ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1
Sistemas de Forças
Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

Conteúdo

Simbologia

$\vec{F}$ $Força$

$\vec{R}$ $Resultante\ de\ um\ sistema\ de\ forças$

I $Invariante\ escalar\ de\ um\ sistema\ de\ forças$

$\vec{M}_O$ $Momento\ de\ uma\ força\ (ou\ de\ um\ sistema\ de\ forças)\ em\ relação\ a\ um\ pólo\ O$

M_u $Momento\ de\ uma\ força\ (ou\ de\ um\ sistema\ de\ forças)\ em\ relação\ a\ um\ eixo\ O\vec{u}$

G $Baricentro$

m_i $massa\ do\ ponto\ i$

M $massa\ total\ do\ sistema$

$\vec{g}$ $aceleração\ da\ gravidade\ (também\ g\ tomado\ como\ módulo)$

$\mathbb{V}$ $volume$

$\mathbb{A}$ $área$

ℓ $linha$

ρ $massa\ específica$

Unidades no SI (Sistema Internacional de Unidades)

$\vec{F}$	Força	[N]	Newton
$\vec{M}_O$	Momento de força	[Nm]	Newton.metro
M_u	Momento de força em relação a eixo	[Nm]	Newton.metro
$(P - O)$	Vetor Posição	[m]	metro
x	Coordenada de posição, distância ou deslocamento	[m]	metro

Formulário

$$(\vec{F}, P)$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$

$$(H - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda \vec{R} \quad com \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}$$

$$\left|\vec{M}_H\right| = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}$$

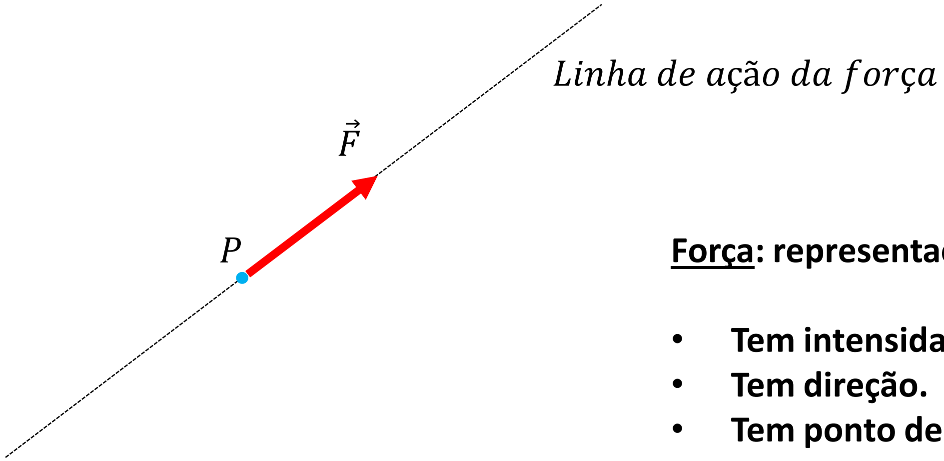
$$(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} h_i}$$

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{M}$$

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} M_x \vec{\imath} + \sum_{i=1}^{N} M_y \vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{N} M_z \vec{k}$$

Definição de Força



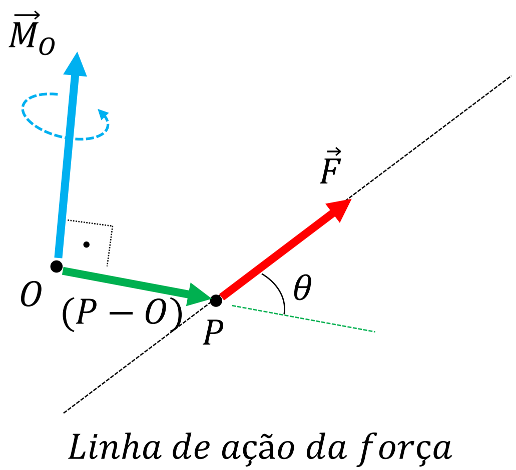
<u>Força</u>: representação da ação de um corpo sobre outro.

- **Tem intensidade.**
- **Tem direção.**
- **Tem ponto de aplicação.**

É bem representado matematicamente por um par vetor e ponto de aplicação:

$$\boxed{(\vec{F}, P)}$$

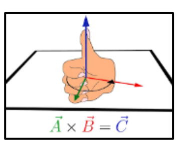
Definição de Momento de uma Força em Relação a um Polo



<u>Momento de uma força em relação a um polo</u>: representação da tendência que uma força tem de fazer o corpo passar a girar em relação a um ponto.

- Tem intensidade.
- Tem sentido de rotação.
- Quanto mais longe a linha de ação da força estiver em relação ao polo maior é o efeito da tendência de girar.
- Efeito depende apenas da linha de ação da força e não do ponto de aplicação da mesma, isto é, a força pode ser deslocada em cima da sua linha de ação que o efeito continua o mesmo.
- Invertendo a força inverte-se o sentido de rotação.

É bem representado matematicamente por um vetor resultado de um produto vetorial:



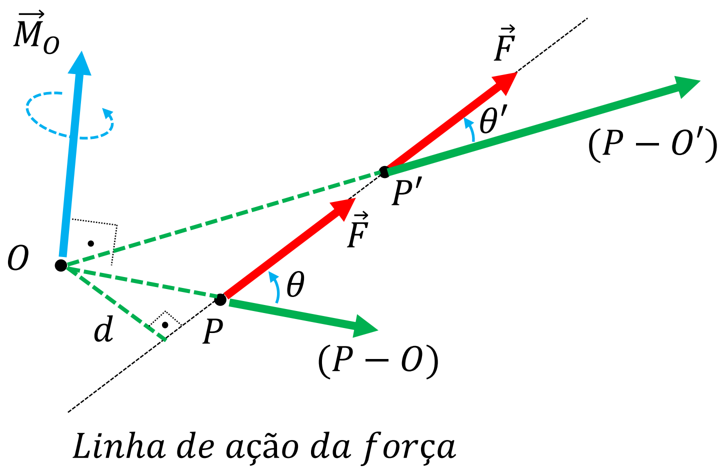
$$\boxed{\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}} \qquad \left|\vec{M}_O\right| = |(P-O)|\left|\vec{F}\right| sen\theta$$

É um vetor livre no espaço. Apenas por convenção costuma-se representá-lo graficamente com origem no polo considerado.

