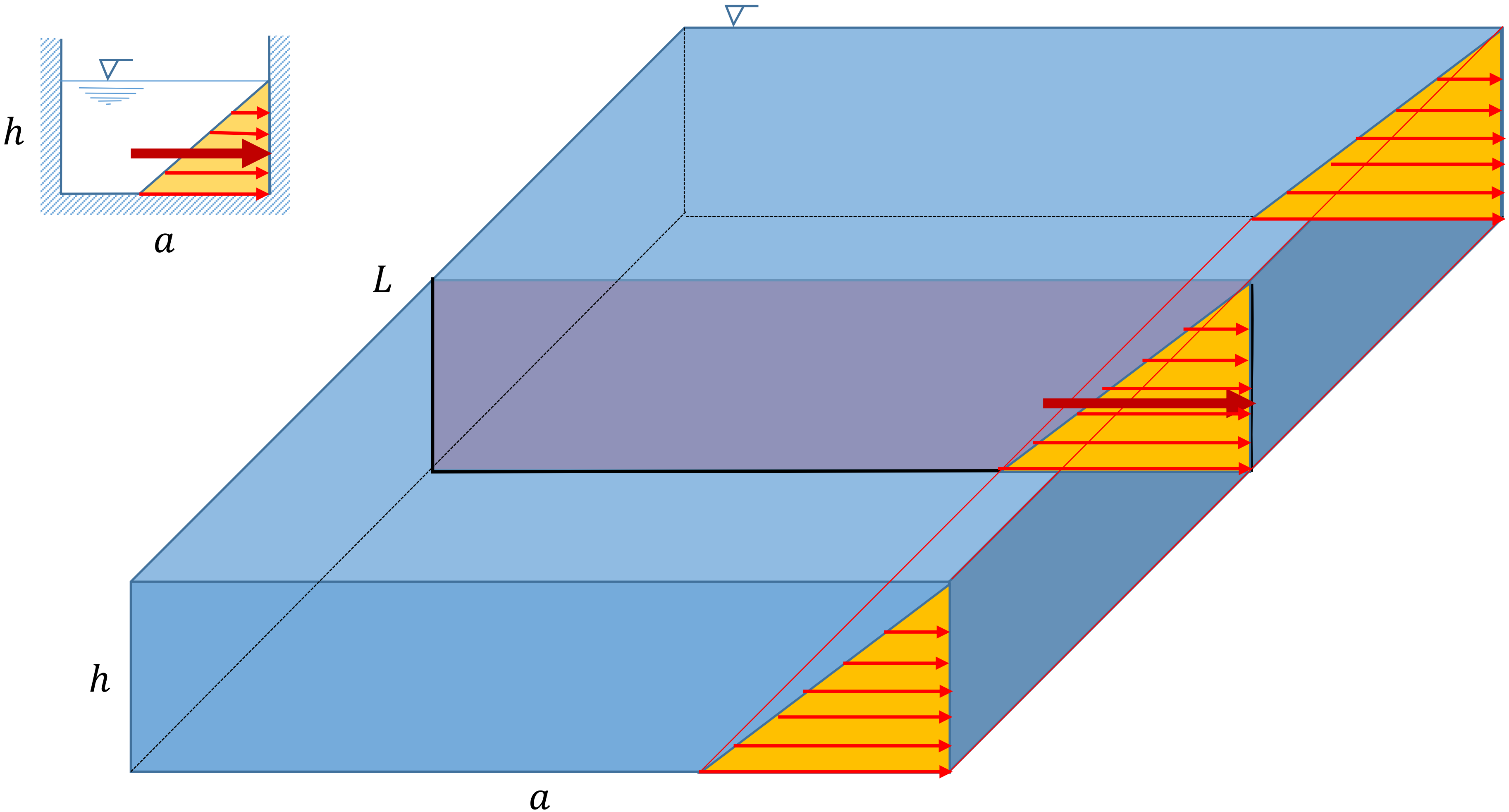
Forças Hidrostáticas sobre superfície plana





Forças Hidrostáticas sobre superfície plana

Os diagramas nas páginas anteriores estão visualizando um plano central de simetria em relação a uma largura L**, como ilustrado aqui:**



Exercício 1

A figura mostra a seção transversal de um reservatório, de largura L (ortogonal ao plano da figura) que armazena um fluido ideal de densidade ρ [kg/m³]. A comporta de peso desprezível é articulada em O e apoiada sem atrito em A. O contrapeso de massa m em B controla a altura máxima H de líquido.

