



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1
Estática
Estruturas Isostáticas
Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo



Conteúdo

Simbologia Formulário

Graus de Liberdade de um corpo no espaço

Vínculos (Apoio simples, Articulação, Anel, Engaste)

Diagrama de Corpo Livre (DCL) – Forças ativas e Forças de reação

Equações de Equilíbrio Estático das Estruturas

Problema Plano

Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

Resolução de Estruturas Isostáticas

Treliças – Barra de Treliça

Treliças – Método do Nós

Treliças – Método das Seções

Forças em fios e polias



Simbologia

\vec{F} Força

F_{AB} Força na barra AB

\vec{R} Resultante de um sistema de forças

I Invariante escalar de um sistema de forças

\vec{M}_O Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um pólo O

M_u Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um eixo $O\vec{u}$

G Baricentro

m_i massa do ponto i

M massa total do sistema

\vec{g} aceleração da gravidade (também g tomado como módulo)

V volume

A área

ℓ linha

ρ massa específica



Unidades no SI (Sistema Internacional de Unidades)

\vec{F}	força	[N]	Newton
\vec{M}_O	momento de força	[Nm]	Newton.metro
M_u	momento de força em relação a eixo	[Nm]	Newton.metro
$(P - O)$	vetor posição	[m]	metro
x	coordenada de posição, distância ou deslocamento	[m]	metro
m	massa	[kg]	kilograma



Formulário

$$(\vec{F}, P)$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$

$$(H - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$|\vec{M}_H| = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N M_x \vec{i} + \sum_{i=1}^N M_y \vec{j} + \sum_{i=1}^N M_z \vec{k}$$

$$(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^N h_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^N h_i}$$

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)}{M}$$

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

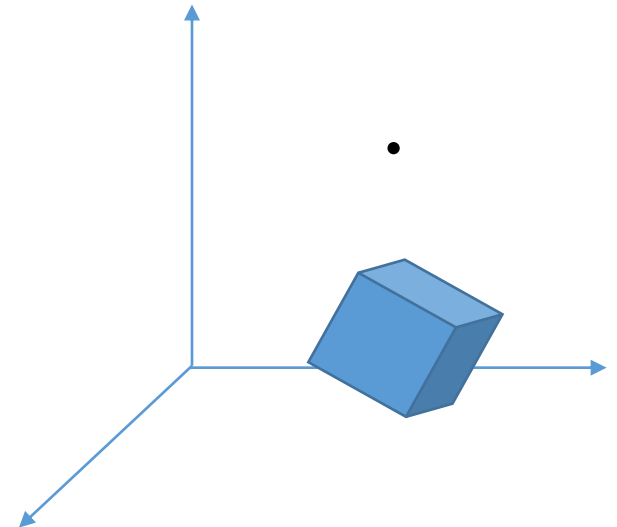
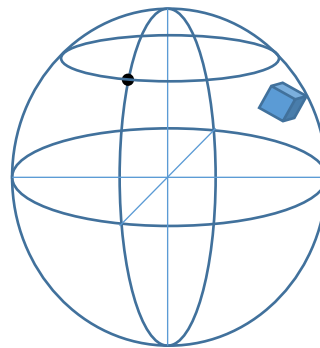
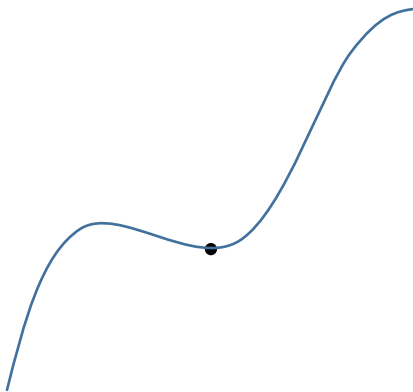


Graus de Liberdade de um Corpo no Espaço

Graus de liberdade de um sistema físico é a quantidade de parâmetros independentes necessários e suficientes para definir o seu estado.

Na Mecânica, entende-se por definir o estado do sistema em dizer a posição espacial que os corpos ocupam em um determinado instante.

- **um ponto sobre uma curva tem apenas 1 grau de liberdade;**
- **um ponto sobre uma superfície bi-dimensional tem 2 graus de liberdade;**
- **um corpo que tenha uma face sempre apoiada sobre uma superfície tem 3 graus de liberdade;**
- **um ponto no espaço tem 3 graus de liberdade;**
- **um corpo no espaço tem 6 graus de liberdade.**





Vínculos

Vínculos são elementos que retiram graus de liberdade do sistema.

Na Mecânica os vínculos irão restringir de alguma forma o movimento do ponto vinculado e irão exercer uma força aplicada neste ponto.

Tipos de Vínculos:

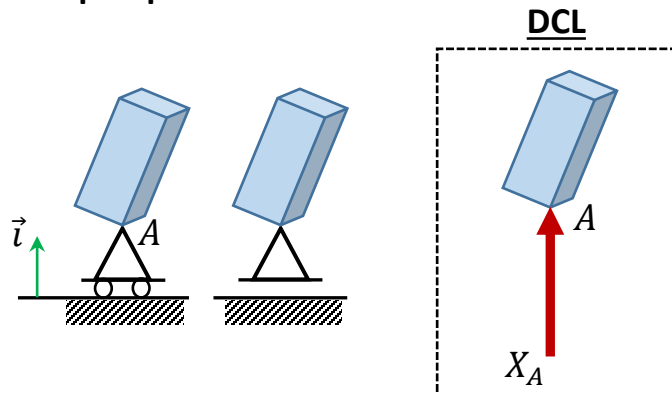
1) Apoio simples:

Vincula o ponto do corpo a uma superfície de apoio.

Retira 1 grau de liberdade.

Fornecer uma força de reação:

- normal à superfície de apoio;
- qualquer sentido (bi-lateral) ou único sentido único pré-determinado (unilateral);
- qualquer intensidade.



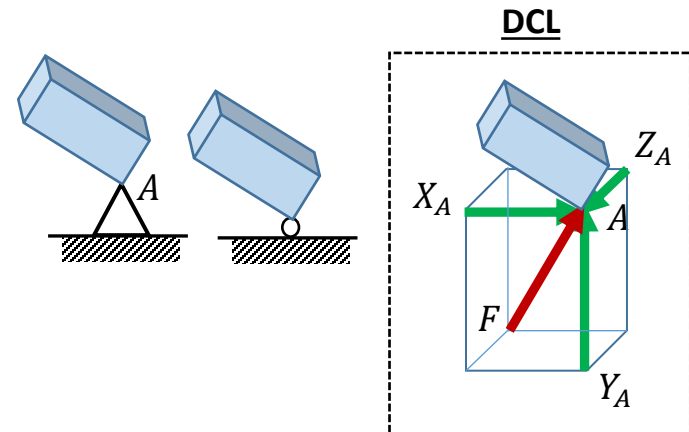
2) Articulação:

Vincula o ponto do corpo a uma posição fixa no espaço.

Retira 3 graus de liberdade.

Fornecer uma força de reação:

- qualquer direção;
- qualquer sentido;
- qualquer intensidade.





Vínculos

Tipos de Vínculos (continuação):

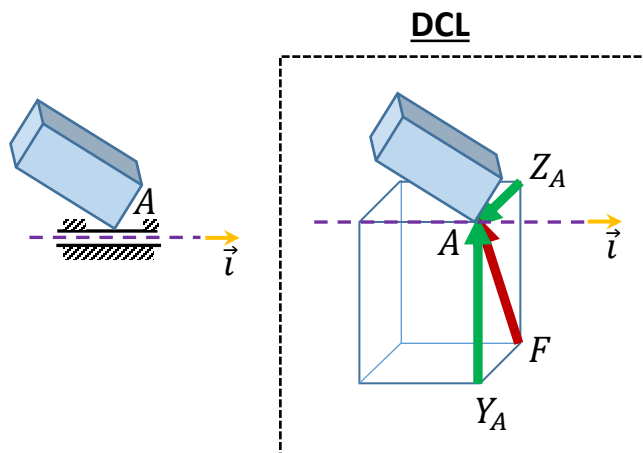
3) Anel:

Vincula o ponto do corpo a um eixo.

Retira 2 graus de liberdade.

Fornecer uma força de reação:

- normal ao eixo;
- qualquer sentido;
- qualquer intensidade.



4) Engaste:

Vincula o corpo em uma posição fixa no espaço.

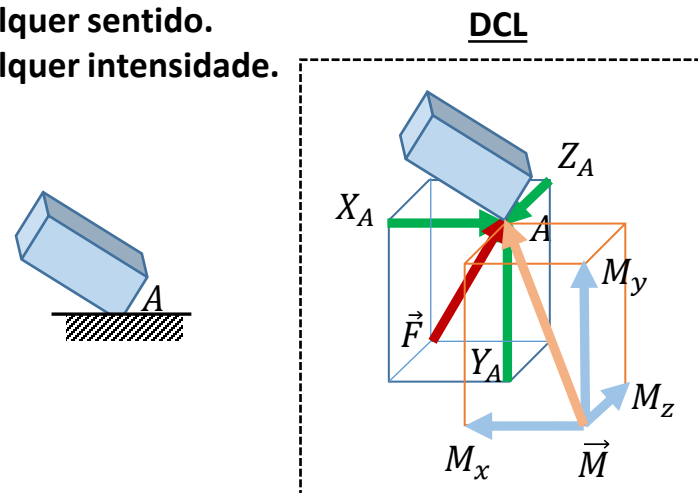
Retira os 6 graus de liberdade.

Fornecer uma força de reação:

- qualquer direção.
- qualquer sentido.
- qualquer intensidade.

Fornecer um binário de reação:

- qualquer direção.
- qualquer sentido.
- qualquer intensidade.





Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas

Em um problema de equilíbrio estático de estruturas típico temos uma dada estrutura, submetida a um determinado carregamento e vinculada de alguma maneira onde deveremos determinar, conforme o caso esforços nos vínculos e/ou posições de equilíbrio e/ou esforços nos componentes.

Define-se:

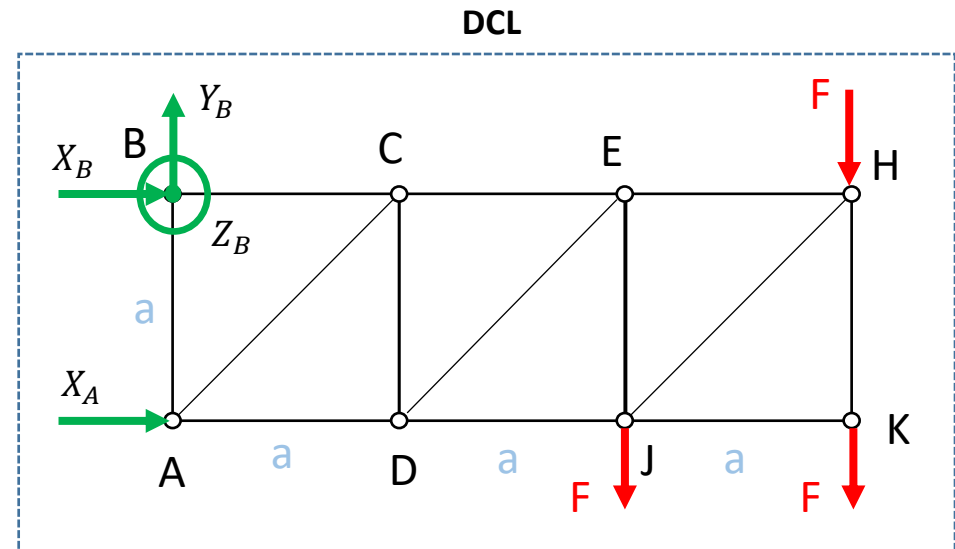
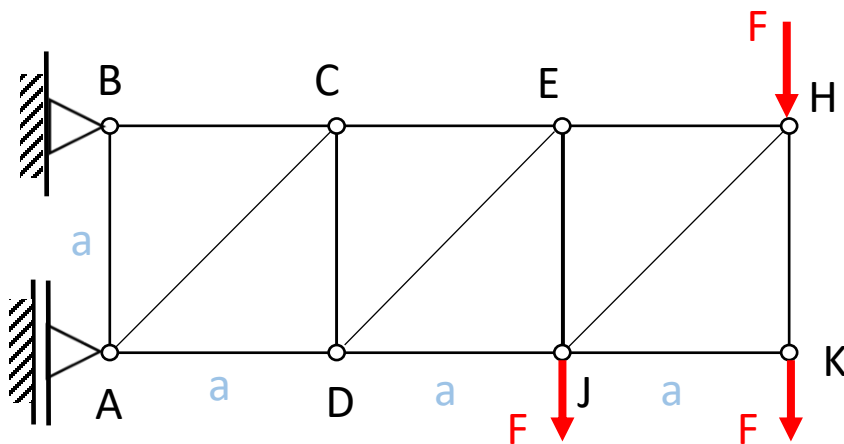
Diagrama de Corpo Livre → desenho da estrutura substituindo-se os vínculos pelas correspondentes forças de reação.

Forças externas: forças aplicadas por agentes externos sobre à estrutura

Forças internas: forças entre os diversos componentes da estrutura (formando pares ação reação)

Forças ativas: forças externas aplicadas por agentes que não sejam os vínculos

Forças de reação: forças externas aplicadas pelos vínculos externos.





Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas

No exemplo:

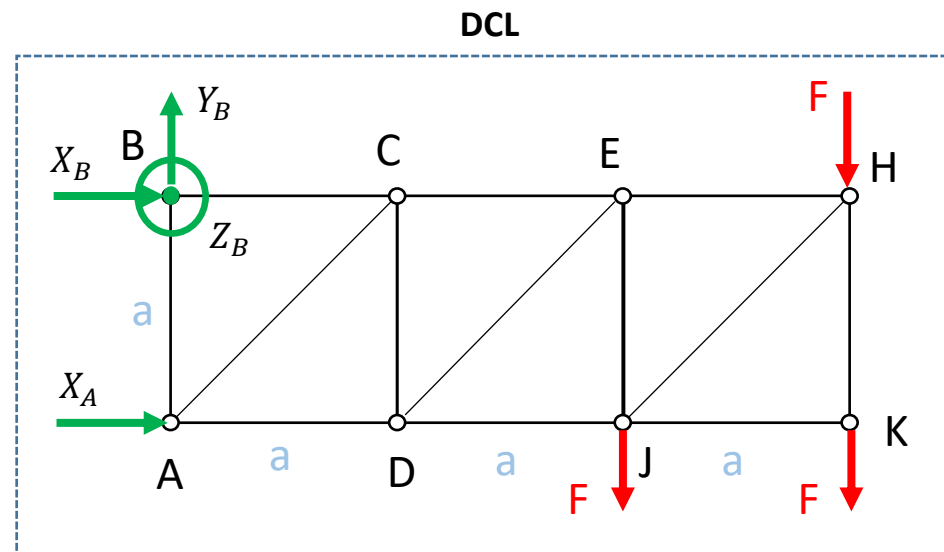
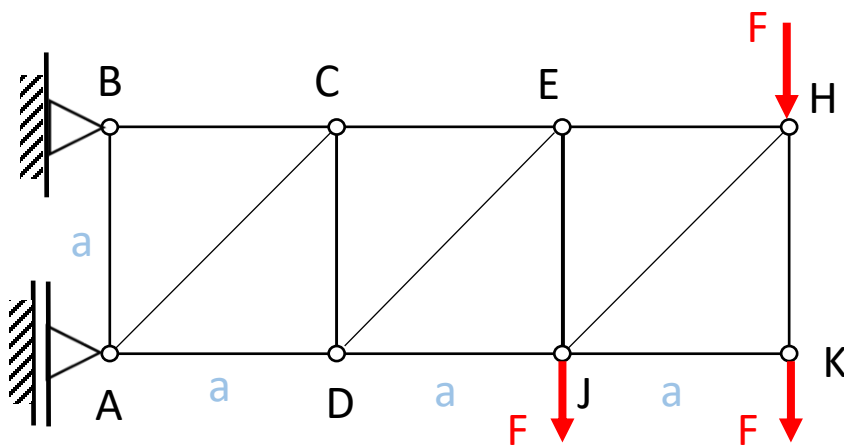
Em A e B temos vínculos externos, A é um apoio simples, B é uma articulação.

Em J, K e H temos **forças externas ativas**.

Em A e B temos **forças externas de reação**. O Sentido admitido inicialmente para as forças externas de reação desconhecidas é arbitrário.

Temos 13 barras. Temos articulações internas entre as barras.

As **forças internas NÃO aparecem no DCL** do conjunto porque formam pares ação/reação (3ª Lei de Newton) e assim anulam-se duas a duas.





Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas

As equações de equilíbrio estático a serem resolvidas são as seguintes:

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

Estas equações vêm dos Teoremas da Dinâmica:

Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) $\rightarrow \vec{R} = m\vec{a}_G$

Teorema da Taxa de Variação da Quantidade de Movimento Angular (TMA) $\rightarrow \dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O$

Para garantirmos que o equilíbrio estático seja possível basta então que a resultante do sistema de forças externas aplicadas à estrutura e o momento deste sistema de forças externas em relação a um polo sejam nulos, assim não há variação de quantidade de movimento linear nem variação de quantidade de movimento angular.

O polo em relação ao qual calculamos o momento de forças pode ser qualquer, isto é, escolhido arbitrariamente, pois já que temos a resultante nula, o momento será invariante para mudança de polo.

Só interessam as forças externas pois as forças interna anulam-se aos pares conforme a 3ª Lei de Newton – Lei de Ação e Reação.