É simultaneamente ortogonal à força e ao vetor *(P - O)*.

A direção do vetor indica o eixo em relação ao qual surgiria o efeito de rotação e o sinal indica o sentido deste efeito de rotação utilizando-se a <u>regra da mão direita</u>.

Definição de Momento de uma Força em Relação a um Polo



- **Demonstração de que o efeito depende apenas da linha de ação da força e não do ponto de aplicação da mesma, isto é, que a força pode ser deslocada em cima da sua linha de ação que o efeito continua o mesmo:**

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$
$$|\vec{M}_O| = |P - O||\vec{F}|sen\theta = |\vec{F}|.d$$

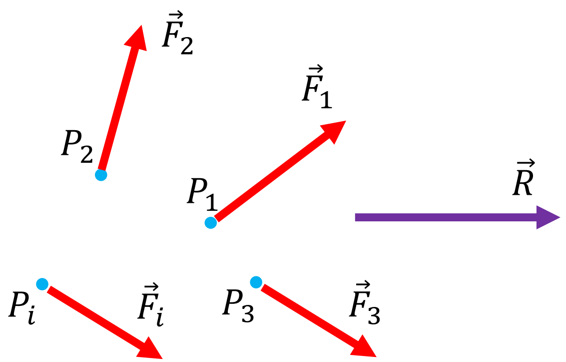
- **Deslocando a força em cima da sua linha de ação chegamos no mesmo resultado:**

$$\vec{M}_O = (P' - O) \wedge \vec{F}$$
$$|\vec{M}_O| = |P' - O||\vec{F}|sen\theta' = |\vec{F}|.d$$

Define-se aqui " d " como sendo o "braço da força", qual seja, a distância da linha de ação da força até o polo considerado

$$d = |P - O|sen\theta = |P' - O|sen\theta'$$

Definição de um Sistema de Forças – Resultante de um Sistema de Forças



<u>Sistema de Forças</u>: é um simples conjunto de forças.

<u>Resultante de um Sistema de Forças</u>: é a simples soma vetorial das forças que compõe o sistema.

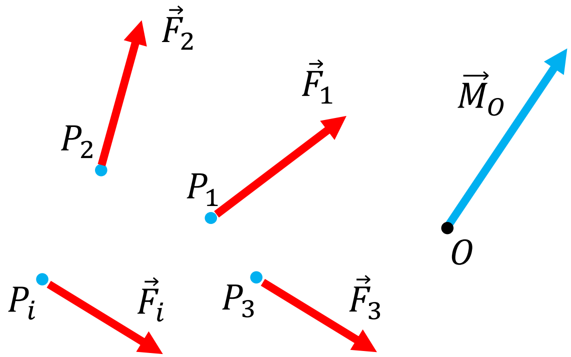
- **Observe que a Resultante definida desta forma NÃO é uma força pois não tem ponto de aplicação, isto é, é um vetor livre no espaço.**

Algebricamente:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$$

Onde N é a quantidade de forças envolvidas no sistema.

Momento de um Sistema de Forças em relação a um Polo



<u>Momento de um Sistema de Forças em relação a um Polo</u>: é a simples soma vetorial do momento de cada força em relação àquele Polo.

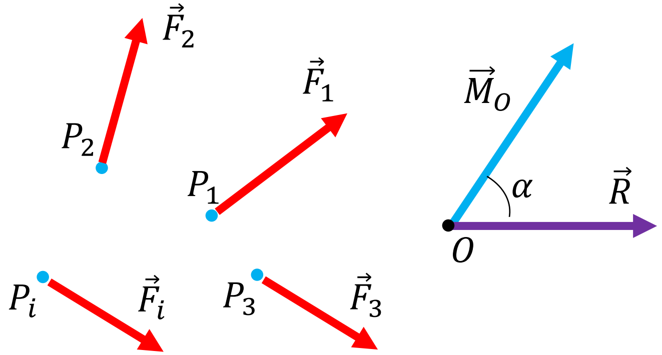
Algebricamente:

$$\boxed{\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{Oi}$$

Onde N é a quantidade de forças envolvidas no sistema.

É um vetor livre no espaço. Apenas por convenção costuma-se representá-lo graficamente com origem no polo considerado.

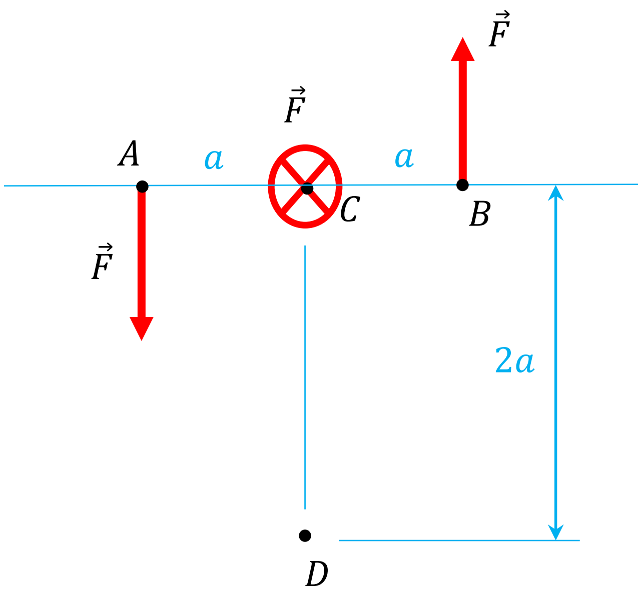
O momento de cada força em relação ao polo é ortogonal a ela.
Entretanto, <u>o momento do sistema de forças em relação ao polo forma um ângulo qualquer com a direção da resultante do sistema de forças!</u>
O ângulo α é qualquer!