Pede-se:

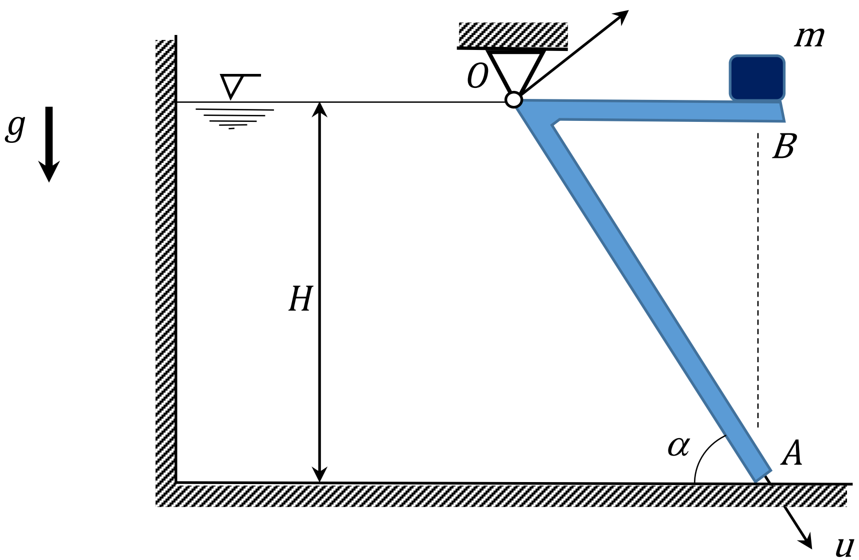
a) **o diagrama de forças hidrostáticas sobre a comporta;**

b) **a força resultante F_H do sistema de força hidrostáticas;**

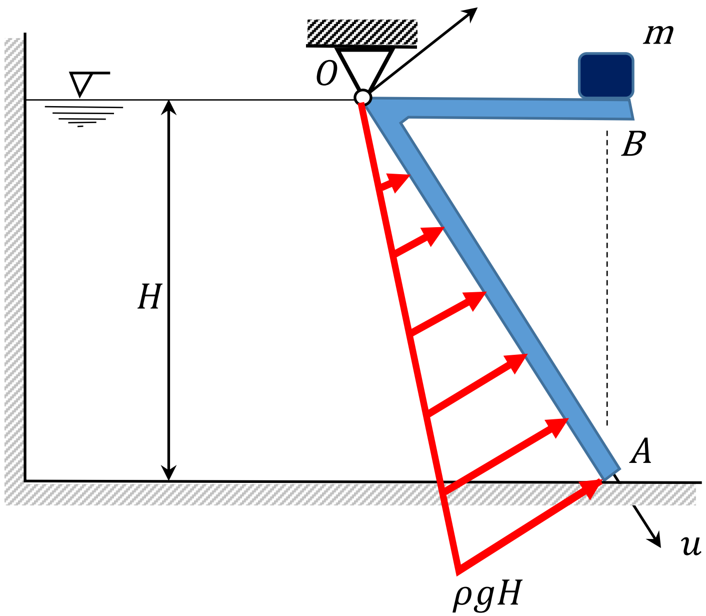
c) **a coordenada u_C que define a posição do centro de pressão na comporta;**