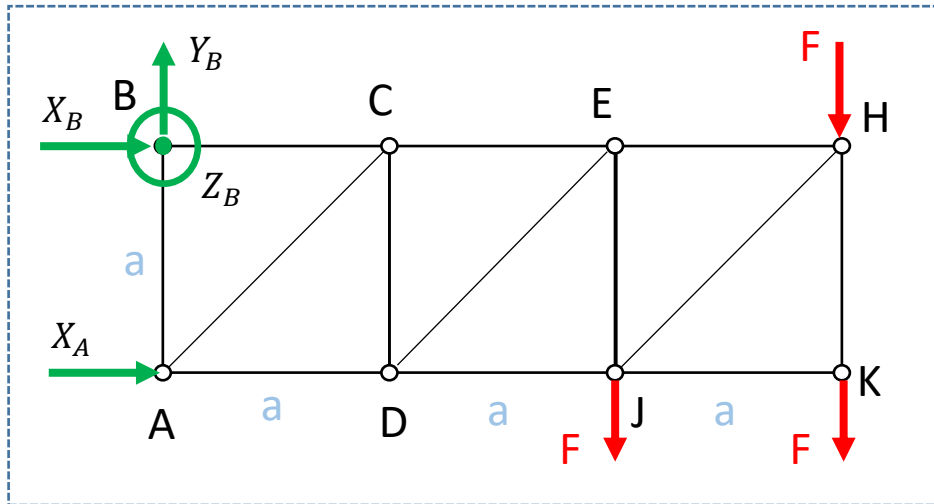
Observação: As Leis de Newton e os Teoremas da Dinâmica serão discutidos em maiores detalhes na terceira parte do conteúdo da disciplina ao abordarmos a Dinâmicas dos Sistemas.



Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas – Problema Plano

Para a estruturas ilustrada, aplicando-se as equações de equilíbrio, tem-se:

DCL



$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \quad \vec{M}_A^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - 3F = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_B = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_{xA} = 0 \therefore Z_B \cdot a = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{yA} = 0 \therefore 0 = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore -X_B \cdot a - F \cdot 2a - 2F \cdot 3a = 0 \quad (6)$$

Observamos que apenas as equações (1), (2) e (6) são úteis.

Isto porque estamos numa situação definida como um “problema plano”:

- estrutura é plana, ou está sendo analisada em seu plano de simetria;
- as forças externas ativas estão todas contidas neste plano;
- eventuais binários externos ativos estariam perpendiculares ao plano.

Nesta situação de “problemas plano” as equações úteis que restam são:

- equilíbrios de forças segundo duas direções, ortogonais entre si, do plano;
- equilíbrio de momentos segundo direção ortogonal ao “plano da estrutura”.

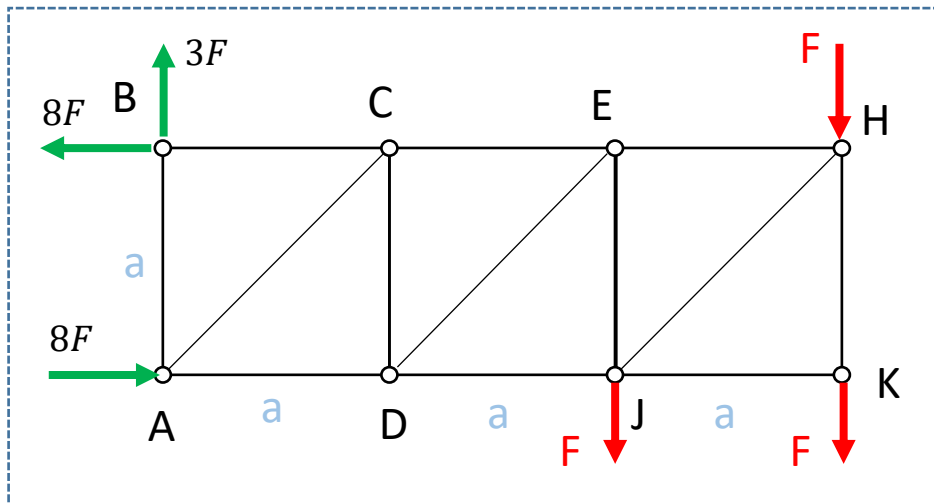
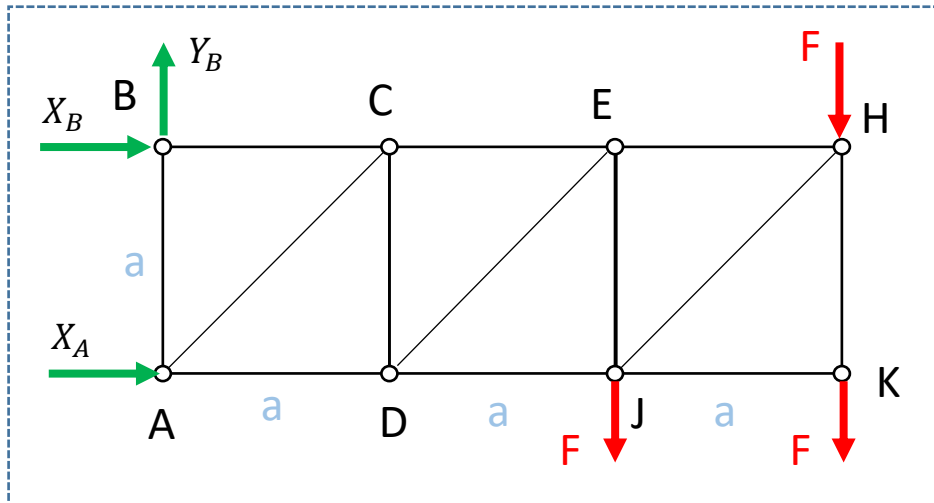
No problema plano, aquele onde não existem forças ativas perpendiculares ao plano, então é lógico que não existirão forças reativas, e assim Z_B é supérfluo.



Exercício 1: Problema Plano

Resolvendo-se o problema plano do exemplo que vimos analisando:

DCL



$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \quad \vec{M}_A^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - 3F = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{ZA} = 0 \therefore -X_B \cdot a - F \cdot 2a - 2F \cdot 3a = 0 \quad (3)$$

de(2): $Y_B = 3F$

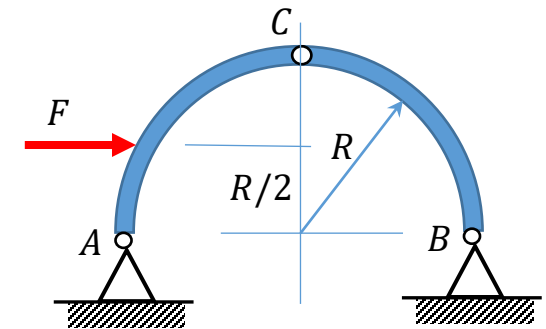
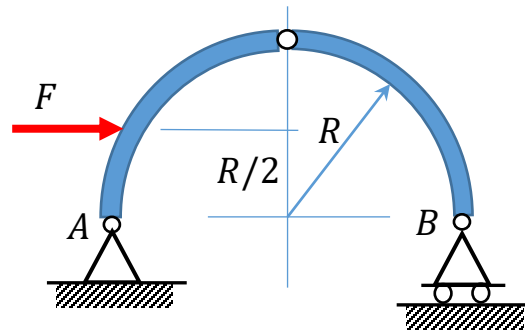
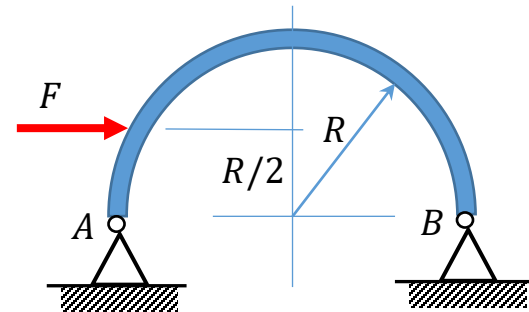
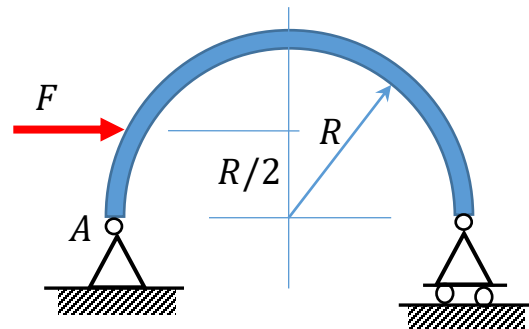
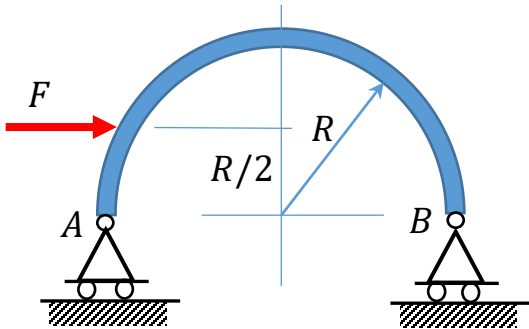
de(3): $X_B = -8F$

de(1): $X_A = 8F$



Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

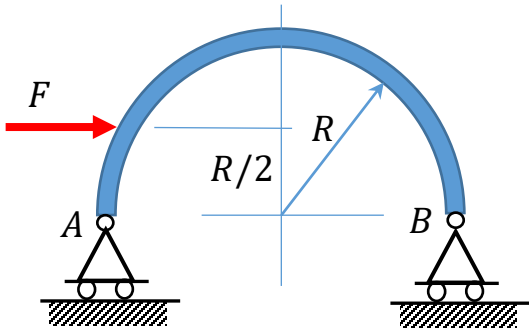
Considere as estruturas em problema plano que seguem:



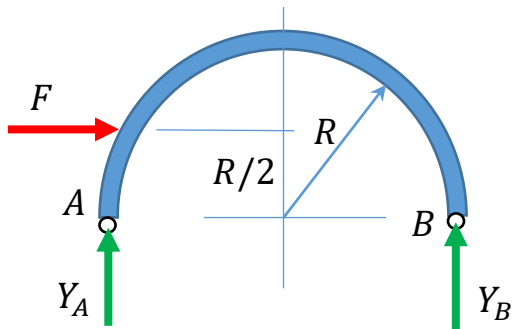


Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

Considere as estruturas que seguem:



DCL



$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \quad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore F = 0 \quad (1)$$

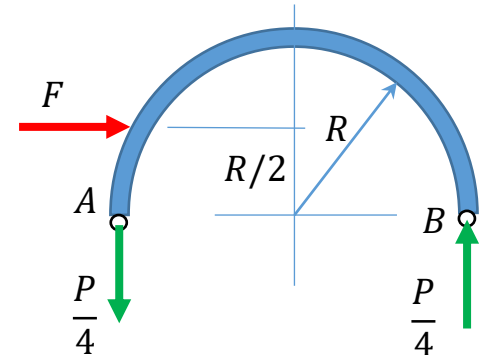
$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B \cdot 2R - F \frac{R}{2} = 0 \quad (3)$$

de(3): $Y_B = F/4$

Em (2): $Y_A = -F/4$

mas de (1), só há equilíbrio se F for nulo!



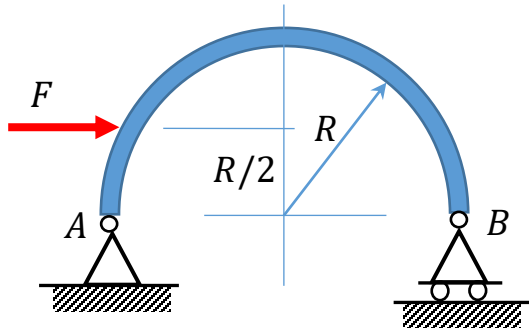
Hipostática

Nesta situação diz-se que a estrutura é hipostática.

É quando há menos vínculos (quantidade, tipo e/ou localização, vide melhor explicação mais adiante) do que o necessário para garantir o equilíbrio estático em qualquer caso de carregamento.



Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos



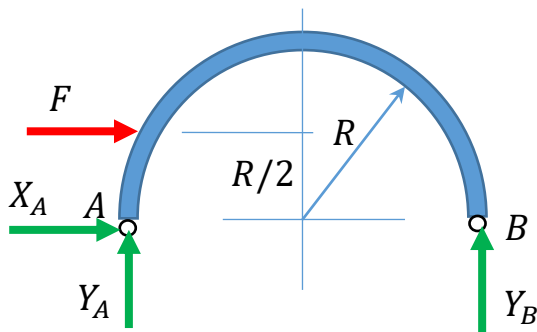
$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \quad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + F = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B \cdot 2R - F \frac{R}{2} = 0 \quad (3)$$

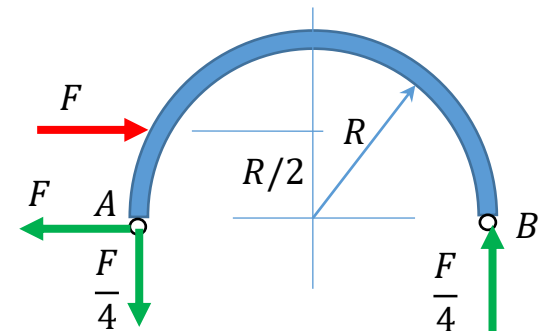
DCL



de(3): $Y_B = F/4$

Em (2): $Y_A = -F/4$

de(1): $X_A = -F$



Isostática

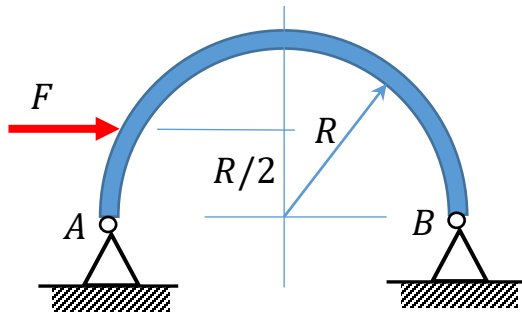
Nesta situação diz-se que a estrutura é isostática.

É quando há exatamente a quantidade, tipo e distribuição espacial de vínculos necessária e suficiente para garantir o equilíbrio estático em qualquer caso de carregamento.



Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \quad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$



$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B + F = 0 \quad (1)$$

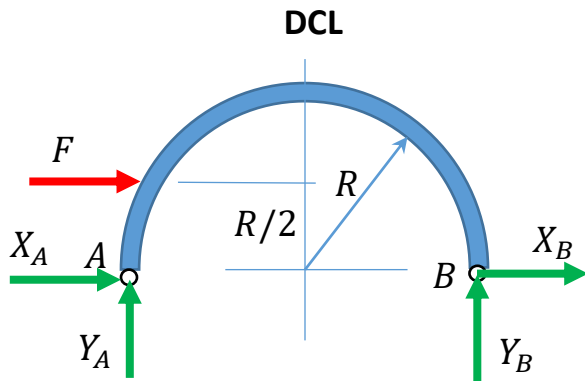
$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B \cdot 2R - F \frac{R}{2} = 0 \quad (3)$$

de(3): $Y_B = F/4$

Em (2): $Y_A = -F/4$

mas não conseguimos resolver (1) e assim X_A e X_B ficam indeterminadas.



Hiperestática

Nesta situação diz-se que a estrutura é hiperestática.

É quando há mais vínculos do que o necessário para garantir o equilíbrio estático. Há mais incógnitas do que equações.

Para resolver precisamos de mais equações. Equações adicionais vêm da Resistência de Materiais. Elas envolvem conceitos de deformação da estrutura. Descreveria o fato de ter-se deslocamento nulo nos pontos vinculados. Foge ao escopo da Mecânica Geral e será abordado nas disciplinas de Resistência dos Materiais.



Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

Podemos classificar as estruturas então quanto ao tipo, quantidade e distribuição espacial dos vínculos da seguinte forma:

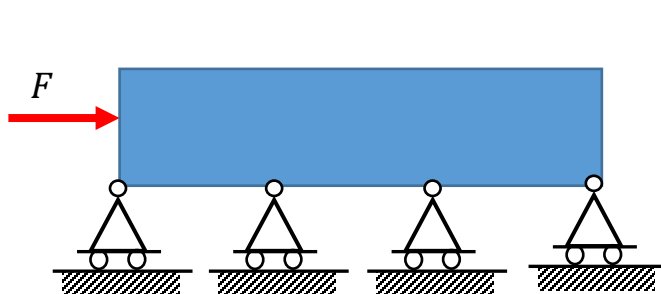
- Estruturas hipostáticas
- Estruturas isostáticas
- Estruturas hiperestáticas

Nosso objeto de estudo principal será o das estruturas isostáticas.

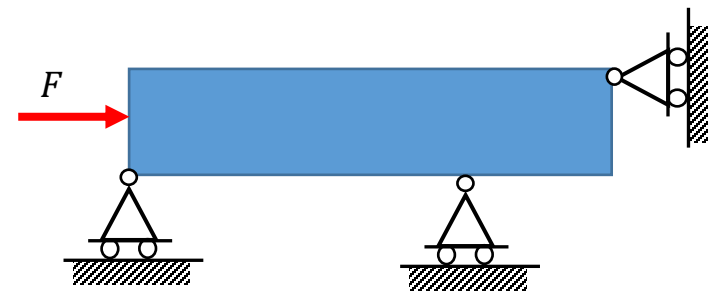
Também poderemos abordar alguns casos de estruturas hipostáticas em condição especial de carregamento em que o equilíbrio estático seja possível.

Estudos de estruturas hiperestáticas está fora do escopo da Mecânica Geral.

Observe que não se trata apenas da quantidade de vínculos mas sim do seu tipo e distribuição espacial!