Exemplo 1

Apenas para exemplificar que o momento de sistema de forças em relação a um polo pode formar um ângulo qualquer em relação à direção a resultante (isto é, não necessariamente ortogonal), considere o sistema de forças ilustrado constituído por 3 forças.

Veja que, para esta situação ilustrada tomada como exemplo, o momento do sistema de forças calculado em relação a diversos polos assume diversos ângulos em relação à direção da resultante, sendo que, quando calculado em relação ao ponto B, resulta até paralelo à direção da resultante.



$$(-F\vec{j}, A) \quad , \qquad (F\vec{j}, B) \quad , \qquad (-F\vec{k}, C)$$

$$\vec{R} = -F\vec{j} + F\vec{j} - F\vec{k} \qquad \boxed{\vec{R} = -F\vec{k}} \qquad \vec{R}$$

$$\vec{M}_A = a\vec{i} \wedge \left(-F\vec{k}\right) + 2a\vec{i} \wedge (F\vec{j}) = aF\vec{j} + 2aF\vec{k}$$

$$\vec{M}_C = -a\vec{i} \wedge (-F\vec{j}) + a\vec{i} \wedge (F\vec{j}) = 2aF\vec{k} \qquad \vec{M}_C$$

$$\vec{M}_B = -2a\vec{i} \wedge (-F\vec{j}) - a\vec{i} \wedge \left(-F\vec{k}\right) = -aF\vec{j} + 2aF\vec{k}$$

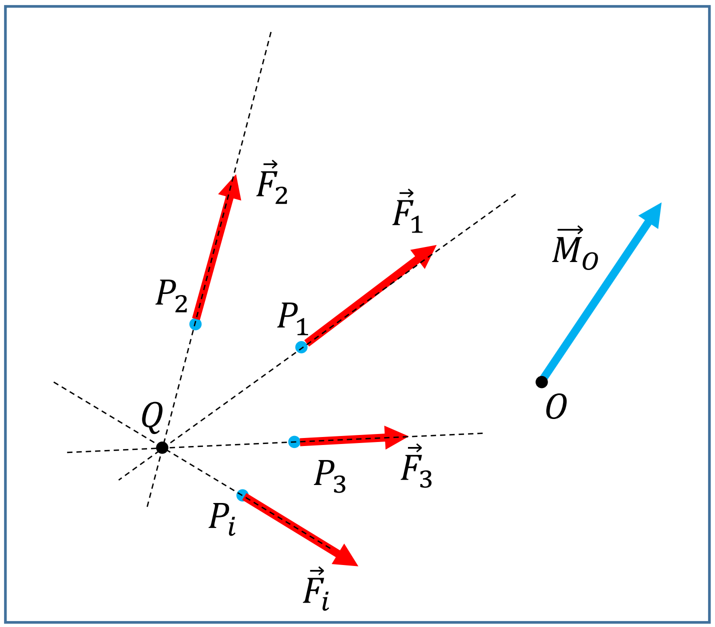
$$\vec{M}_D = (-a\vec{i} + 2a\vec{j}) \wedge (-F\vec{j}) + 2a\vec{j} \wedge \left(-F\vec{k}\right) + (a\vec{i} + 2a\vec{j}) \wedge (F\vec{j}) = -2aF\vec{i} + 2aF\vec{k}$$

Sistema de Forças Concorrentes – Teorema de Varignon

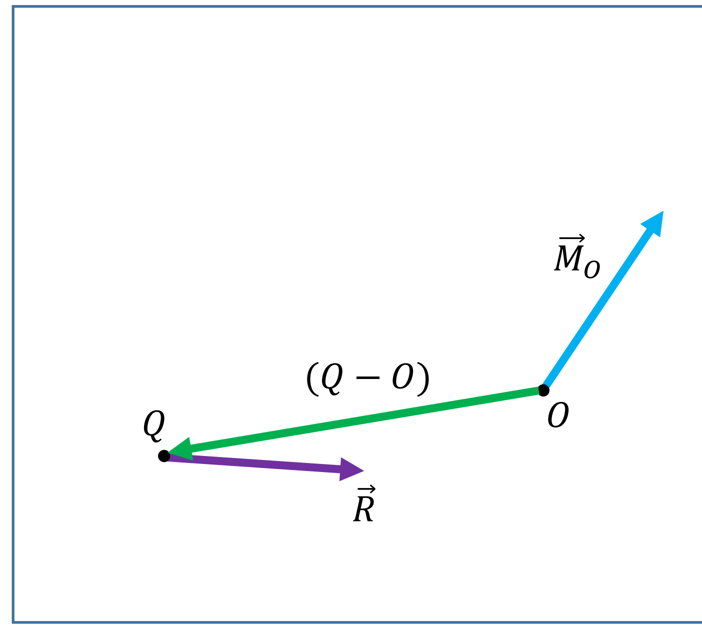
Forças concorrentes são aquelas cujas linhas de ação tem um ponto de concorrência Q em comum.