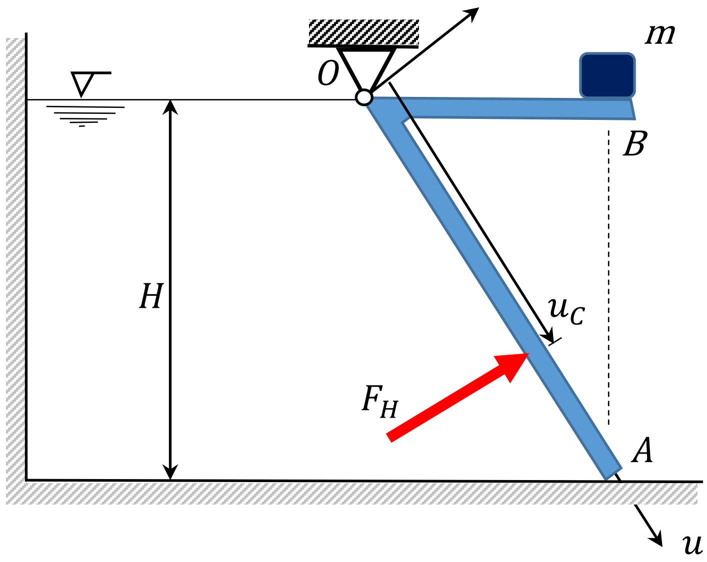
d) **o DCL da comporta;**

e) **o valor mínimo da massa m do contrapeso que mantém a comporta em equilíbrio estático.**



Exercício 1 (continuação)



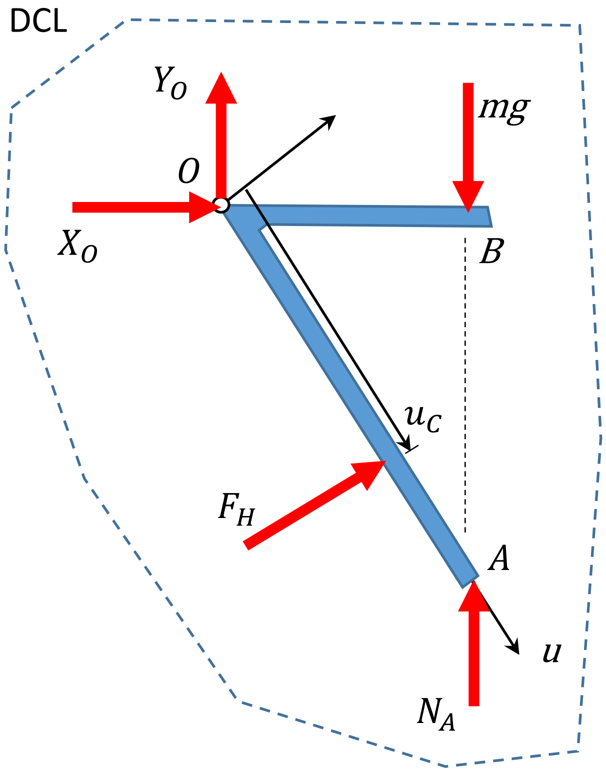


$$F_H = \frac{1}{2}\rho g H \cdot \frac{H}{sen\alpha} \cdot L$$

$$\boxed{F_H = \frac{\rho g H^2 L}{2 sen\alpha}}$$

$$\boxed{u_C = \frac{2}{3}\frac{H}{sen\alpha}}$$

Exercício 1 (continuação)



$$\sum F_x = 0 \therefore X_O + F_H sen\alpha = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_O + N_A + F_H cos\alpha - mg = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum M_{zO} = 0 \therefore N_A \frac{H}{tan\alpha} + F_H \frac{2H}{3sen\alpha} - mg \frac{H}{tan\alpha} = 0 \quad \textbf{(3)}$$

Na condição limite proposta pelo enunciado do problema, temos o valor mínimo do contrapeso, para a máxima altura de líquido H, correspondendo a condição em que o contato em A estaria na iminência de abrir. Para que ele não abra deve-se ter $N_A \geq 0$.