Hipostática

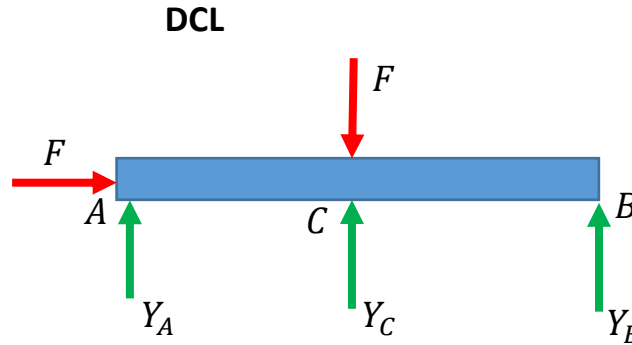
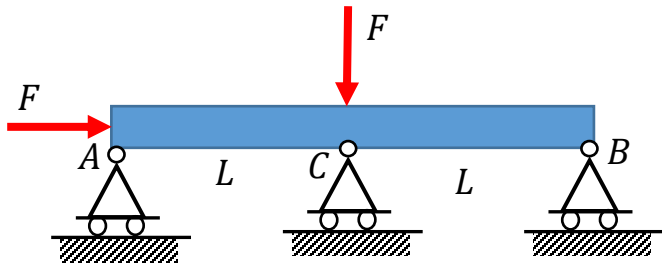


Isostática



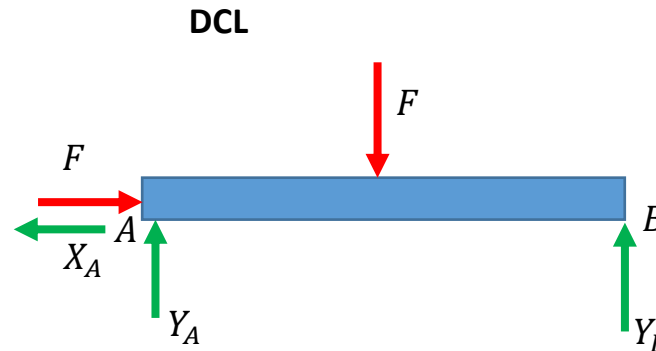
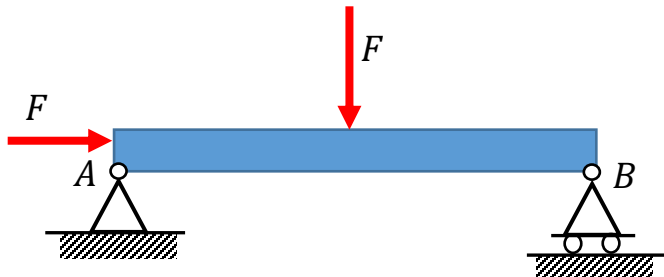
Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

Observe ainda outros exemplos de que não se trata apenas da quantidade de vínculos mas sim do seu tipo e distribuição espacial!



3 incógnitas, 3 equações

Hipostática para os carregamentos Horizontais e Hiperestática para os carregamentos verticais

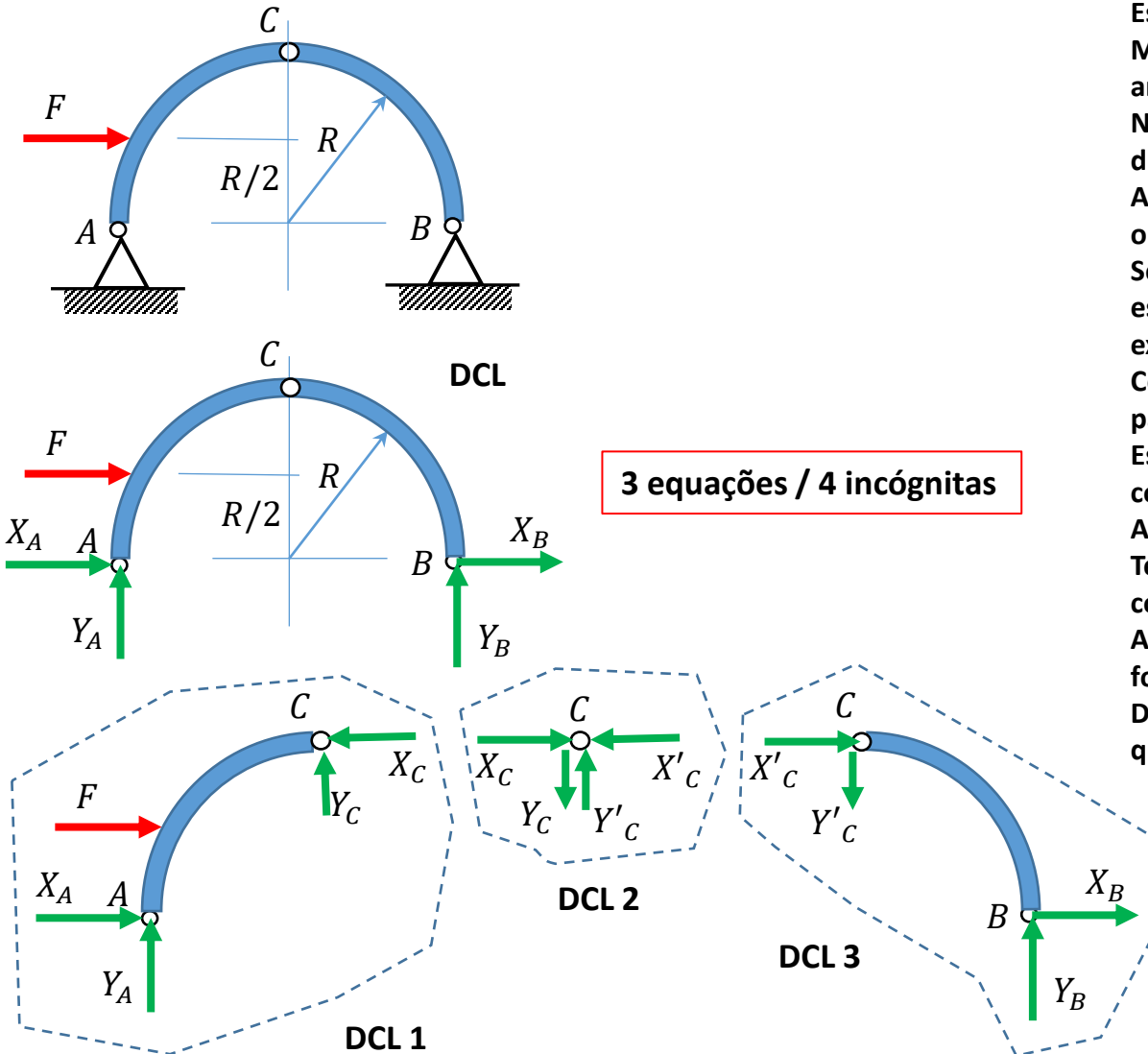


3 incógnitas, 3 equações

Isostática



Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos



Esta estrutura é aparentemente hiperestática. Mas observe que agora houve o acréscimo de uma articulação.

Não temos mais uma única barra curva, mas sim duas barras curvas articuladas entre si.

Agora as barras podem girar uma em relação a outra devido à articulação.

Se o vínculo em B fosse um apoio simples a estrutura tombaria quando submetida à força externa ativa horizontal.

Conclui-se que a articulação em B é necessária para o equilíbrio estático.

Esta situação pode então ser resolvida apenas com as equações de equilíbrio estático.

A forma de fazer isso é "explodindo" a estrutura. Teremos neste exemplo agora 3 diagramas de corpo livre.

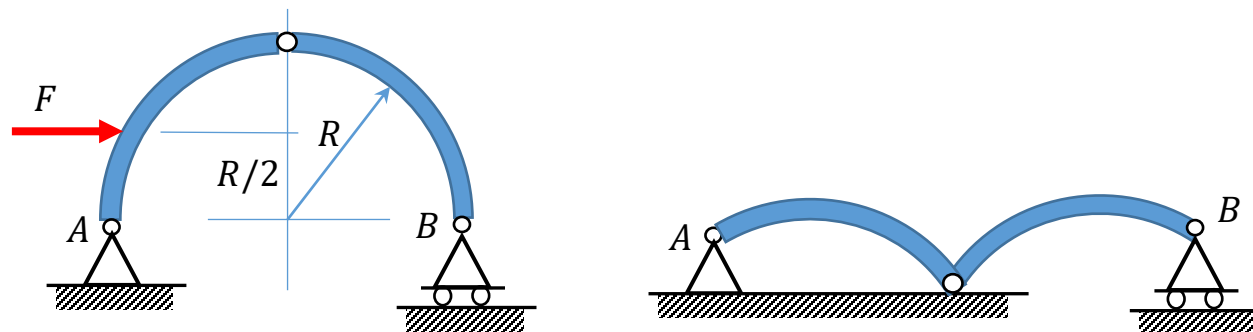
Acrescentamos incógnitas. O que antes eram forças internas agora são forças externas em cada DCL. Mas por outro lado aumentamos a quantidade de equações de equilíbrio disponíveis.

8 equações / 8 incógnitas



Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

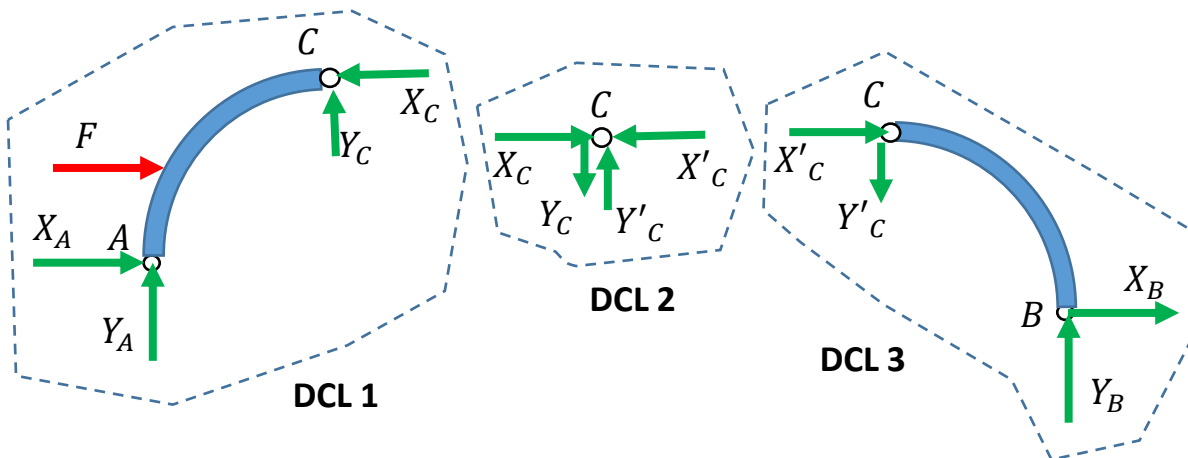
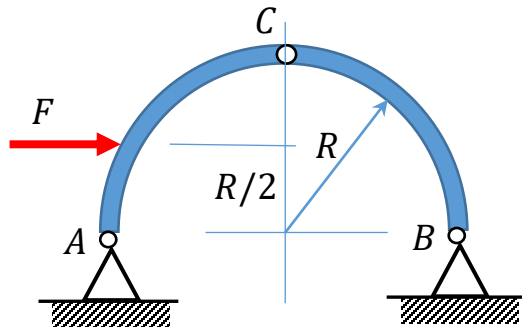
Veja como se em B tivéssemos um apoio simples o equilíbrio estático não seria possível!





Exercício 2

Determinar as reações externas e as forças entre as barras.



$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_C + F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_C = 0$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_C \cdot R + X_C \cdot R - F \cdot \frac{R}{2} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_C - X'_C = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y_C + Y'_C = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X'_C + X_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y'_C + Y_B = 0$$

$$\sum M_{zB} = 0 \therefore Y'_C \cdot R - X'_C \cdot R = 0$$

Observe que o equilíbrio do nó fornece apenas 2 equações num problema plano (seriam 3 num problema no espaço 3D).



Exercício 2 (continuação)

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_C + F = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_C = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_C \cdot R + X_C \cdot R - F \frac{R}{2} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_C - X'_C = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y_C + Y'_C = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X'_C + X_B = 0 \quad (6)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y'_C + Y_B = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore Y'_C \cdot R - X'_C \cdot R = 0 \quad (8)$$

de (4) $X_C = X'_C \quad (9)$

de (5) $Y_C = Y'_C \quad (10)$

de (8) $Y'_C = X'_C \quad (11)$

(11) em (9) e (10) $X_C = Y_C \quad (12)$

(12) em (3) $Y_C = \frac{F}{4} \quad (13)$

(13) em (12) $X_C = \frac{F}{4} \quad (14)$

(13) em (2) $Y_A = -\frac{F}{4}$

(14) em (1) $X_A = -\frac{3F}{4}$

(14) em (9) $X'_C = \frac{F}{4} \quad (15)$

(13) em (10) $Y'_C = \frac{F}{4} \quad (16)$

Observe que havendo apenas 2 corpos chegando numa mesma articulação interna o equilíbrio do nó é supérfluo.

(15) em (6)

$$X_B = -\frac{F}{4}$$

(16) em (7)

$$Y_B = \frac{F}{4}$$



Exercício 2 (continuação)

Assim:

$$Y_C = \frac{F}{4}$$

$$X_C = \frac{F}{4}$$

$$Y_A = -\frac{F}{4}$$

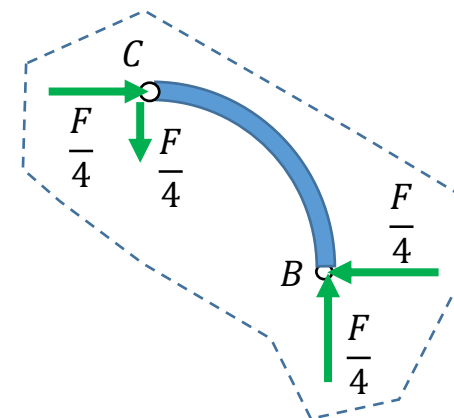
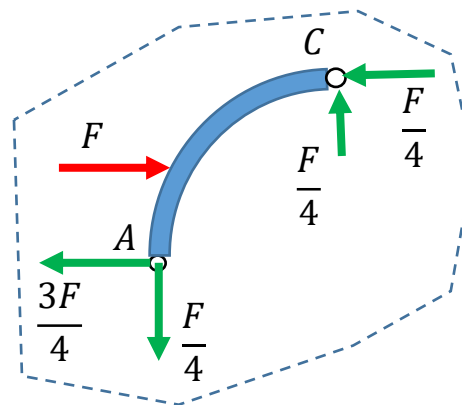
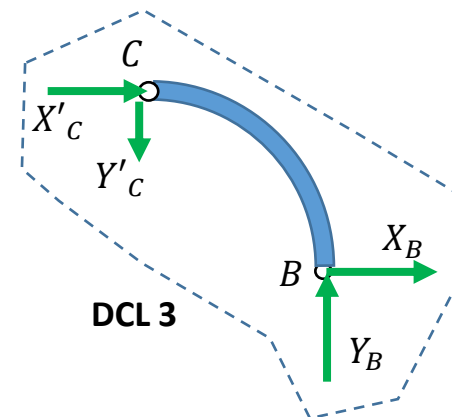
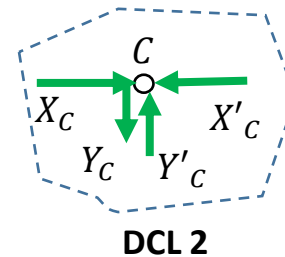
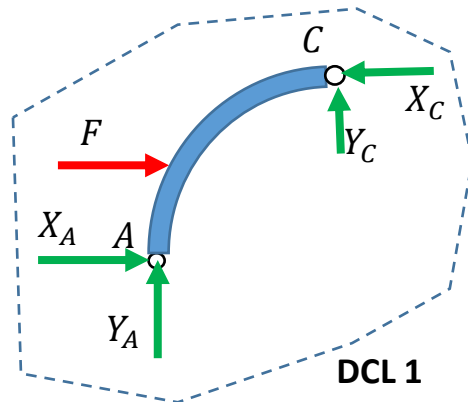
$$X_A = -\frac{3F}{4}$$

$$X'_C = \frac{F}{4}$$

$$Y'_C = \frac{F}{4}$$

$$X_B = -\frac{F}{4}$$

$$Y_B = \frac{F}{4}$$





Treliças – Barra de Treliça

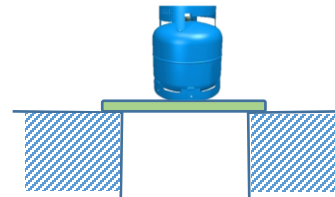
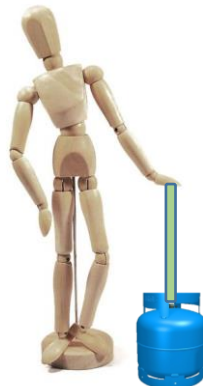
Define-se uma barra de treliça como uma barra com extremidades articuladas sem carga intermediária, isto é, todo carregamento sobre ela aplicado entra pelas extremidades.

Uma estrutura é denominada uma treliça se ela for composta por barras de treliça.

Treliças têm grande interesse na engenharia porque elas tem grande eficiência em suportar carga. Isto porque cada barra está submetida apenas a tração ou compressão. Não há carregamento de flexão. Em geral as tensões oriundas de um carregamento de tração ou compressão são muito menores do que aquelas oriundas de um carregamento em flexão. Isto será melhor explorado no conteúdo das disciplinas de Resistência de Materiais.

Experimente com sua régua plástica. Ela certamente é capaz de suportar uma carga muito maior em tração do que em flexão. (PS.: cuidado para não quebrá-la!)