Teorema de Varignon: "O momento de um sistema de forças concorrentes em relação a um determinado polo pode ser dado pelo momento da resultante, suposta aplicada no ponto de concorrência das forças, calculado em relação ao mesmo polo".

As forças podem ser deslocadas em cima de suas linhas de ação até que seus pontos de aplicação coincidam no ponto de concorrência.



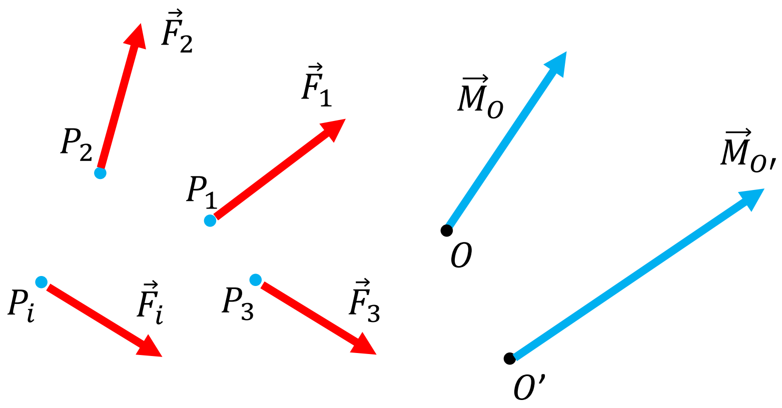
$\equiv$



$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N}(P_i - O)\wedge\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}(Q-O)\wedge\vec{F}_i = (Q-O)\wedge\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \Longrightarrow \boxed{\vec{M}_O = (Q-O)\wedge\vec{R}}$$

Fórmula de Mudança de Polo para o momento de um sistema de forças

Digamos que já calculamos o momento de um sistema de forças em relação a um polo e queiramos conhecer agora o momento em relação a um novo polo. Ou calculamos novamente pela definição ou podemos utilizar a fórmula que segue, que calcula o momento em relação ao novo polo em função daquele momento já conhecido.



$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O') \wedge \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (P_i - O + O - O') \wedge \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} (O - O') \wedge \vec{F}_i$$

$$= \vec{M}_O + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}}$$

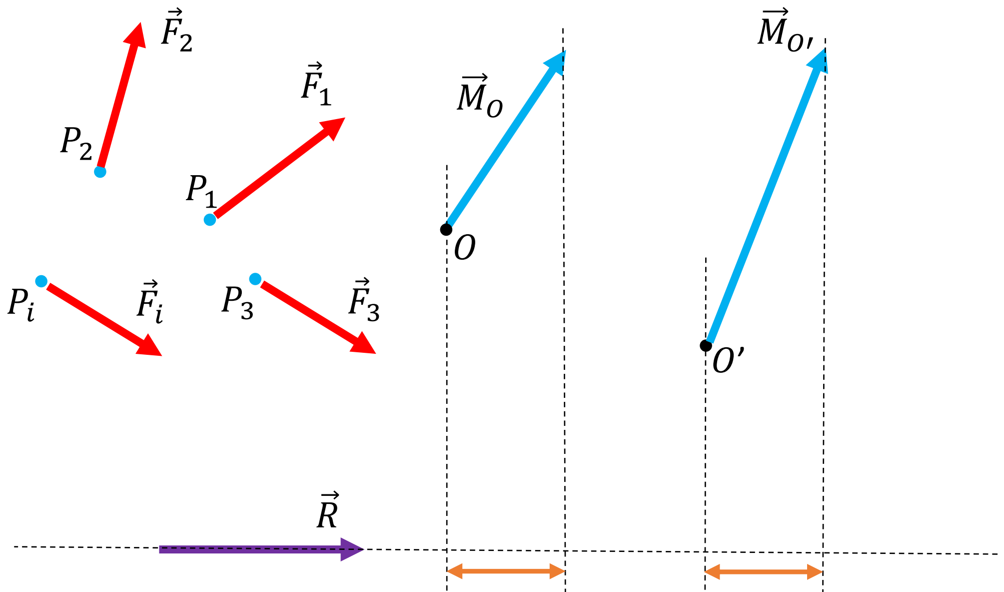
Pela fórmula de mudança de polo verifica-se facilmente que, <u>quando a resultante é nula</u>, o momento é invariante para mudança de polo.

$$\boxed{quando\ \vec{R} = \vec{0}\,,\ \ \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O}$$

Invariante escalar do momento de um sistema de forças

“A projeção do momento de um sistema de forças em relação a um polo qualquer na direção da resultante é um invariante”.

Em outras palavras: Mudando-se o polo, muda-se o momento do sistema de forças, entretanto a projeção do novo momento na direção da resultante permanece a mesma!



$$\vec{M}_O \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \equiv \vec{M}_{O'} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Da fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

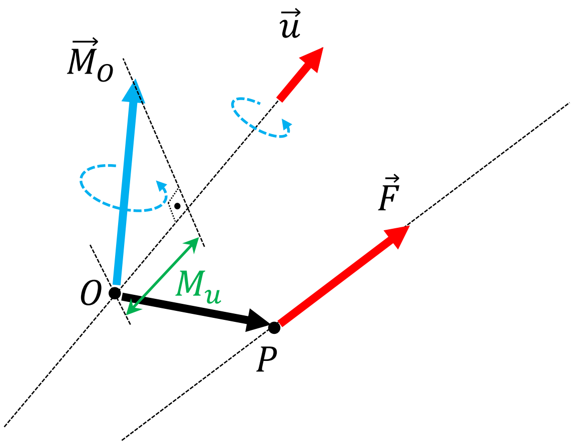
$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + (O - O') \wedge \vec{R} \cdot \vec{R}$$

$$\boxed{\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I}$$

$$I \quad (Invariante\ escalar)$$

Volte ao exemplo 1 e confira o invariante escalar dos diversos cálculos de momento em relação a diferentes polos. A componente na direção da resultante mantém-se inalterada!