Assim, de (3):

$$N_A = mg - \frac{2F_H}{3\cos\alpha} = mg - \frac{\rho g H^2 L}{3\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha} \geq 0$$

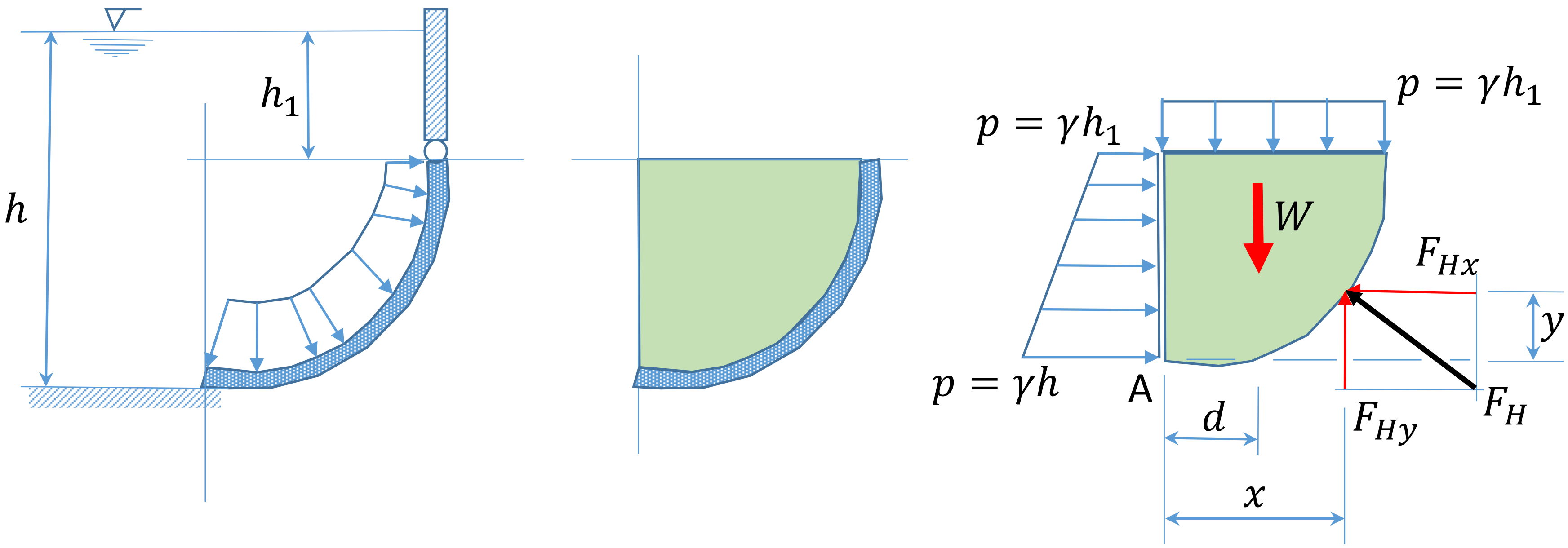
$$\boxed{F_H = \frac{\rho g H^2 L}{2sen\alpha}}$$

$$\boxed{u_C = \frac{2}{3}\frac{H}{sen\alpha}}$$

$$\boxed{m = \frac{\rho H^2 L}{3sen\alpha cos\alpha}}$$

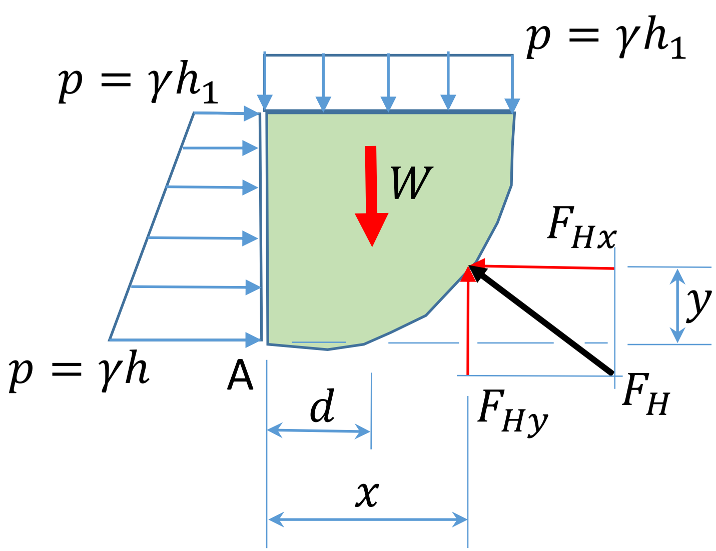
Forças Hidrostáticas sobre superfície curvas