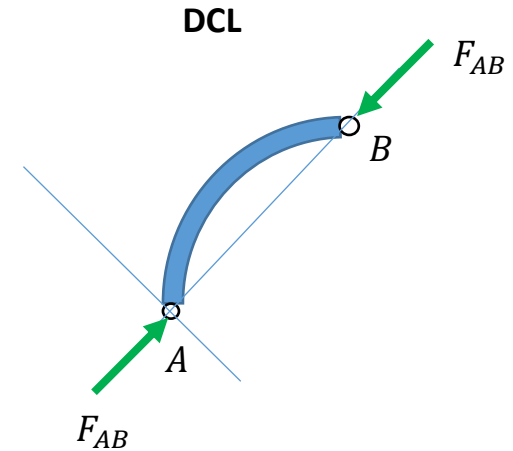
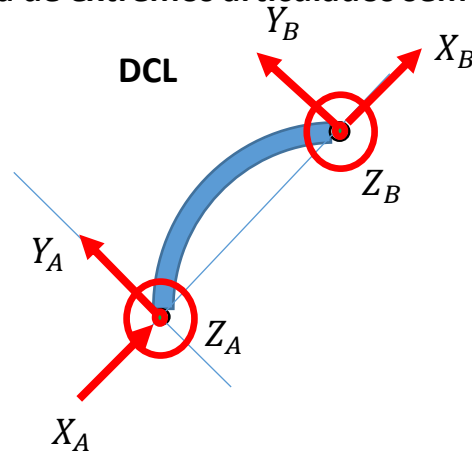
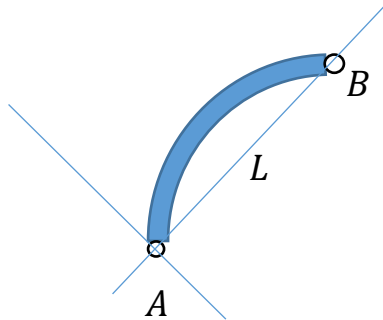
Estruturas treliçadas são utilizadas em pontes, torres, telhados, chassis de máquinas e veículos, lanças de guindastes, etc...





Treliças – Barra de Treliça

Estudando o equilíbrio de uma barra de extremos articulados sem carga intermediária:



$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B = 0 \Rightarrow X_A = -X_B = F_{AB}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A + Z_B = 0$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B \cdot L = 0 \Rightarrow Y_B = 0 \Rightarrow Y_A = 0$$

$$\sum M_{yA} = 0 \therefore -Z_B \cdot L = 0 \Rightarrow Z_B = 0 \Rightarrow Z_A = 0$$

Assim demonstrou-se que a força numa barra de extremos articulados sem carga intermediária tem a direção da reta que une as extremidades da barra.

Sendo a **barra reta**, esta força será sempre ou de tração (T) ou de compressão (C) e **então a barra é chamada de uma barra de treliça.**

No exemplo considerou-se uma barra curva.

Observa-se que a demonstração do resultado obtido é independente da geometria da barra.

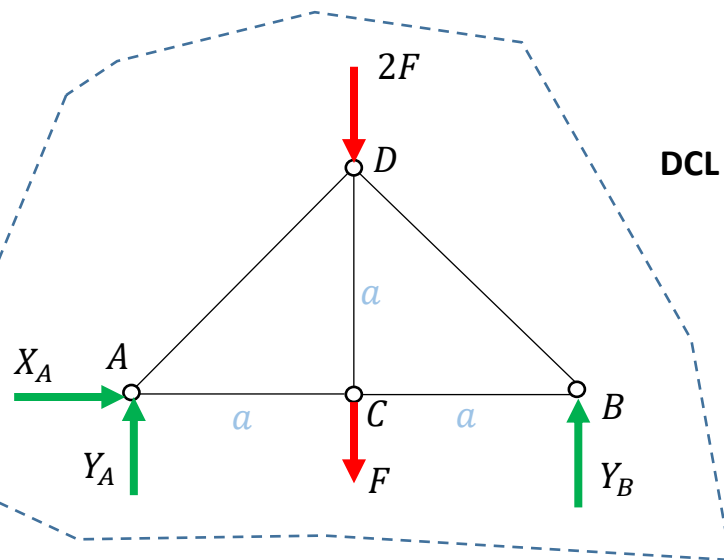
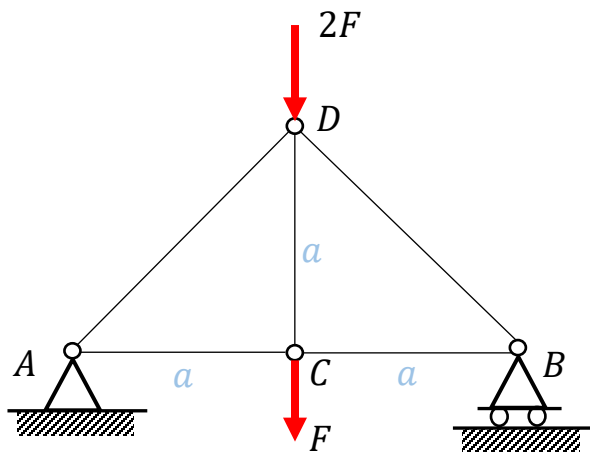
Entretanto, para que se tenha a barra apenas em tração ou compressão, isto é, sem flexão, é obrigatório que a barra seja reta.

Por isso as estruturas treliçadas são construídas por barras retas.



Exercício 3 - Treliças – Método dos Nós

Determinar as reações externas e as forças em cada barra indicando se são de tração (T) ou compressão (C).



$$\sum F_x = 0 \therefore X_A = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B - 3F = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B \cdot 2a - 3F \cdot a = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{3F}{2} \quad (2)$$

(2) em (1) $Y_A = \frac{3F}{2}$

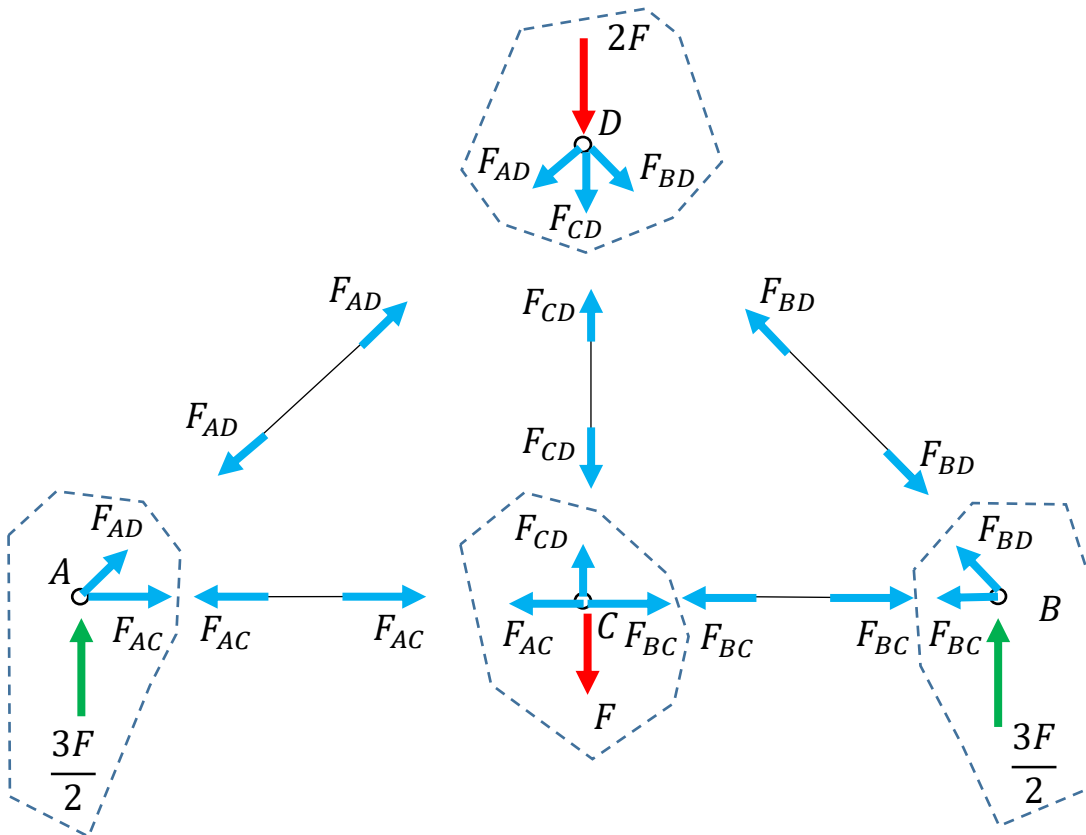
Resultado deste exemplo é trivial pela simetria da estrutura e do carregamento.



Exercício 3 - Trelças – Método dos Nós (continuação)

Para determinar as forças em cada barra vamos explodir a estrutura:

São vários DCLs:



No método dos nós fazemos os equilíbrios dos nós:

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{3F}{2} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} - F_{BC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore F_{CD} - F = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{BC} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} + \frac{3F}{2} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} - 2F = 0$$



Exercício 3 - Trelças – Método dos Nós (continuação)

Resolvendo o sistema de equações (8 equações, 5 incógnitas, que são as forças nas barras, pois as 3 reações já calculamos):

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} = 0$$

 \Rightarrow

$$F_{AC} = \frac{3}{2} F$$

(T) Tração

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{3F}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{AD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} F$$

(C) Compressão

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} - F_{BC} = 0$$

 \Rightarrow

$$F_{BC} = \frac{3}{2} F$$

(T) Tração

$$\sum F_y = 0 \therefore F_{CD} - F = 0 \Rightarrow$$

$$F_{CD} = F$$

(T) Tração

$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{BC} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} + \frac{3F}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{BD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} F$$

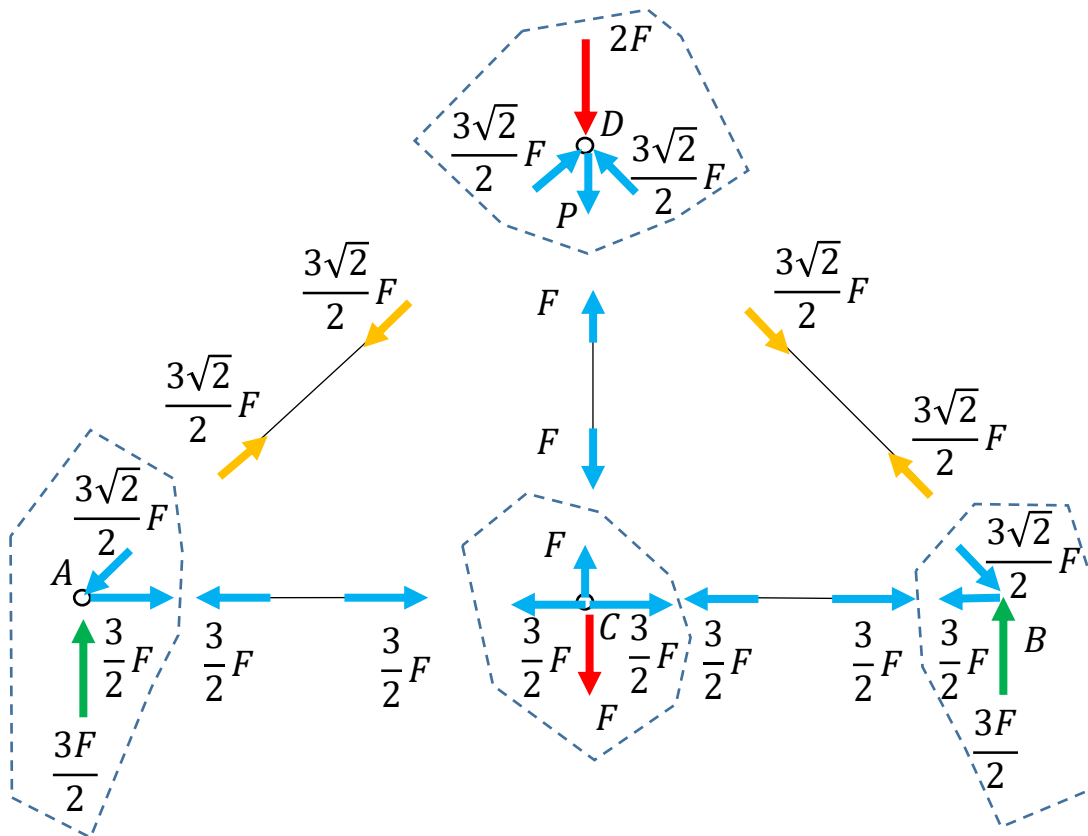
(C) Compressão

$$\sum F_x = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} - 2F = 0$$



Exercício 3 - Treliças – Método dos Nós (continuação)



$$F_{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F$$

(T) Tração

$$F_{AD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}F$$

(C) Compressão

$$F_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F$$

(T) Tração

$$F_{CD} = F$$

(T) Tração

$$F_{BD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}F$$

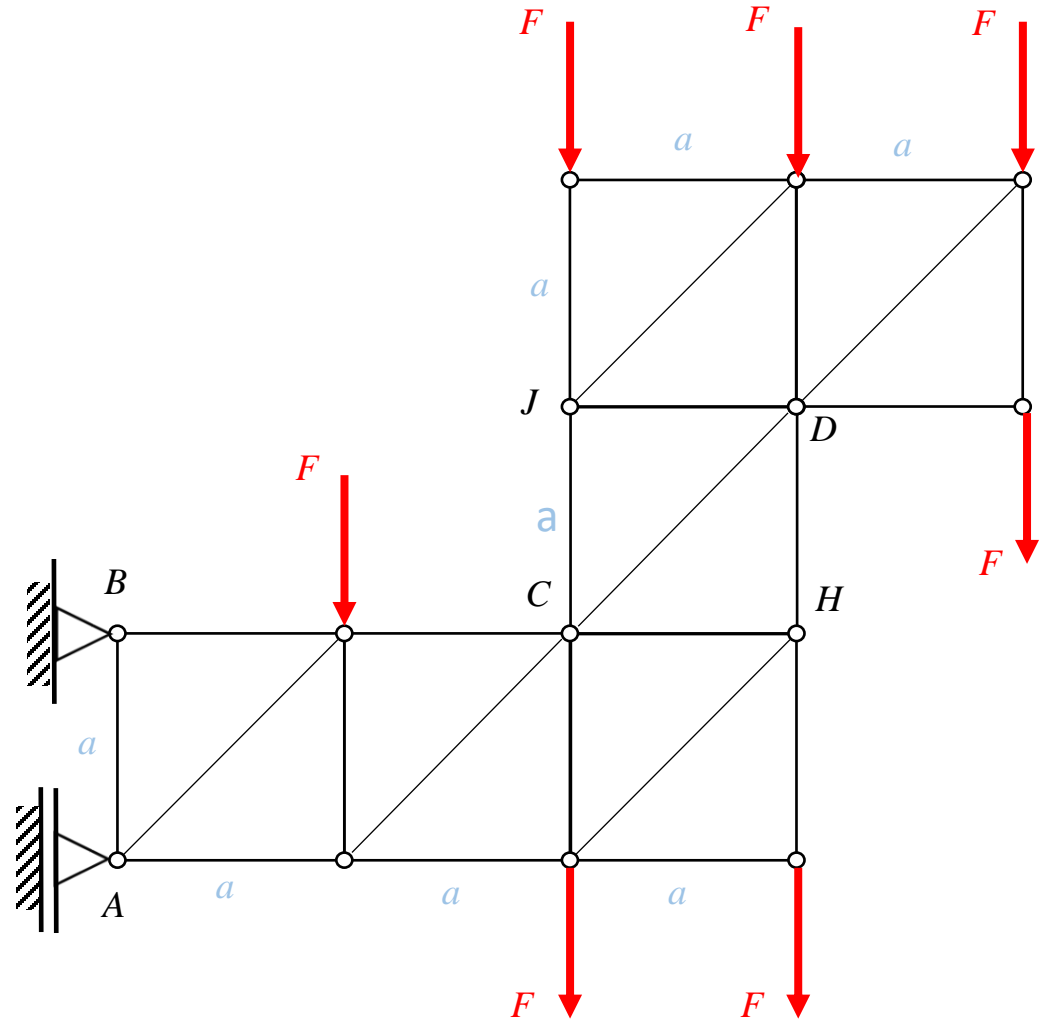
(C) Compressão



Exercício 4 - Método das Seções

Para a estrutura de treliça mostrada na figura, pede-se:

- o DCL da estrutura;
- as reações externas em A e B;
- os esforços nas barras CJ, CD e DH indicando se de tração ou compressão;
- a resultante de forças ativas aplicadas sobre a estrutura;
- o momento das forças ativas em relação ao pólo A;
- verificar se o carregamento correspondente às forças ativas é redutível a uma única força;
- em caso afirmativo no item anterior, determinar o eixo central do sistema de forças ativas.





Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B = 7F$$

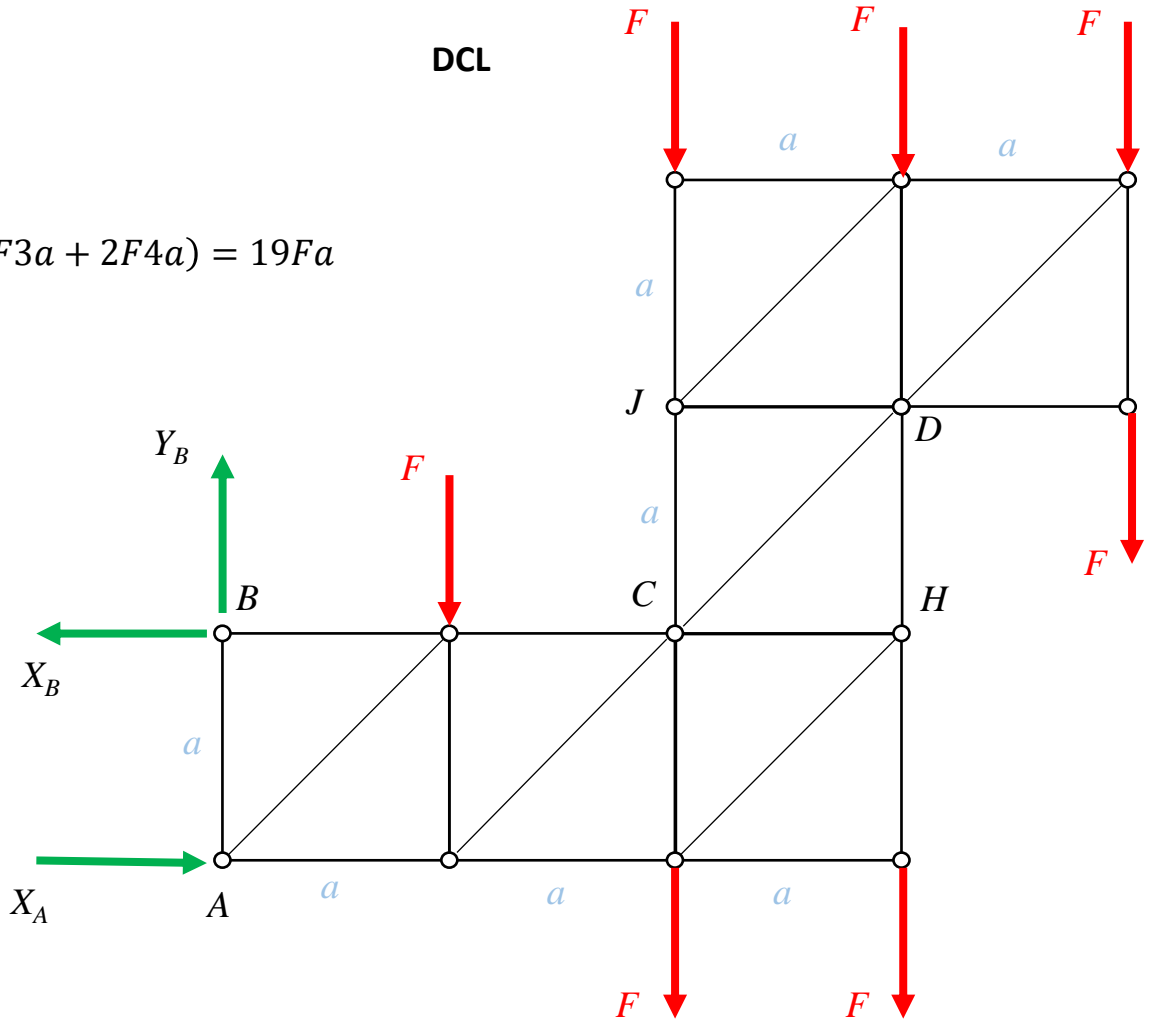
$$\sum M_{ZA} = 0 \therefore X_B \cdot a = (Fa + 2F2a + 2F3a + 2F4a) = 19Fa$$

Resolvendo:

$$X_B = 19F$$

$$X_A = 19F$$

$$Y_A = 7F$$



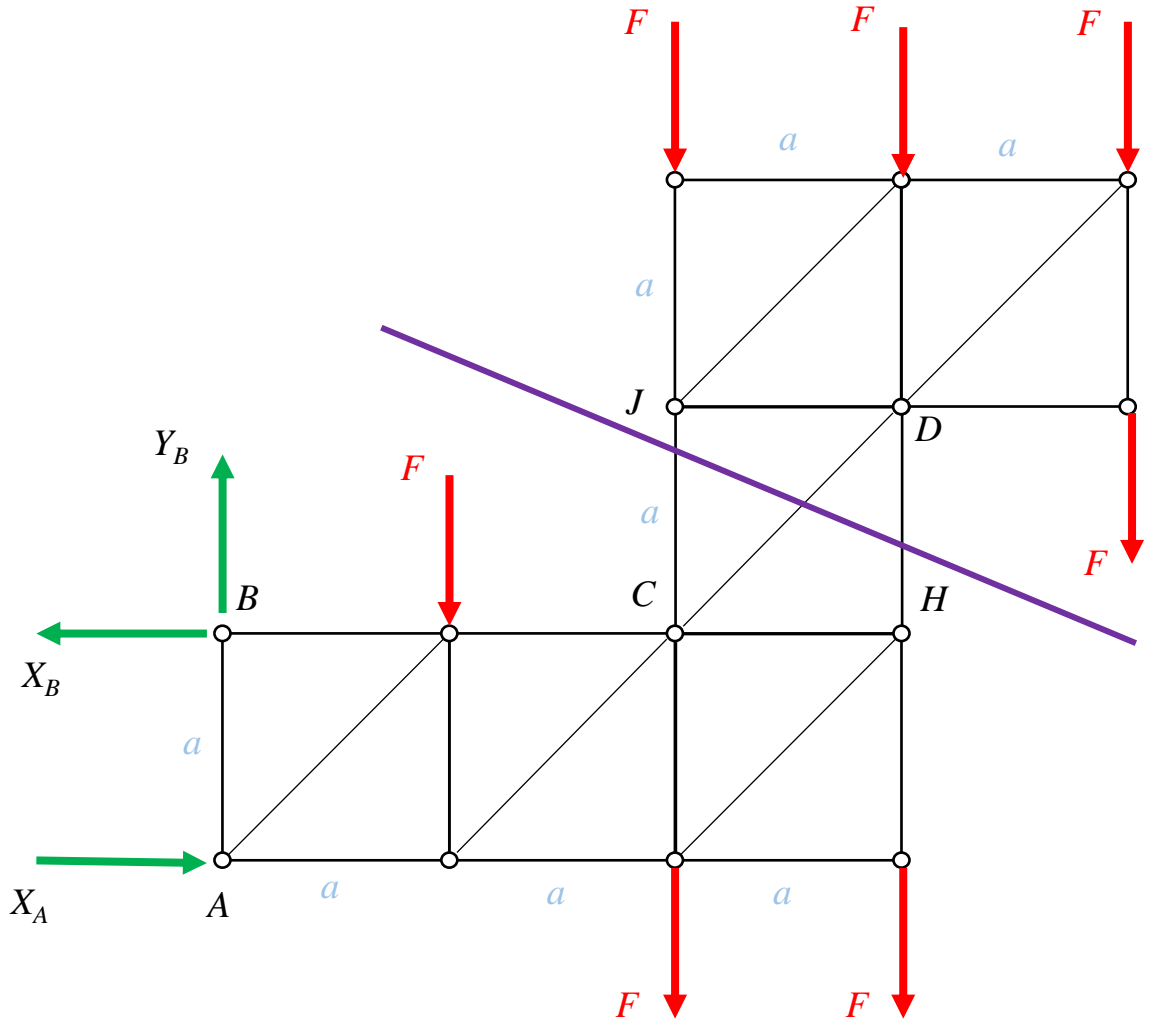


Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

Método das Seções

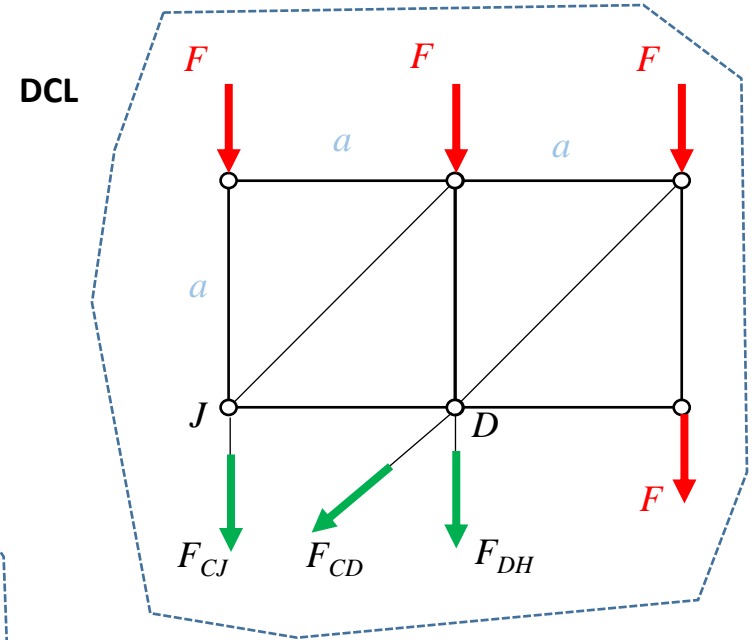
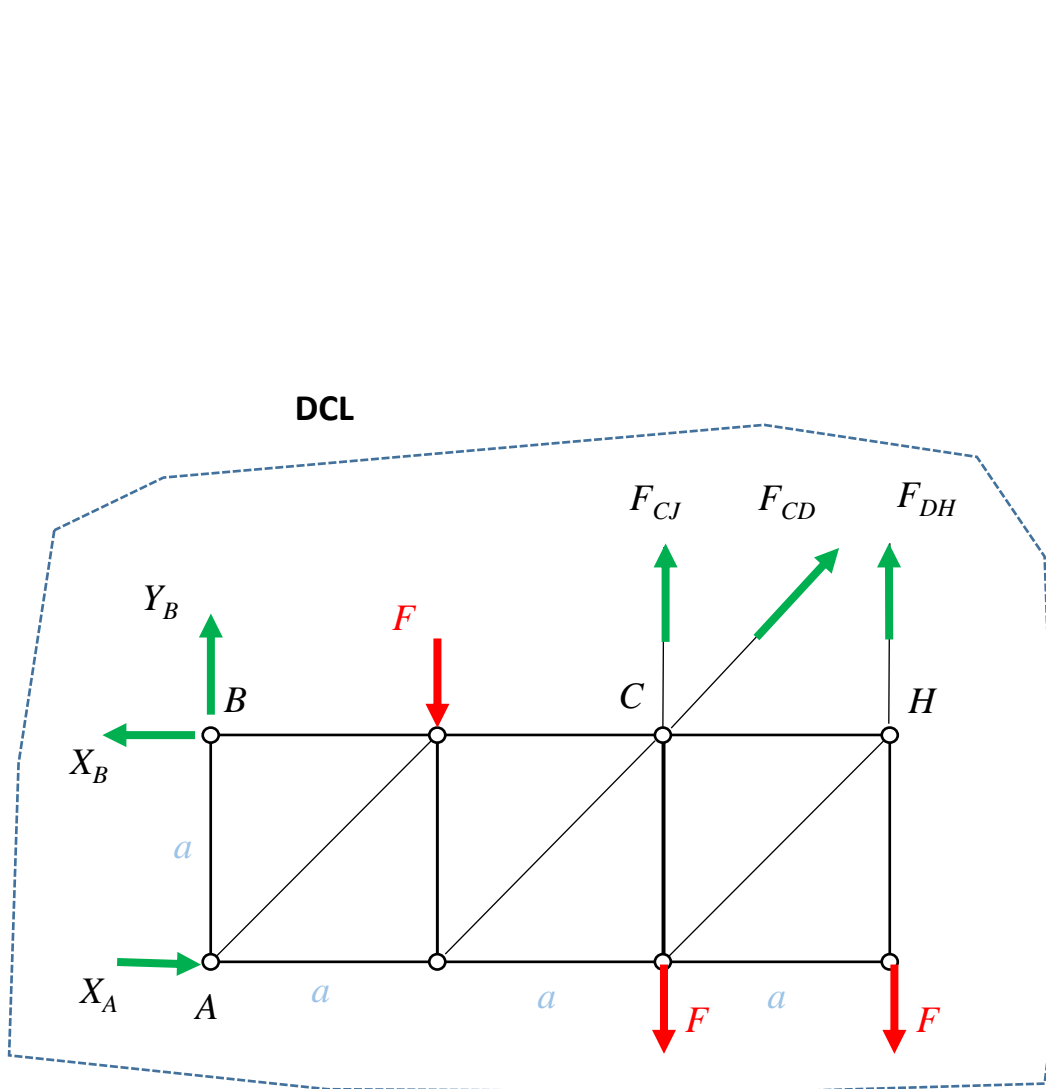
Para calcular as forças nas barras iremos aplicar o método das seções:

- Separar a estrutura em duas metades “cortando” no máximo 3 barras.
- Pelo menos uma das barras “cortadas” deve ser uma das barras de interesse para as quais deseja-se calcular a força atuante na mesma.
- Aplicar as equações de equilíbrio para uma das duas “metades” da estrutura.
- Repetir o processo caso ainda restem esforços em outras barras a serem determinados.





Exercício 4 - Método das Seções (continuação)





Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

$$\sum F_x = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}F_{CD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -F_{CJ} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{CD} - F_{DH} - 4F = 0$$

$$\sum M_{zD} = 0 \therefore F_{CJ} \cdot a + Fa - 2Fa = 0$$

Resolvendo:

$$F_{CD} = 0$$

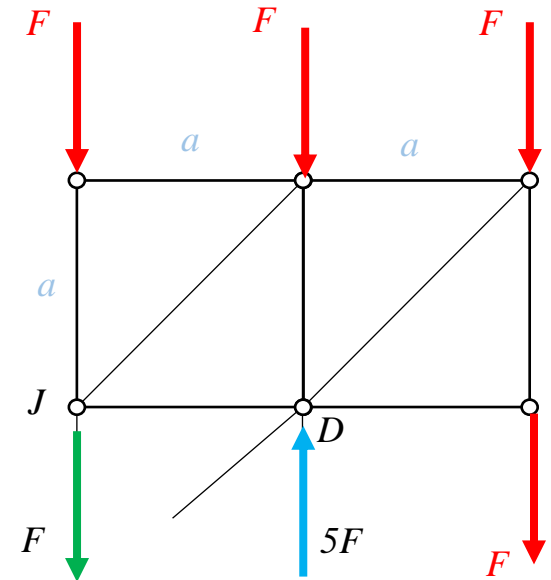
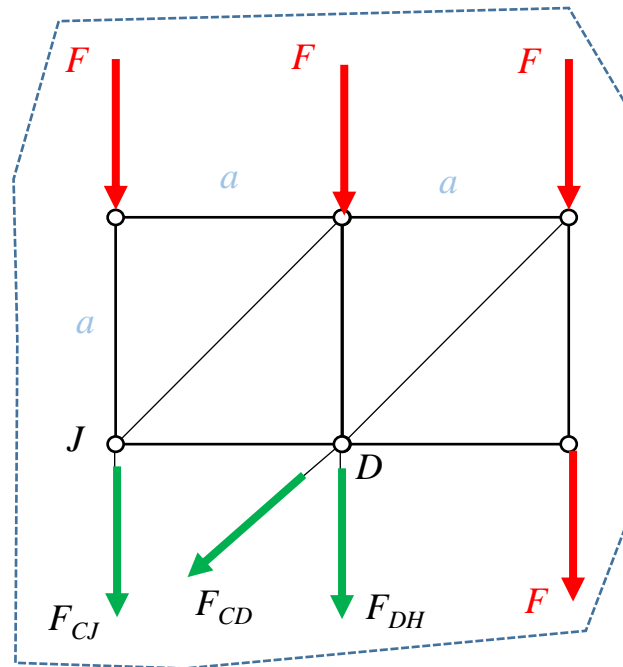
$$F_{CJ} = F$$

Tração

$$F_{DH} = -5F$$

Compressão

DCL





Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

Resultante das forças ativas:

$$\vec{R}_{ativas} = -7F\vec{j}$$

Momento das forças ativas em relação ao pólo A:

$$\vec{M}_{Aativas} = -19Fa\vec{k}$$

$$I = \vec{M}_{Aativas} \cdot \vec{R}_{ativas} = 0$$

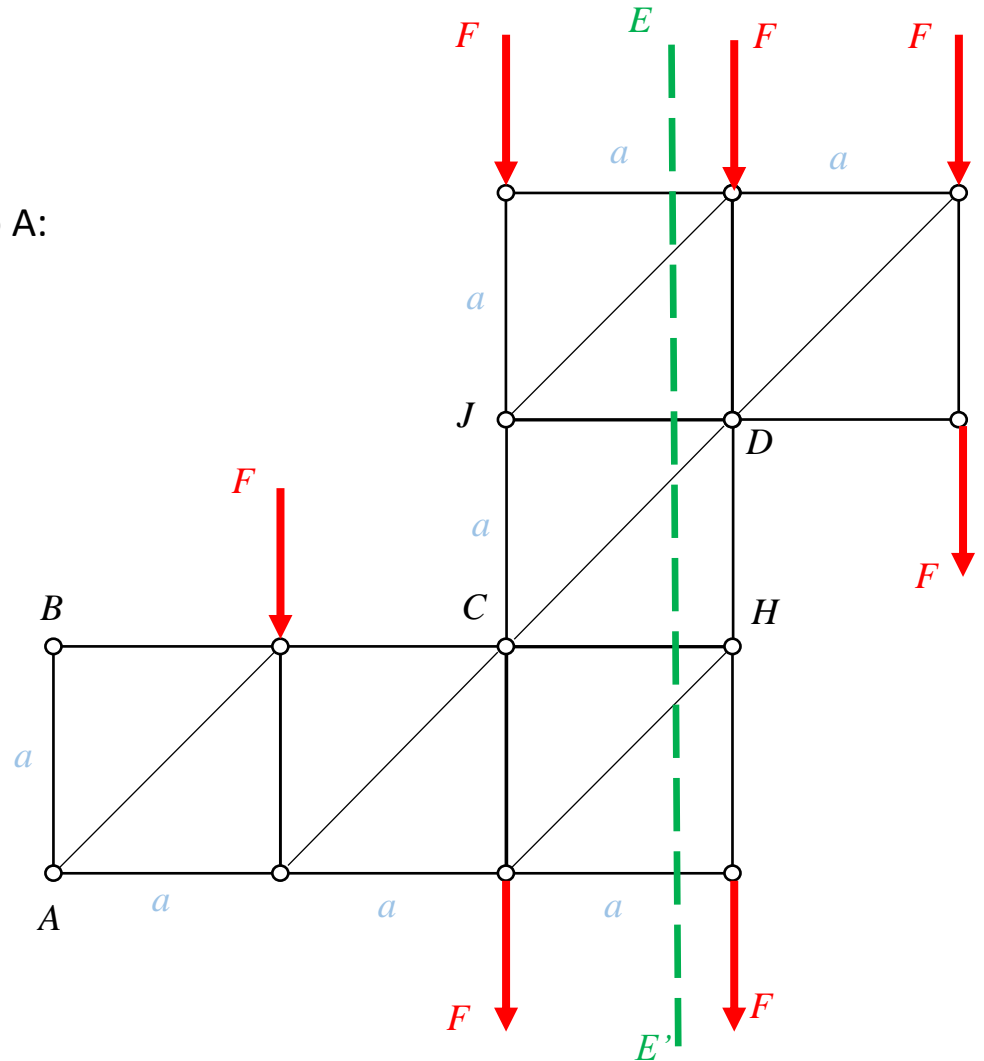
É redutível a apenas uma única força!