Definição de Momento de uma Força em Relação a um Eixo



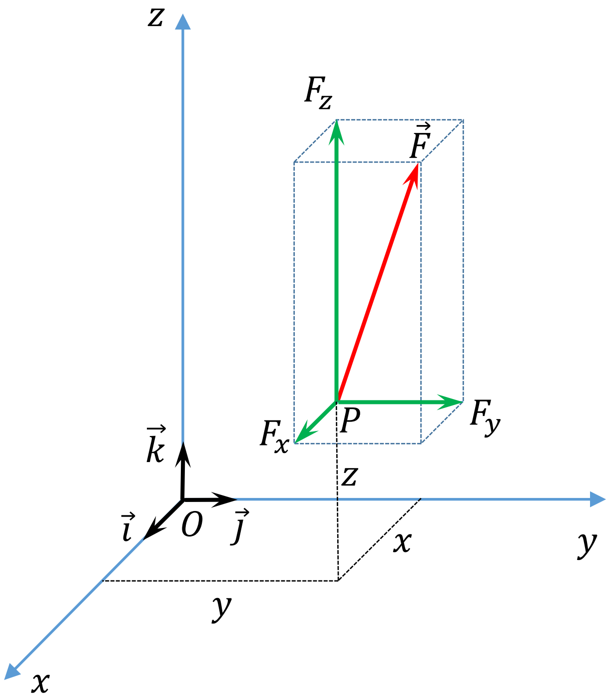
<u>Momento de uma força em relação a um eixo</u>: representação da tendência que uma força tem de fazer o corpo passar a girar em relação a um eixo.

- **Tem intensidade.**
- **Tem sentido de rotação.**
- **Quanto mais longe a linha de ação da força estiver em relação ao eixo maior é o efeito da tendência de girar.**
- **Efeito depende apenas da linha de ação da força e não do ponto de aplicação da mesma, isto é, a força pode ser deslocada em cima da sua linha de ação que o efeito continua o mesmo.**
- **Invertendo a força inverte-se o sentido de rotação.**

É dado por: $\boxed{M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}}$

É uma grandeza escalar.
Um valor positivo indica efeito de rotação no sentido positivo do versor do eixo utilizando-se a <u>regra da mão direita</u>. Um valor negativo indica efeito de rotação no sentido contrário ao do versor do eixo.

Momento de uma Força em Relação a um Eixo (continuação)



$$(\vec{F}, P) \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$P = P(x, y, z)$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_O = xF_y\vec{k} - xF_z\vec{j} - yF_x\vec{k} + yF_z\vec{i} + zF_x\vec{j} - zF_y\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}}$$

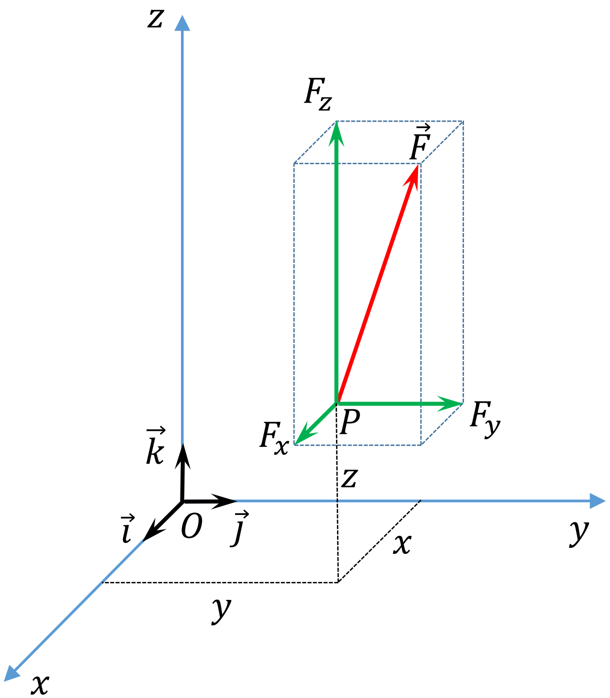
$$\boxed{\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}}$$

Conclui-se que, para uma decomposição da força segundo um sistema de eixos ortogonais:

- **se a componente da força é paralela ao eixo considerado, ela não causa momento em relação a ele;**
- **se a linha de ação da componente da força cruzar o eixo (braço nulo), ela não causa momento em relação a ele;**
- **o momento de uma força em relação a um eixo é dado pelo módulo da força multiplicado pelo seu braço;**
- **o sinal é positivo ou negativo, dado pela regra da mão direita, indicando o sentido da tendência a girar.**

Momento de uma Força em Relação a um Eixo (continuação)



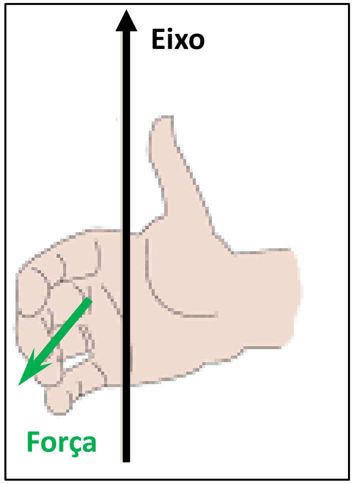
$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