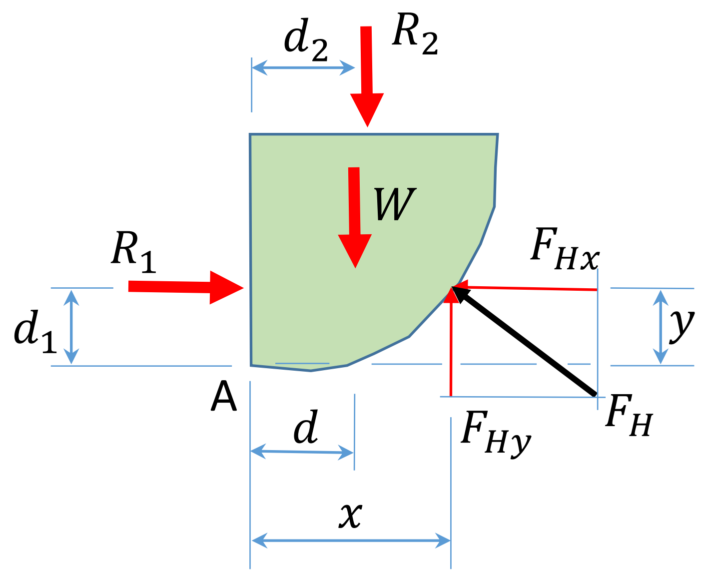
Para superfícies curvas um método simples de se calcular a resultante de forças hidrostáticas é estudar o equilíbrio de um volume de líquido limitado pela superfície dada e por planos verticais e horizontais convenientes.



Salientando que aqui F_h é a força resultante que a parede exerce sobre o líquido, assim para a ação do líquido sobre a parede depois simplesmente bastará inverter o sentido.
Salientando também que a geometria da parede é supostamente conhecida, assim determinando-se uma das coordenadas, x ou y, a outra estará determinada pela equação da parede.

Forças Hidrostáticas sobre superfície curvas



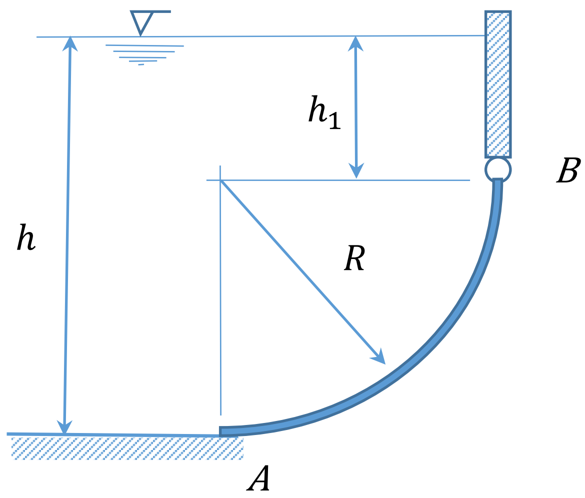


$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 & \therefore \quad -F_{Hx} + R_1 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \therefore \quad F_{Hy} - R_2 - W = 0 \\ \Sigma M_{zA} = 0 & \therefore \quad R_1 d_1 + R_2 d_2 + W d - F_{Hy} x - F_{Hx} y = 0 \end{cases}$$

Com R_1, R_2, d_1, d_2, W, d determinados previamente e conhecida a relação entre x e y da curva da parede, determina-se F_{Hy} e F_{Hx} e uma das coordenadas x ou y , sendo estas as 3 incógnitas das equações de equilíbrio acima.

Exercício 2

Determine a resultante das força hidrostáticas e a posição do centro de força sobre a comporta ilustrada. Determine as reações na articulação em B e no apoio em A.