$$(E - A) = \frac{\vec{M}_{Aativas} \wedge \vec{R}_{ativas}}{|\vec{R}_{ativas}|^2} + \lambda \vec{R}_{ativas}$$

$$(E - A) = \frac{-19a\vec{k} \wedge (-7\vec{j})}{49} + \lambda \vec{j}$$

$$(E - A) = \frac{133a}{49} \vec{i} + \lambda \vec{j}$$

$$\left(\frac{133a}{49} \cong 2,71a\vec{i}\right)$$

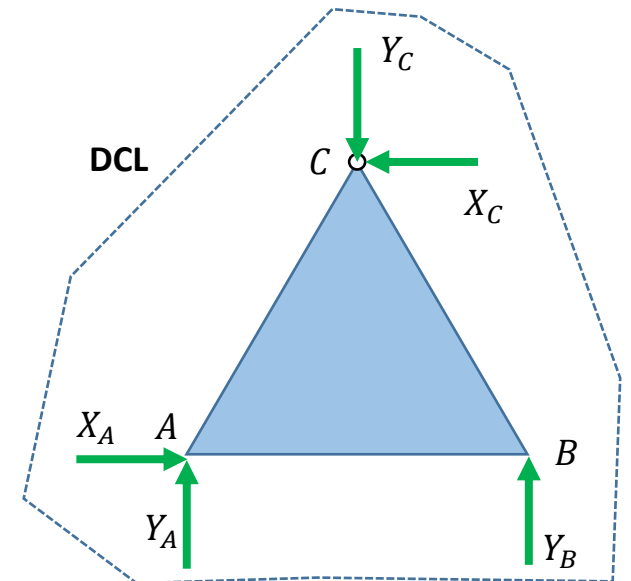
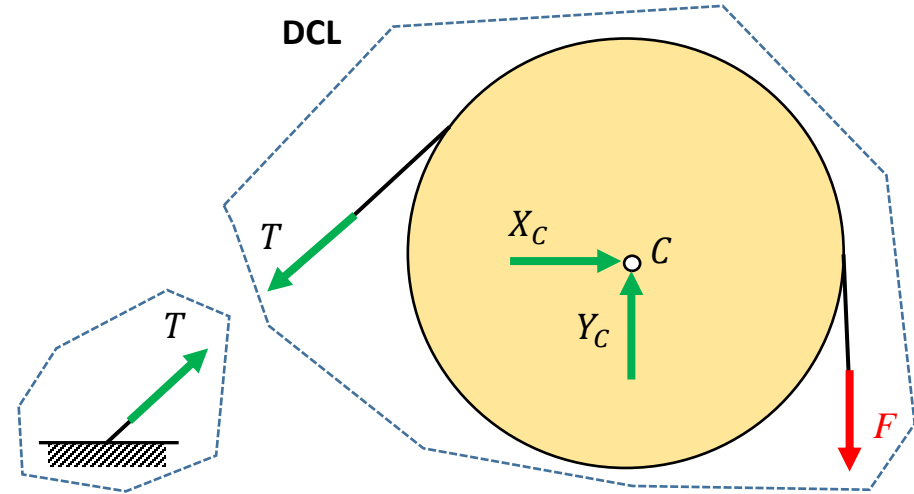
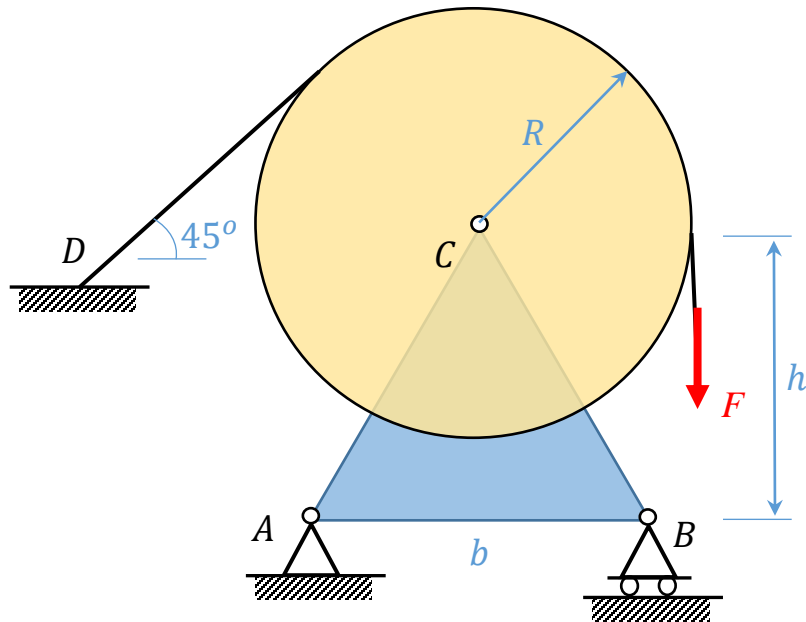




Forças em fios (cabos) e polias

Por hipótese, as forças em fios são sempre de Tração, isto é, têm a direção do cabo e tendem a esticá-lo. Assim, não conseguem ser submetidos a esforços de compressão ou transversais à direção do cabo.

O cabo ou fio ao passar pela polia altera a sua direção. O cabo sempre tangencia a polia. Obtemos assim a direção da força diretamente da geometria do problema. Normalmente teremos o centro da polia articulado (normalmente uma articulação plana).





Exercício 5 – Forças em fios e polias

Resolvendo, equações de equilíbrio para a polia:

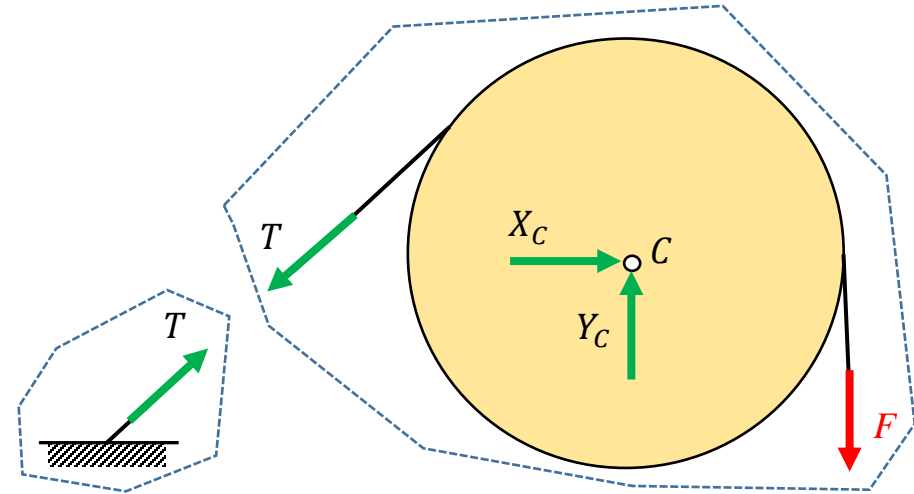
$$\sum F_x = 0 \therefore X_C - \frac{\sqrt{2}}{2}T = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_C - \frac{\sqrt{2}}{2}T - F = 0$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore T.R - F.R = 0 \Rightarrow T = F$$



$$\Rightarrow X_C = \frac{\sqrt{2}}{2}F \Rightarrow Y_C = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)F$$



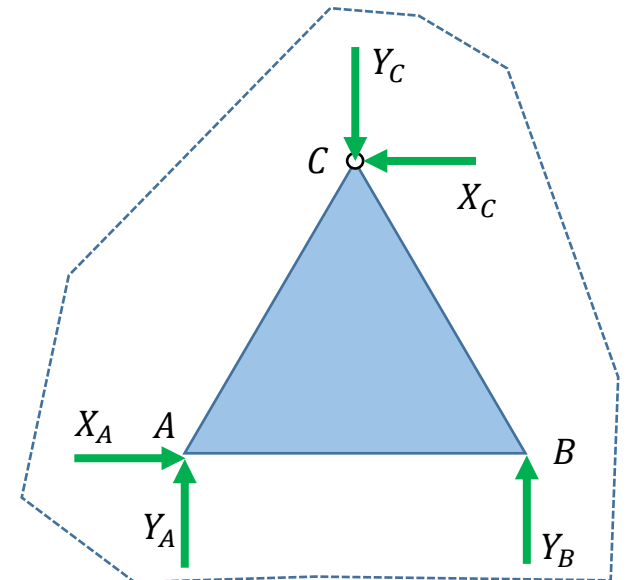
Equações de equilíbrio para a chapa triangular:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_C = 0 \Rightarrow X_A = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B - Y_C = 0$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore -Y_C \cdot \frac{b}{2} + X_C \cdot h + Y_B \cdot b = 0 \Rightarrow Y_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}h}{2b}\right)F$$

$$\Rightarrow Y_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}h}{2b}\right)F$$





Exercício 5 – Forças em fios e polias (continuação)

$$T = F$$

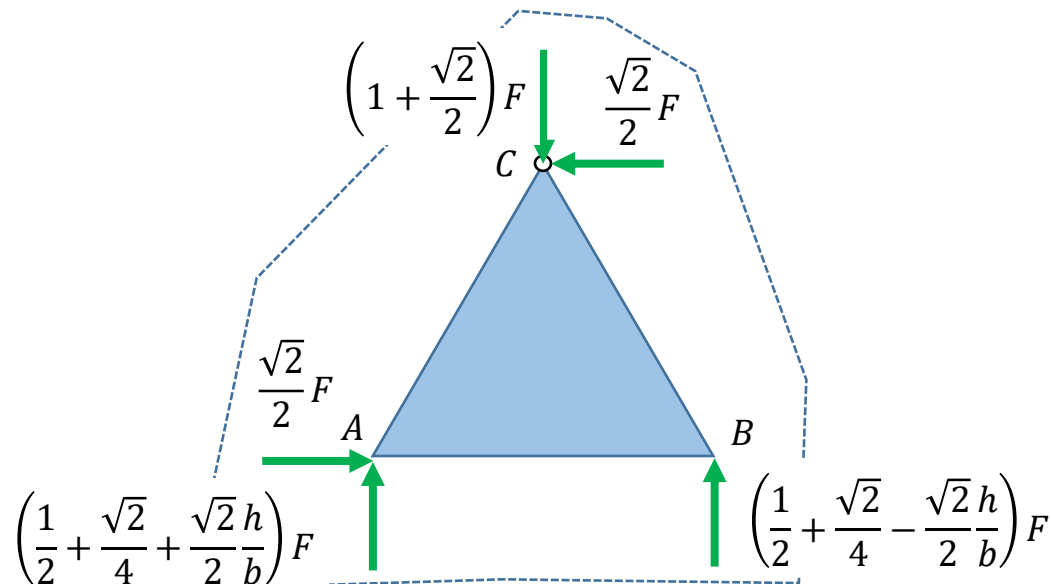
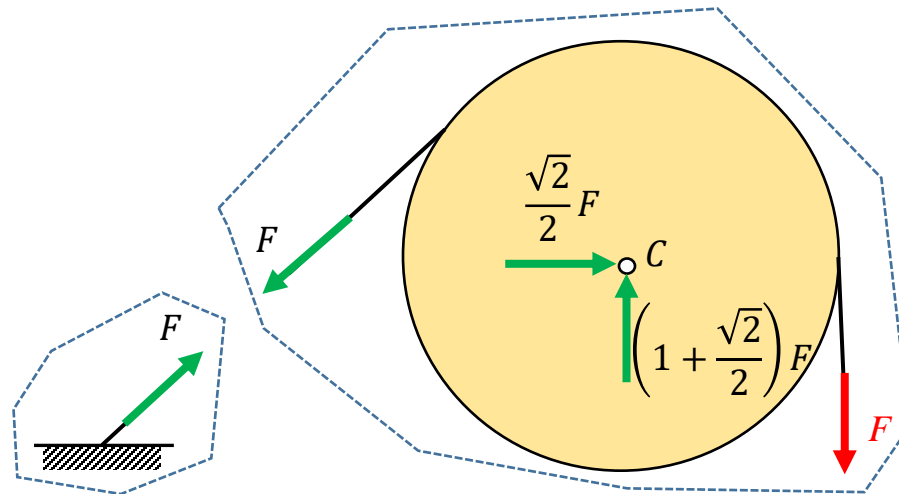
$$X_C = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$Y_C = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) F$$

$$X_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$Y_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}h}{2b}\right) F$$

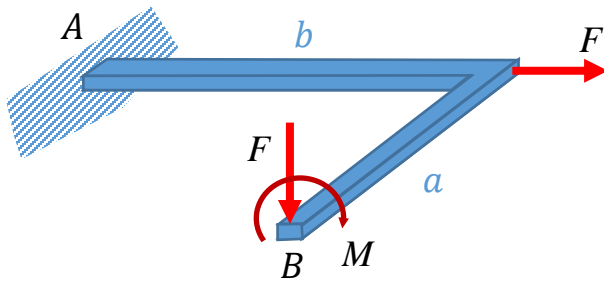
$$Y_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}h}{2b}\right) F$$





Exercício 6

Determine as reações no engaste.



Resolva numericamente para:

$$a = 2 \text{ [m]}$$

$$b = 3,5 \text{ [m]}$$

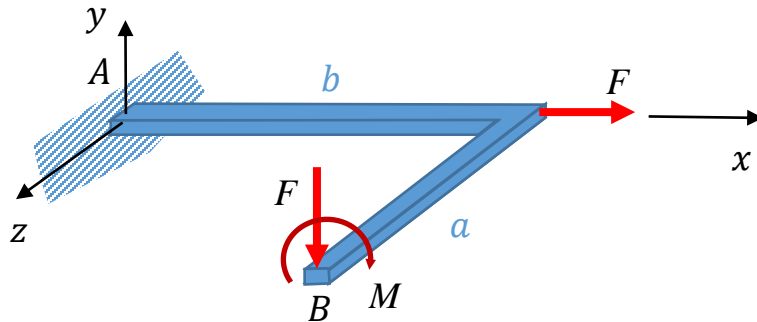
$$F = 1000 \text{ [N]}$$

$$M = 350 \text{ [Nm]}$$



Exercício 6 (continuação)

Determine as reações no engaste.



$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + F = 0 \Rightarrow \boxed{X_A = -F}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A - F = 0 \Rightarrow \boxed{Y_A = F}$$

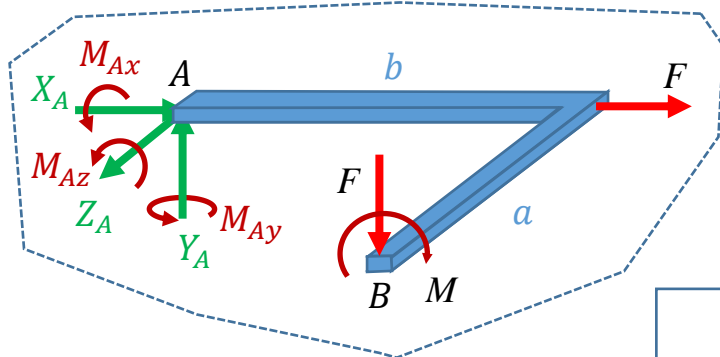
$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A = 0 \Rightarrow \boxed{Z_A = 0}$$

$$\sum M_{xA} = 0 \therefore F \cdot a + M_{Ax} = 0 \Rightarrow \boxed{M_{Ax} = -F \cdot a}$$

$$\sum M_{yA} = 0 \therefore M_{Ay} = 0 \Rightarrow \boxed{M_{Ay} = 0}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore -F \cdot b - M + M_{Az} = 0 \Rightarrow \boxed{M_{Az} = M + F \cdot b}$$

DCL



Obs.: Alternativamente, para quem preferir, obtendo as equações dos momentos de forma vetorial:

$$\vec{M}_A = (B - A) \wedge (-F\vec{j}) + (C - A) \wedge (F\vec{i}) - M\vec{k} + M_{Ax}\vec{i} + M_{Ay}\vec{j} + M_{Az}\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A = (F \cdot a + M_{Ax})\vec{i} + M_{Ay}\vec{j} + (-F \cdot b - M + M_{Az})\vec{k} = \vec{0}$$



Exercício 6 (continuação)

$$X_A = -F$$

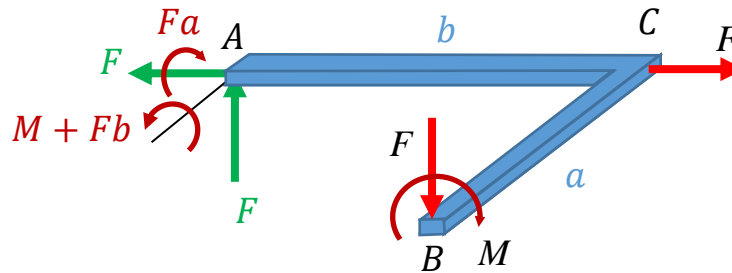
$$Y_A = F$$

$$Z_A = 0$$

$$M_{Ax} = -F \cdot a$$

$$M_{Ay} = 0$$

$$M_{Az} = M + F \cdot b$$



Resolvendo numericamente para:

$$a = 2 \text{ [m]}$$

$$b = 3,5 \text{ [m]}$$

$$F = 1000 \text{ [N]}$$

$$M = 350 \text{ [Nm]}$$

$$X_A = -1000 \text{ [N]}$$

$$Y_A = 1000 \text{ [N]}$$

$$Z_A = 0$$

$$M_{Ax} = -2000 \text{ [Nm]}$$

$$M_{Ay} = 0$$

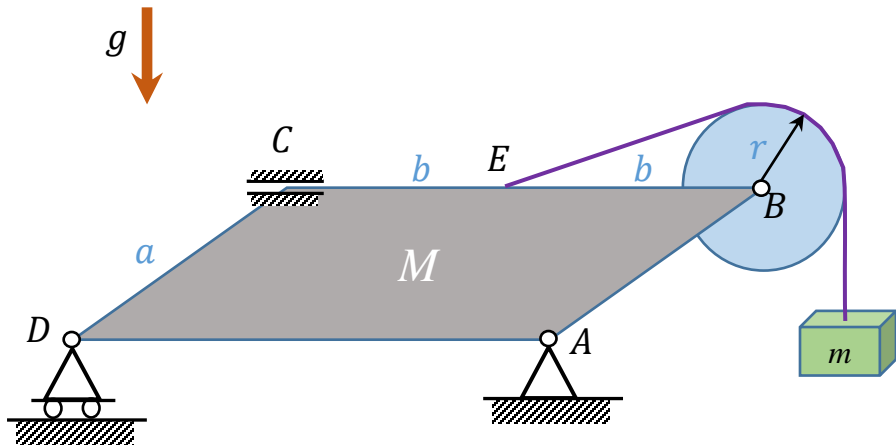
$$M_{Az} = 3850 \text{ [Nm]}$$



Exercício 7

Para a placa ABCD de massa M , articulada em A, apoiada em D, com um anel em C e a polia, de peso desprezível, articulada em B, sustentando um corpo de massa m por meio de um fio ideal, pede-se:

- o DCL do sistema explodido;
- as reações nos vínculos externos;
- as forças que a polia descarrega na placa;
- a tração no fio.