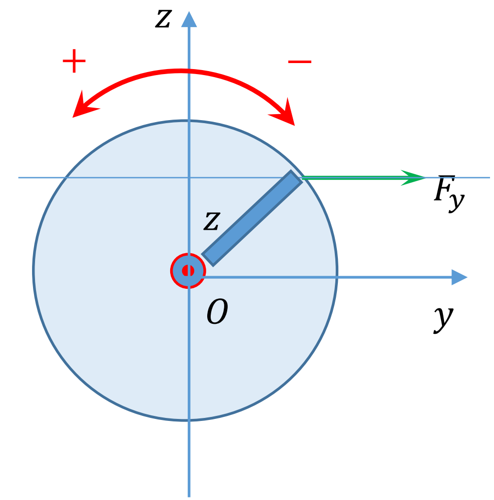
Regra da mão direita para determinar o sentido de momento de força em relação a eixo:

- **Alinhar o polegar com a direção do eixo;**
- **Alinhar os demais dedos na direção e sentido da força, colocando-os do mesmo lado que a força está em relação ao eixo (isto é, acima ou abaixo, à direita ou à esquerda).**

➢ **Polegar apontando no sentido do eixo ➔ momento é POSITIVO**

➢ **Polegar apontando no sentido contrário do eixo ➔ momento é NEGATIVO**





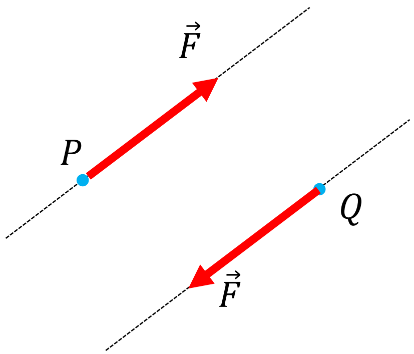
<u>Alternativa</u>:
Olhe o eixo de frente.

➢ **Caso a força cause uma tendência de rotação num corpo imaginário no sentido anti-horário ➔ momento é POSITIVO**

➢ **Caso a força cause uma tendência de rotação num corpo imaginário no sentido horário ➔ momento é NEGATIVO**

Definição de Binário

<u>Binário</u> é um sistema de forças constituído por um para de forças opostas.
Forças opostas são forças que tem linhas de ação paralelas mas sentidos opostos.
<u>A resultante de um binário é nula.</u>
<u>O momento de um binário é invariante para mudança de polo</u>.



$(\vec{F}, P)$

$(-\vec{F}, Q)$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = \vec{F} - \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

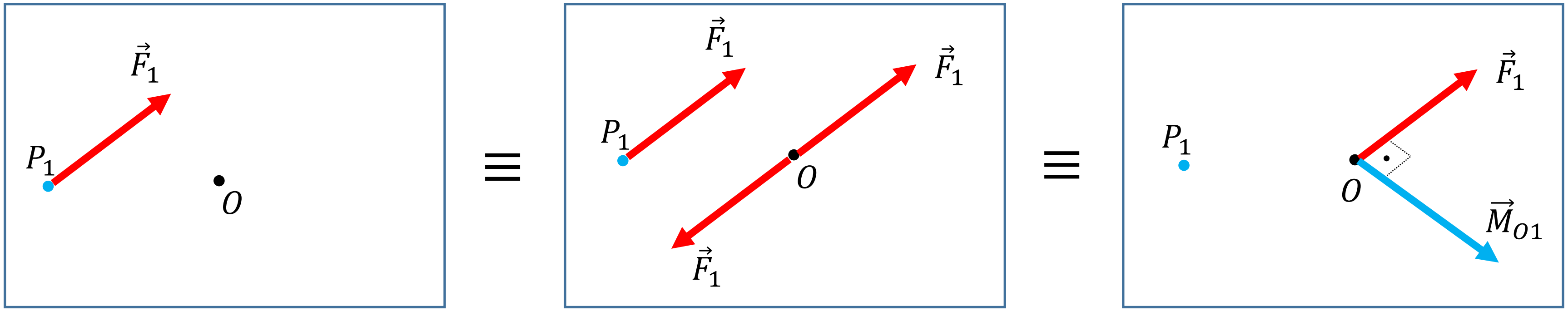
$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} + (Q - O) \wedge (-\vec{F})$$

$$\boxed{\vec{M}_O = (P - Q) \wedge \vec{F}}$$

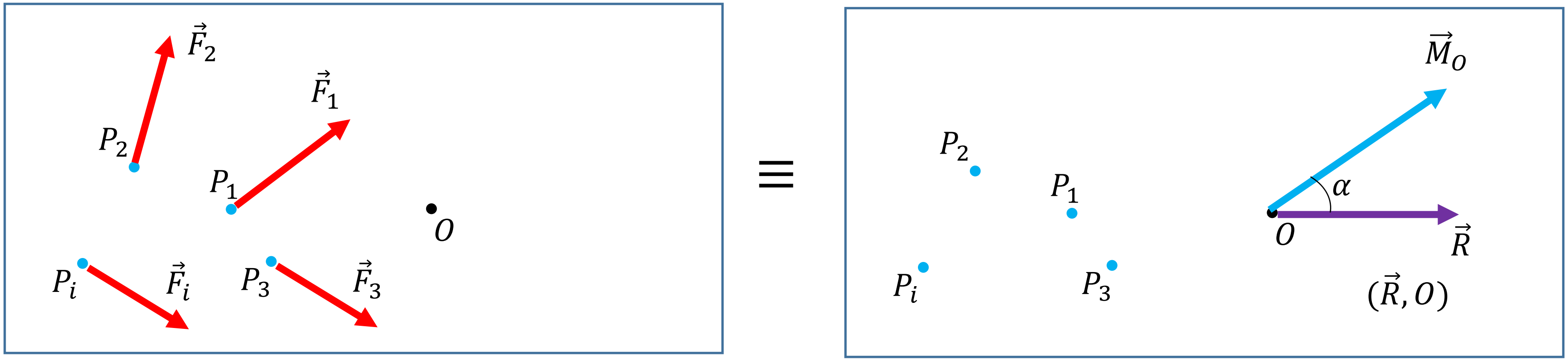
O momento do binário é independente do polo *O*!