Resolva numericamente para:

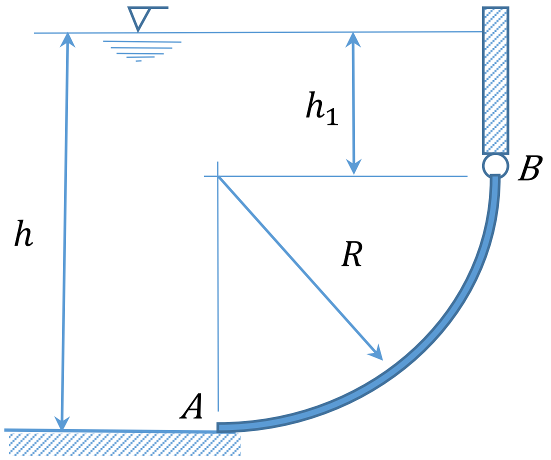
$$R = 2\ [m]$$

$$h_1 = 1\ [m]$$

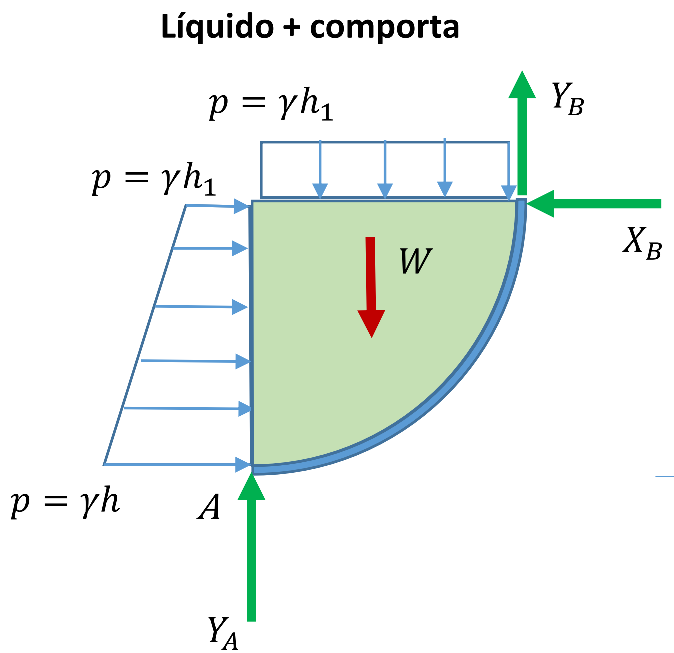
$$h = R + h_1 = 3\ [m]$$

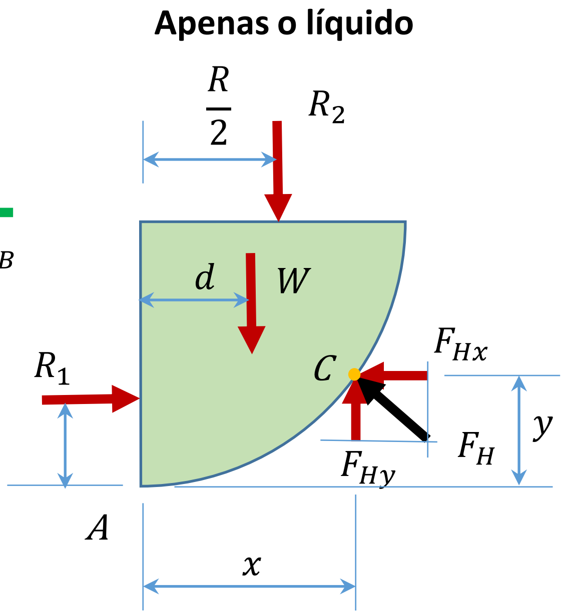
$$\gamma = 10.000\ \left[\frac{N}{m^3}\right]$$