Resolva numericamente para:

$$r = 0,7 \text{ [m]}$$

$$a = 2 \text{ [m]}$$

$$b = 3 \text{ [m]}$$

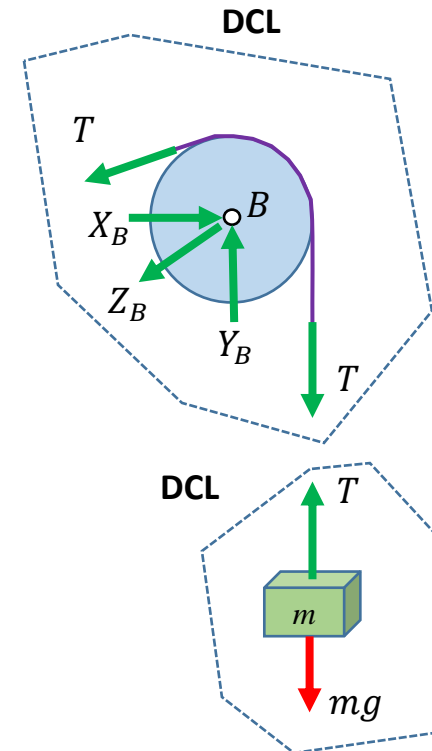
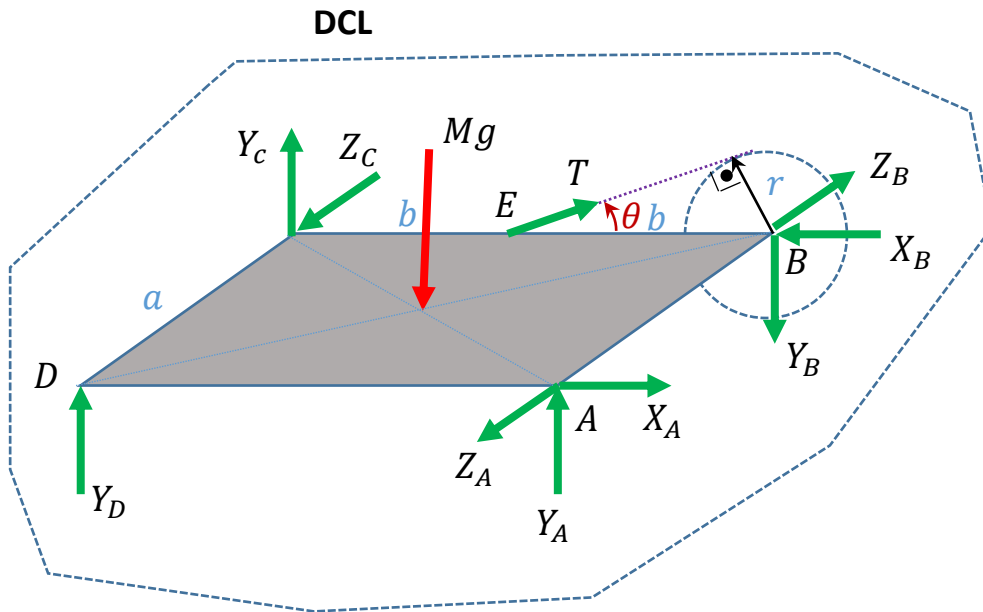
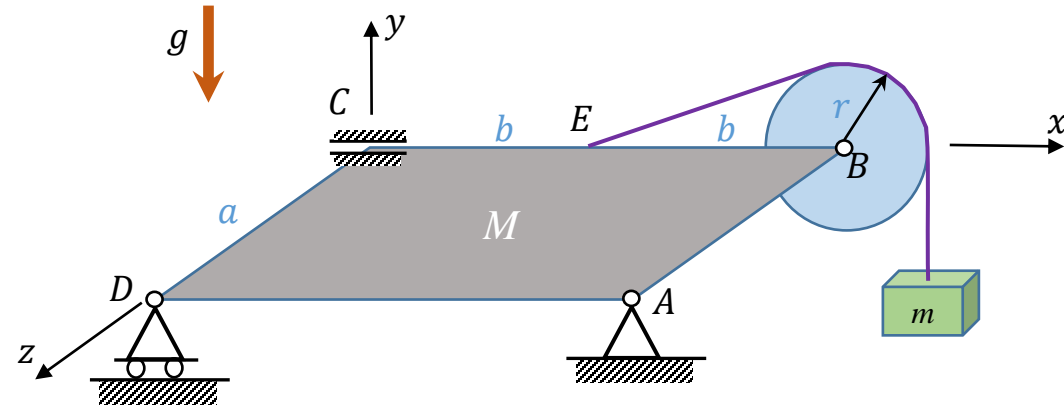
$$M = 50 \text{ [kg]}$$

$$m = 75 \text{ [kg]}$$

$$g = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$



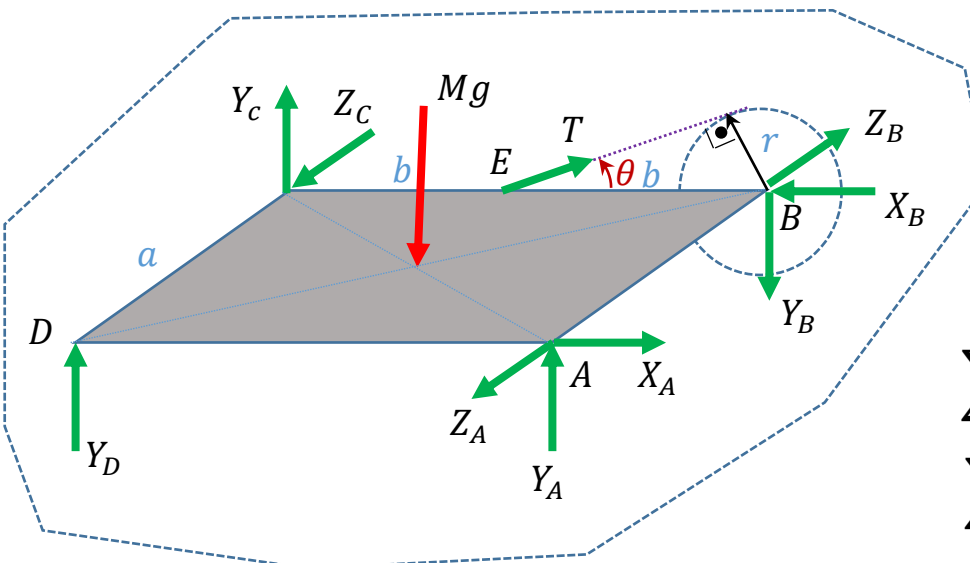
Exercício 7 (continuação)





Exercício 7 (continuação)

DCL



$$\theta = \arcsen \frac{r}{b}$$

Na carga de massa m :

$$\sum F_y = 0 \therefore T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$$

Na polia:

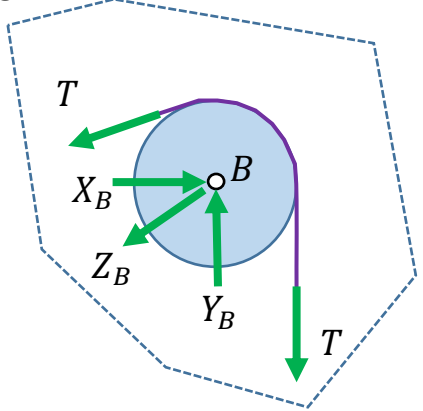
$$\sum F_x = 0 \therefore X_B - T \cos \theta = 0 \Rightarrow X_B = mg \cos \theta$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - T - T \sin \theta = 0 \Rightarrow Y_B = mg(1 + \sin \theta)$$

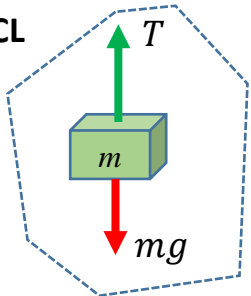
$$\sum F_z = 0 \therefore Z_B = 0 \Rightarrow Z_B = 0$$

$$\sum M_{zB} = 0 \therefore T \cdot r - T \cdot r = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

DCL



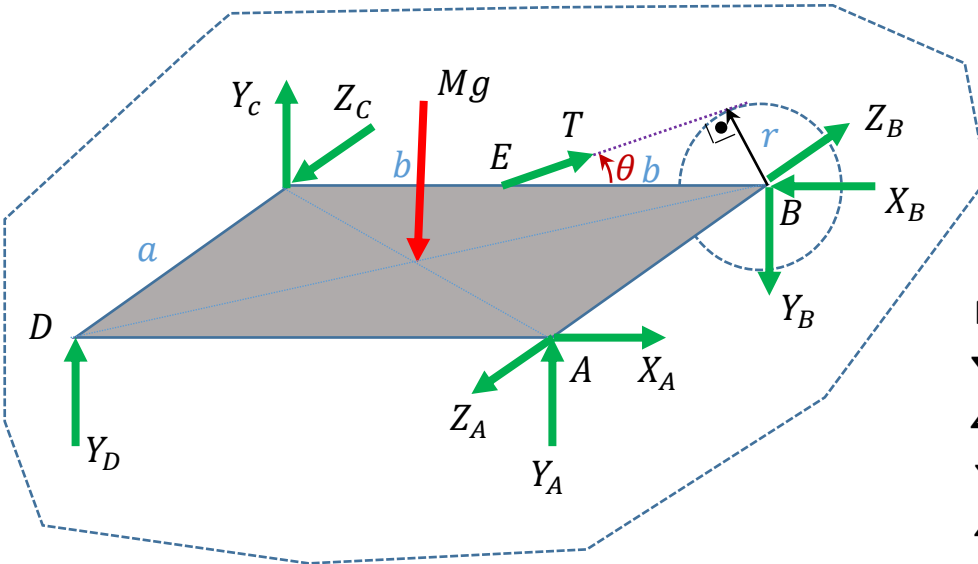
DCL





Exercício 7 (continuação)

DCL



Na placa:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_B + T \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_D + Y_A - Y_B + T \sin \theta + Y_C - Mg = 0$$

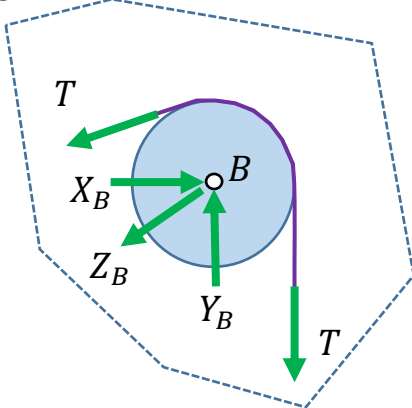
$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A - Z_B + Z_C = 0$$

$$\sum M_{x_C} = 0 \therefore -Y_D \cdot a - Y_A \cdot a + Mg \cdot \frac{a}{2} = 0$$

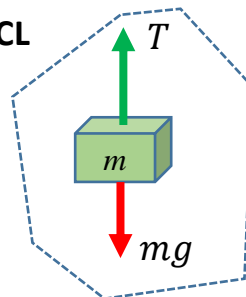
$$\sum M_{y_C} = 0 \therefore X_A \cdot a - Z_A \cdot 2b + Z_B \cdot 2b = 0$$

$$\sum M_{z_C} = 0 \therefore Y_A \cdot 2b - Y_B \cdot 2b + T \sin \theta \cdot b - Mg \cdot b = 0$$

DCL



DCL





Exercício 7 (continuação)

Resolvendo o sistema de equações, sendo que:

$$\theta = \arcsen \frac{r}{b} \quad T = mg$$

$$X_B = mg \cos \theta \quad Y_B = mg(1 + \text{sen} \theta) \quad Z_B = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_B + T \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_D + Y_A - Y_B + T \text{sen} \theta + Y_C - Mg = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A - Z_B + Z_C = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_{x_C} = 0 \therefore -Y_D \cdot a - Y_A \cdot a + Mg \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{y_C} = 0 \therefore X_A \cdot a - Z_A \cdot 2b + Z_B \cdot 2b = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{z_C} = 0 \therefore Y_A \cdot 2b - Y_B \cdot 2b + T \text{sen} \theta \cdot b - Mg \cdot b = 0 \quad (6)$$

de(1): $X_A = 0$

de(5): $Z_A = 0$

de(3): $Z_C = 0$

de(6):
$$Y_A = mg \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen} \theta \right) + \frac{1}{2} Mg$$

de(4):
$$Y_D = -mg \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen} \theta \right)$$

de(2):
$$Y_C = mg + \frac{1}{2} Mg$$



Exercício 7 (continuação)

Resolvendo o sistema de equações, sendo que:

$$\theta = \arcsen \frac{r}{b} \quad T = mg$$

$$X_B = mg \cos \theta \quad Y_B = mg(1 + \text{sen} \theta) \quad Z_B = 0$$

$$X_A = 0$$

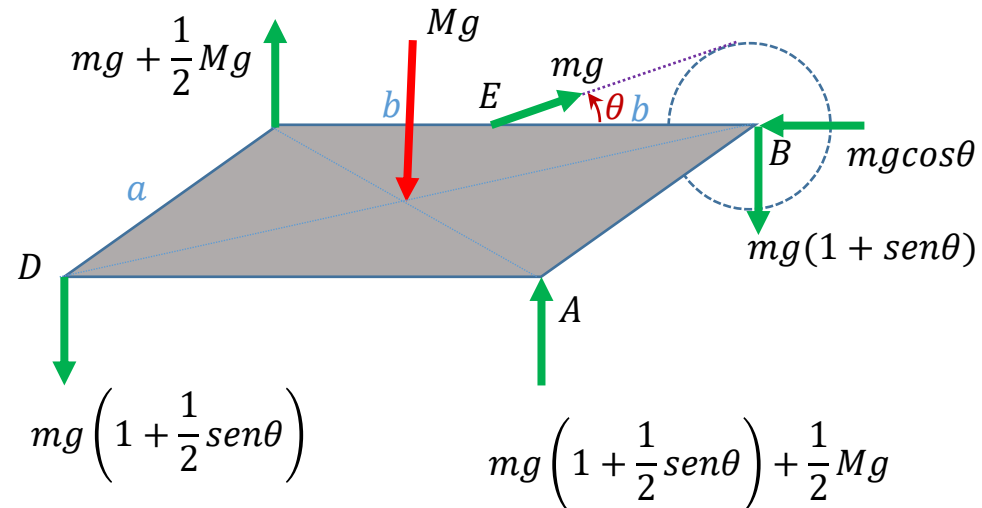
$$Z_A = 0$$

$$Z_C = 0$$

$$Y_A = mg \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen} \theta \right) + \frac{1}{2} Mg$$

$$Y_D = -mg \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen} \theta \right)$$

$$Y_C = mg + \frac{1}{2} Mg$$





Exercício 7 (continuação)