Redução de um Sistema de Forças à sua forma geral mais simples.

Escolhe-se um ponto O qualquer arbitrário para ser o polo de redução do sistema de forças.
Uma força genérica pode ser “reduzida” para o polo O, preservando-se os seus efeitos, da seguinte forma:



O mesmo processo pode ser repetido para cada uma das N forças de um sistema qualquer, de forma a obtermos:



Demonstrando-se assim que a forma mais geral a que um sistema de forças pode ser reduzido é constituído por uma força, que é a resultante do sistema de forças aplicada no polo de redução, mais um binário.
Reforçando que ângulo entre a resultante e o binário, em geral, é qualquer!

Casos Particulares da Redução de um Sistema de Forças:

Caso mais geral: $\boxed{(\vec{R}, O) \quad ; \quad \vec{M}_O}$

1º Caso particular: **Sistema nulo. Sistema equilibrado. Sistema equivalente a zero. Caso trivial.**

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{M}_O = \vec{0}}$$

Pela fórmula de mudança de polo verificou-se já anteriormente que, quando a resultante é nula, o momento é invariante para mudança de polo. Sendo assim, não foi sorte termos escolhido o polo O que anulou o momento, pois para qualquer polo teríamos o mesmo resultado.

2º Caso particular: **Sistema equivalente a um binário.**

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{M}_O \neq \vec{0}}$$

Pelo mesmo comentário acima, resultado este invariante para mudança de polo.

3º Caso particular: **Sistema redutível a apenas uma força (isto é, sem o binário).**

$$quando\ \vec{R} \neq \vec{0} \ \ ; \vec{M}_O \neq \vec{0} \ \ mas \quad I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0 \Longrightarrow \exists\, E / \vec{M}_E = \vec{0}$$

Nesta situação, quando o invariante escalar é nulo, isto é, quando a resultante é ortogonal ao momento, demonstra-se que existe um conjunto de pontos E tais que: $\vec{M}_E = \vec{0}$

Estes pontos E formam uma reta paralela à direção da Resultante.

Neste caso o sistema pode ser reduzido então a apenas uma força aplicada em um dos pontos E. $\boxed{(\vec{R}, E)}$

Demonstração da existência dos pontos E quando $I = 0$:

Quer-se demonstrar que, quando: $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0 \Longrightarrow \exists\, E / \vec{M}_E = \vec{0}$

Da fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$$

Observe então que $\vec{M}_O \perp \vec{R} \Longrightarrow \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I = 0$ **satisfazendo a condição do 3º caso particular.**

É uma equação vetorial do tipo:

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$$

Que tem a seguinte solução:

$$\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u}|^2} + \lambda \vec{u} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

(Veja resolução desta equação vetorial em página que segue).

Assim:

$$\boxed{(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda \vec{R} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Sendo que os pontos E formam uma reta paralela à direção da resultante.

Solução da Equação Vetorial $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$

Dada a equação vetorial: $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conhecidos e $\vec{x}$ incógnita.

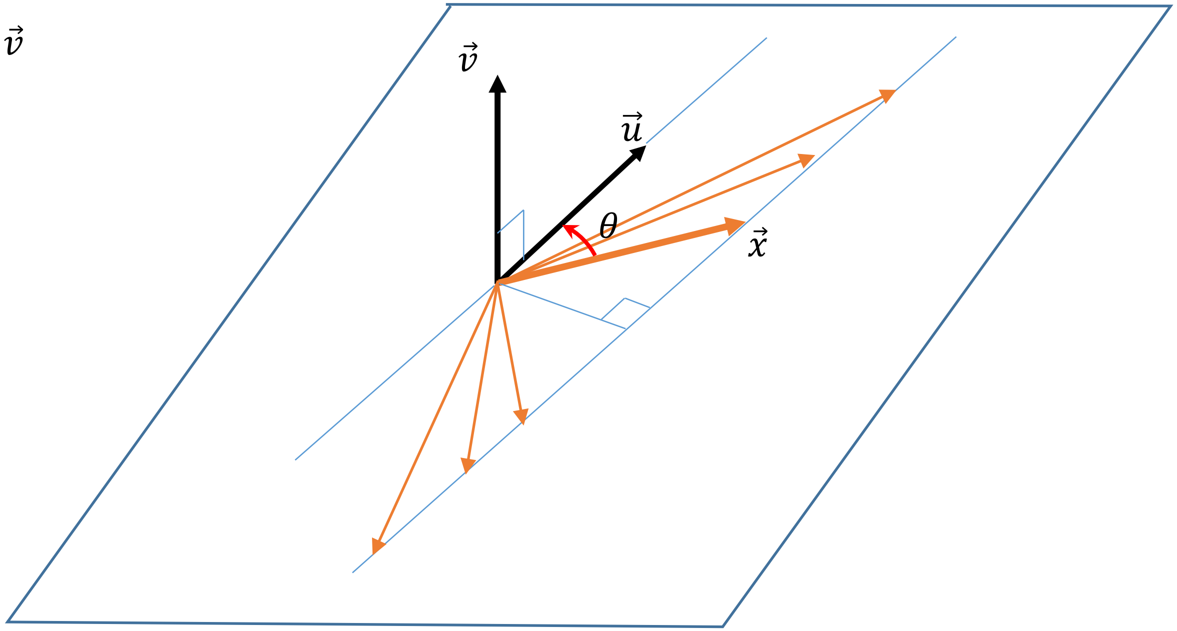
Têm-se:

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\vec{x} \perp \vec{v}$$

$$|\vec{x}||\vec{u}|sen\theta = |\vec{v}|$$

$$\Rightarrow |\vec{x}|sen\theta = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$



$\vec{x}$ deve então ter duas componentes, uma paralela a $\vec{u}$ e uma perpendicular simultaneamente a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A componente perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem módulo $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$.