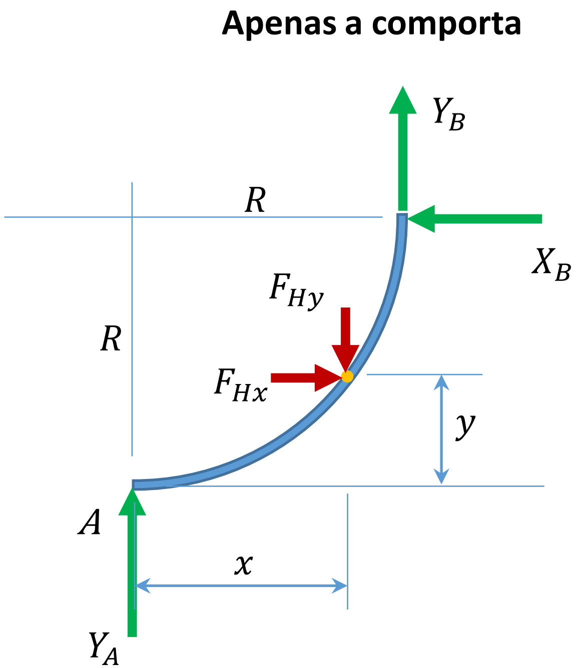
Exercício 2 (continuação)



Diagramas de corpo livre :

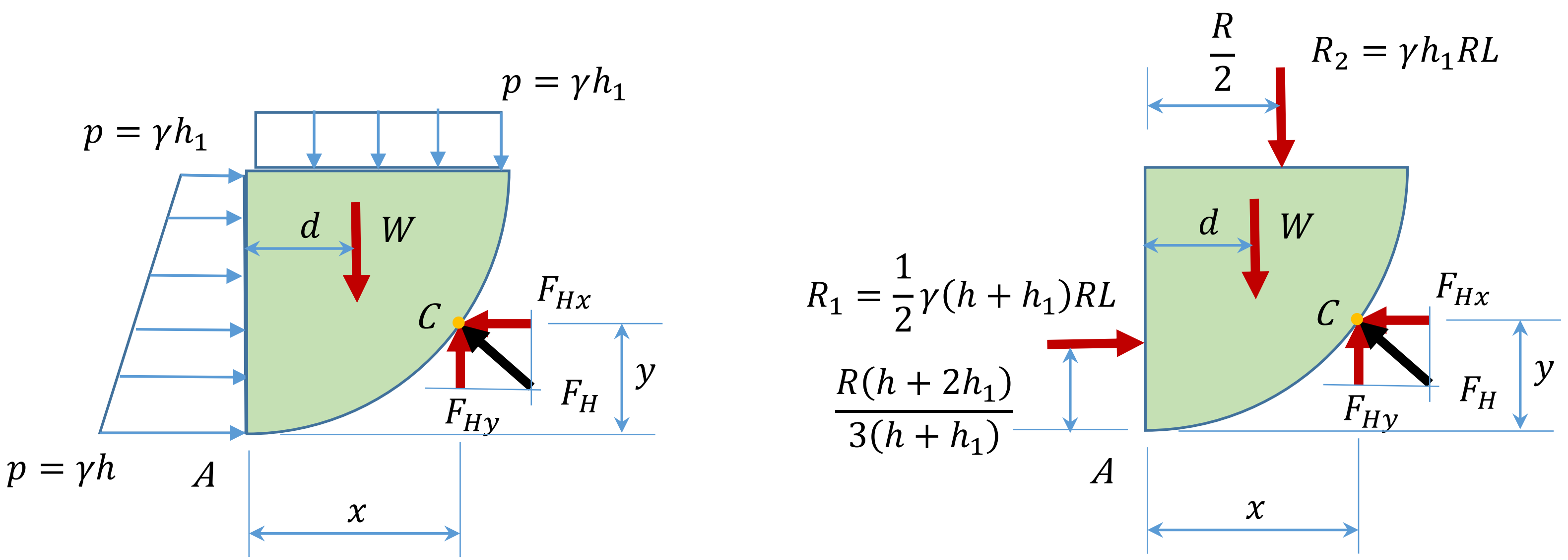






Exercício 2 (continuação)