Resolvendo numericamente para:

$$r = 0,7 [m]$$

$$a = 2 [m]$$

$$b = 3 [m]$$

$$M = 50 [kg]$$

$$m = 75 [kg]$$

$$g = 9,81 [m/s^2]$$

$$\theta = \arcsen \frac{r}{b}$$

$$T = mg$$

$$X_B = mg \cos \theta$$

$$Y_B = mg(1 + \text{sen} \theta)$$

$$Z_B = 0$$

$$X_A = 0$$

$$Z_A = 0$$

$$Z_C = 0$$

$$Y_A = mg \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen} \theta \right) + \frac{1}{2} Mg$$

$$Y_D = -mg \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen} \theta \right)$$

$$Y_C = mg + \frac{1}{2} Mg$$

$$\theta = 0,236 \text{ rad} = 13,5^\circ$$

$$T = 736 [N]$$

$$X_B = 715 [N]$$

$$Y_B = 907 [N]$$

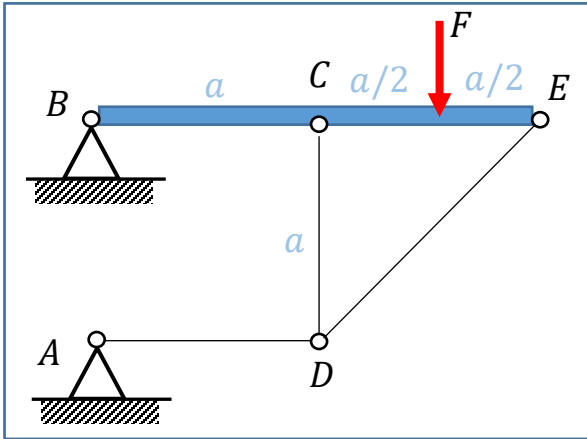
$$Y_A = 1067 [N]$$

$$Y_D = -822 [N]$$

$$Y_C = 613 [N]$$

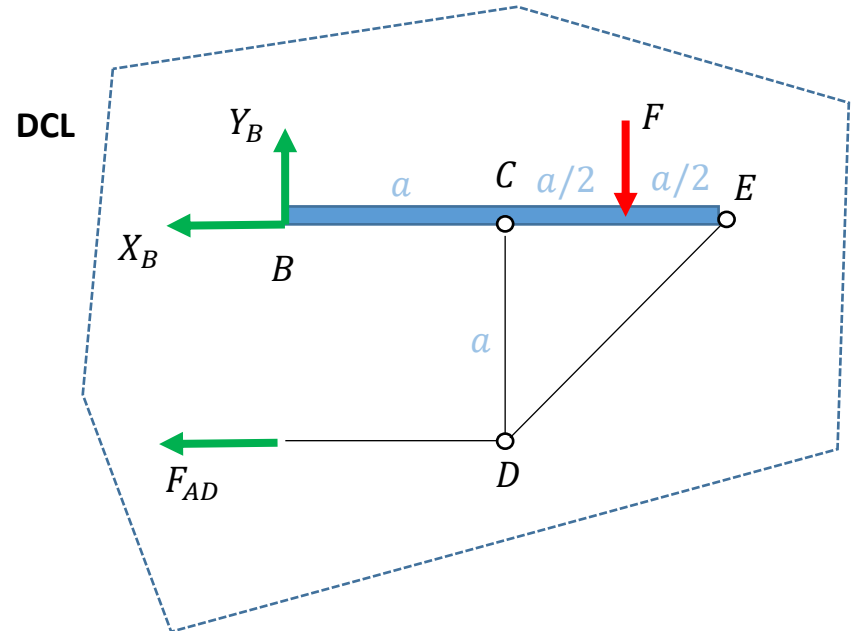
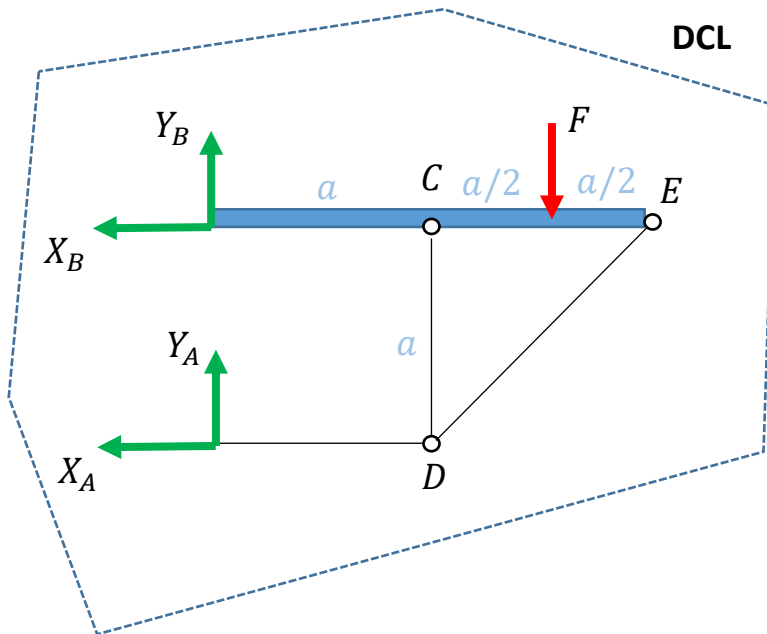
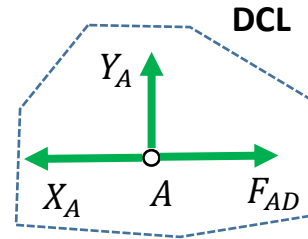


Exercício 8



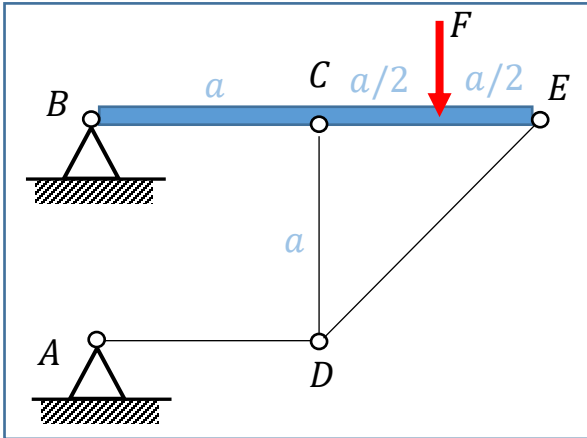
Faça o diagrama de corpo livre da estrutura.

Aparentemente hiperestático, mas a barra AD é uma barra de treliça e assim conclui-se que a reação em A é apenas horizontal e igual à força na barra AD:





Exercício 8



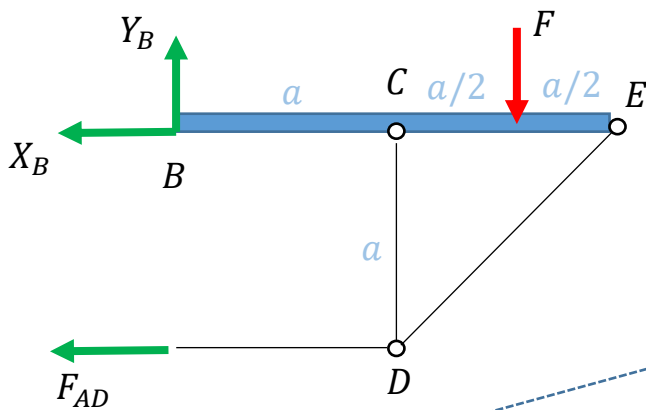
Calcule as forças de reação em A e B:

$$\sum F_x = 0 \therefore -X_B - F_{AD} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - F = 0 \Rightarrow Y_B = F$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore X_B \cdot a - F \cdot \frac{3a}{2} = 0 \Rightarrow X_B = \frac{3F}{2}$$

DCL

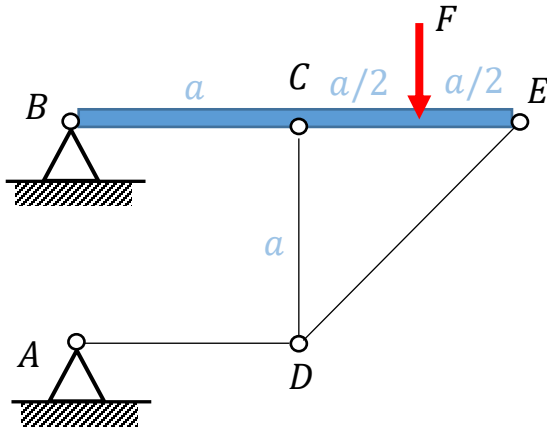


Substituindo em (1):

$$F_{AD} = -\frac{3F}{2}$$



Exercício 8



Barra BCE é uma barra de treliça? <S> ou <N>

Não, pois tem cargas intermediárias.

Barra AD é uma barra de treliça? <S> ou <N>

Sim, tem extremidades articuladas e sem carga intermediária.

Barra CD é uma barra de treliça? <S> ou <N>

Sim, tem extremidades articuladas e sem carga intermediária.

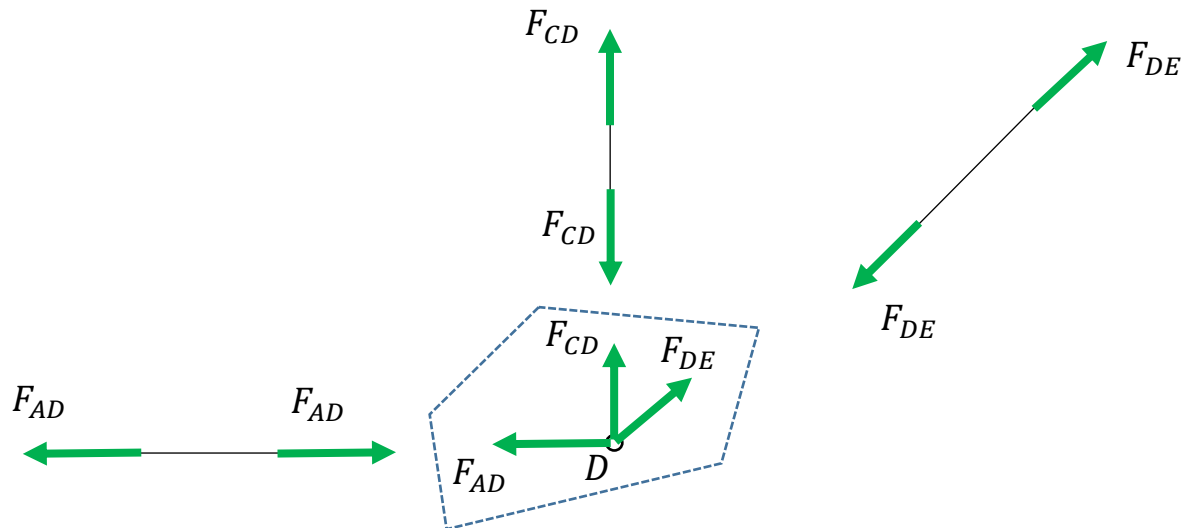
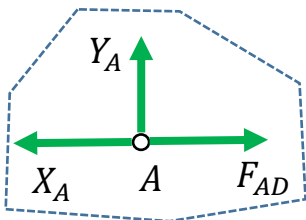
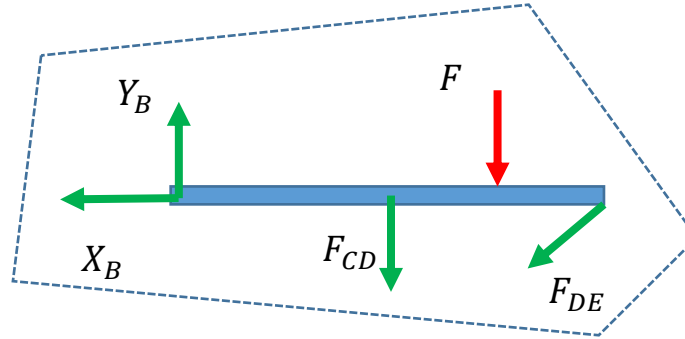
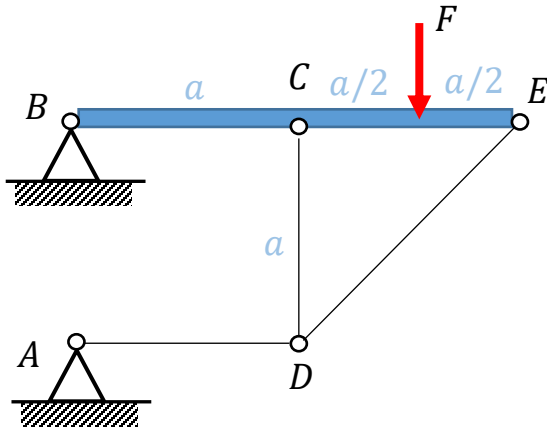
Barra DE é uma barra de treliça? <S> ou <N>

Sim, tem extremidades articuladas e sem carga intermediária.



Exercício 8

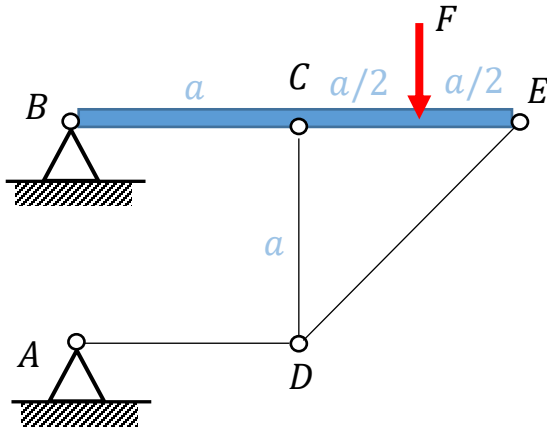
Faça os diagramas de corpo livre da estrutura explodida:





Exercício 8

Calcule as forças atuantes nas barras AD, DC, DE e BCE, indicando se de tração ou compressão quando for pertinente:



Temos já calculados:

$$Y_B = F$$

$$X_B = \frac{3F}{2}$$

$$F_{AD} = -\frac{3F}{2}$$

(C) compressão

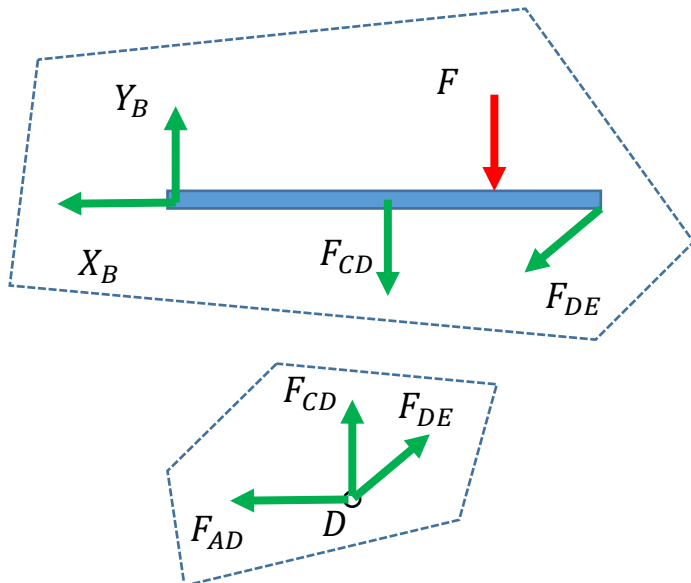
Do equilíbrio do nó D:

$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{DE} = 0 \Rightarrow F_{DE} = -\frac{3\sqrt{2}F}{2}$$

(C) compressão

$$\sum F_y = 0 \therefore F_{CD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{DE} = 0 \Rightarrow F_{CD} = \frac{3F}{2}$$

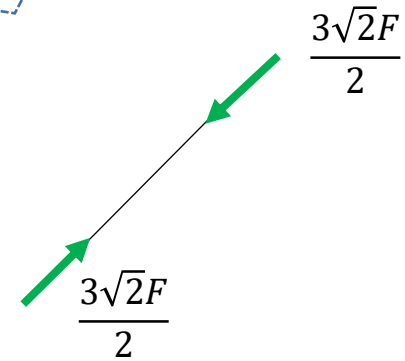
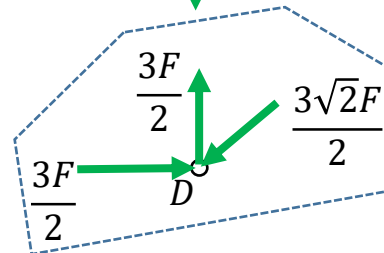
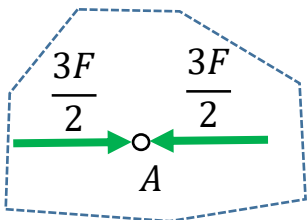
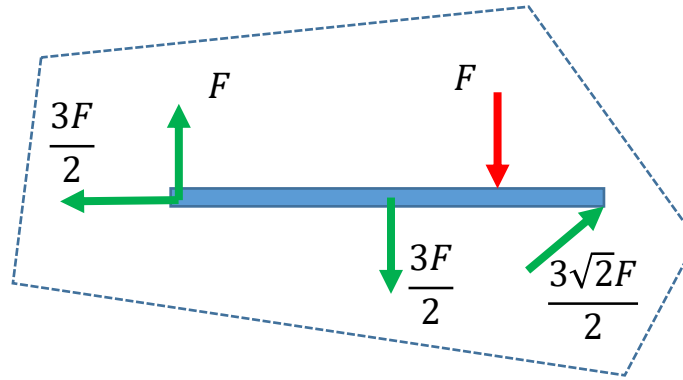
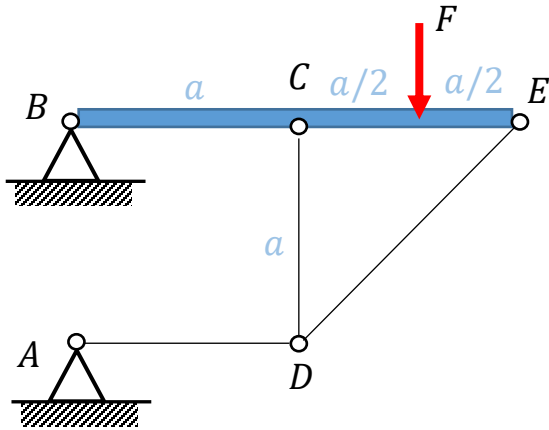
(T) tração





Exercício

Resultado:





Duvidem
Pensem
Comuniquem
 Perguntem
Cometam erros
Aprendam dos seus erros
... e mais importante,
Tenham alegria em aprender.

Estupidez:
Você pensa que sabe tudo, sem questionar.

Inteligência:
Você questiona tudo que você pensa que sabe.

Aproveite cada minuto,
porque o tempo não volta...
O que volta é a vontade de voltar no tempo.