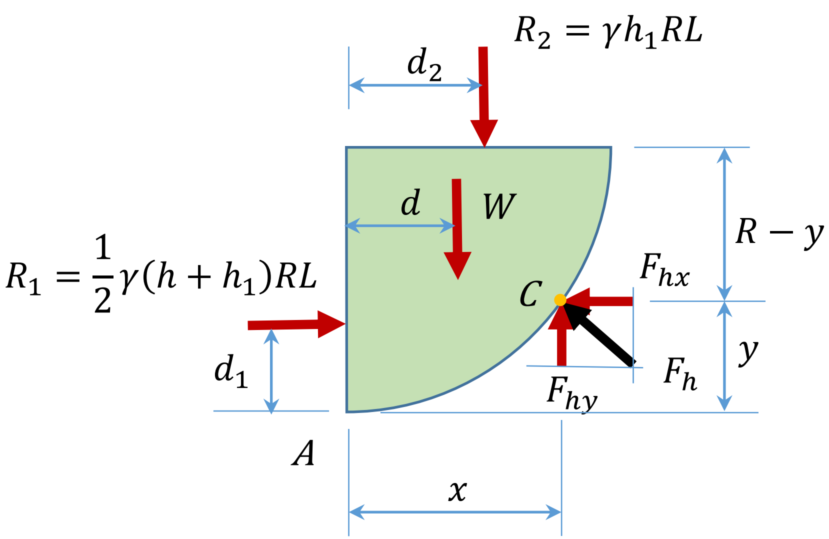
Para determinarmos a resultante de força hidrostática sobre a comporta (F_H) vamos analisar o diagrama de corpo livre apenas do volume de líquido ilustrado.
Desenhando os diagramas de pressões hidrostática e as correspondentes resultantes e centros de forças:



$$W = \gamma \frac{\pi R^2}{4} L \qquad d = \frac{4R}{3\pi}$$

Exercício 2 (continuação)

Fazendo o equilíbrio do volume de líquido:



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 & \therefore \quad -F_{hx} + R_1 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \therefore \quad F_{hy} - R_2 - W = 0 \\ \Sigma M_{zA} = 0 & \therefore \quad R_1 d_1 + R_2 d_2 + W d - F_{hy} x - F_{hx} y = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + (R - y)^2 = R^2$$

$$W = \gamma \frac{\pi R^2}{4} L$$

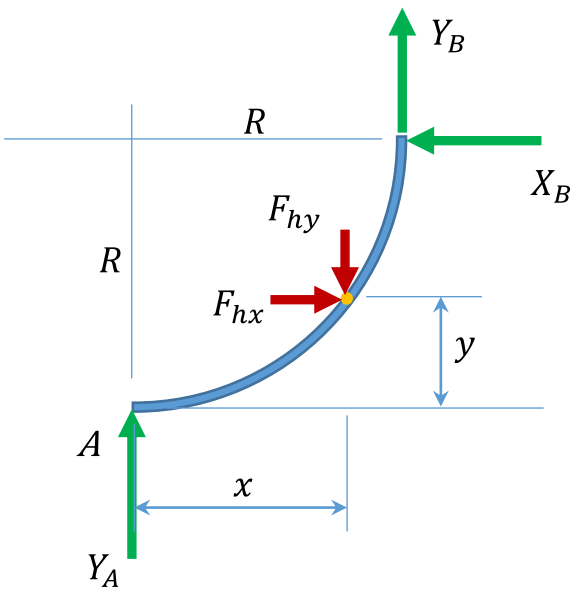
$$d = \frac{4R}{3\pi}$$

$$d_2 = \frac{R}{2}$$

$$d_1 = \frac{R(h + 2h_1)}{3(h + h_1)}$$

Exercício 2 (continuação)

Fazendo o equilíbrio da comporta:



$$\Sigma F_x = 0 \quad \therefore \quad F_{hx} - X_B = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \therefore Y_A + Y_B - F_{hy} = 0$$

$$\Sigma M_{zA} = 0 \quad \therefore \quad X_B.R + Y_B.R - F_{hy}x - F_{hx}y = 0$$