Podemos obter um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pelo produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Dividimos pelo módulo de $|\vec{u}|^2$ para ajustarmos ao módulo desejado.

A componente paralela a $\vec{u}$ pode ter qualquer módulo e sentido.

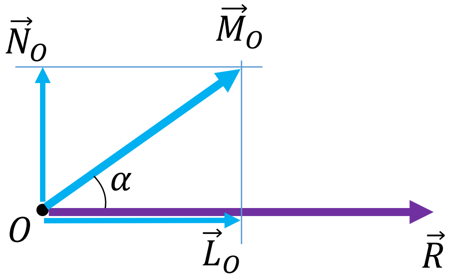
$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u}|^2} + \lambda\vec{u} \quad com \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

As extremidades dos infinitos vetores solução formam uma reta paralela a $\vec{u}$.

Lugar geométrico de mínimo momento – Eixo Central

Para um qualquer sistema de forças sempre há um conjunto de pontos em relação aos quais o momento do sistema assume um valor mínimo.
Este conjunto de pontos forma um lugar geométrico que é uma reta paralela à direção da resultante.
Esta reta é denominada "eixo central" do sistema de forças.
O 3º caso de redução é um caso particular do eixo central onde este valor mínimo de momento é zero.
Para casos mais gerais o momento então é mínimo mas diferente de zero.
Decompondo o momento em duas componentes, uma paralela à resultantes e outra perpendicular a ela:

$$\vec{M}_O = \vec{N}_O + \vec{L}_O$$



O Invariante escalar nos diz que a componente paralela à resultante não varia com mudança de polo.
Sendo assim, se desejamos procurar pontos H em relação aos quais o momento do sistema de forças é mínimo, só nos resta procurar pontos que anulem a componente perpendicular à direção da resultante:

$$\vec{N}_H = \vec{0} \Longrightarrow \vec{M}_H = \vec{L}_H = \alpha\vec{R} = \vec{M}_O + (O - H) \wedge \vec{R}$$

$$(H - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - \alpha\vec{R}$$

Cuja solução já nos é conhecida:

$$\boxed{(H - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda\vec{R} \quad com \;\; \lambda \in \mathbb{R}}$$

E o momento mínimo fica dado por:

$$\boxed{\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}\frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}} \qquad \boxed{\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|^2}\vec{R}} \qquad \boxed{\left|\vec{M}_H\right| = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}}$$

Exercício 1

Para o sistema de forças ilustrado, pede-se determinar:

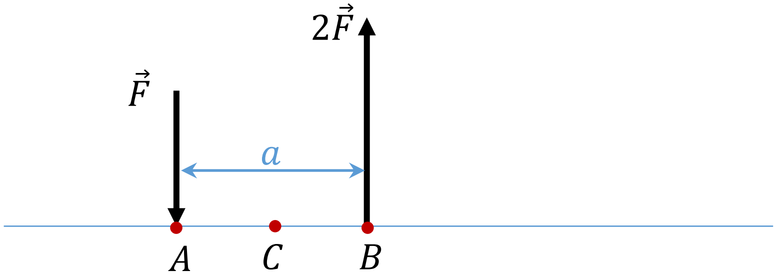
a) a resultante;

b) o momento em relação ao polo C (ponto médio entre A e B);

c) verificar se o sistema é redutível a apenas uma força;

d) calcular o momento mínimo;

e) determinar o eixo central.



Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente os resultados para:

$$\vec{F} = 15\ [N]$$

$$a = 0{,}2\ [m]$$

Exercício 1 (continuação)

Para o sistema de forças ilustrado, pede-se determinar:

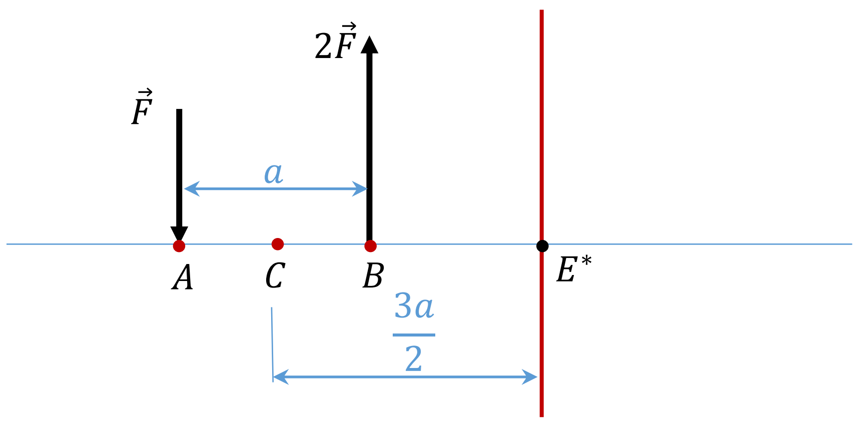
a) a resultante;

b) o momento em relação ao polo C (ponto médio entre A e B);

c) verificar se o sistema é redutível a apenas uma força;

d) calcular o momento mínimo;

e) determinar o eixo central.



Para:

$\vec{F} = 15\ [N]$

$a = 0{,}2\ [m]$

$$\boxed{\vec{R} = 15\vec{j}\ [N]}$$

$$\boxed{\vec{M}_C = 4{,}5\vec{k}\ [Nm]}$$

$$\boxed{\vec{M}_E = \vec{0}\ [Nm]}$$

$$\boxed{(E^* - C) = 0{,}3\vec{i}\ [m]}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = -F\vec{j} + 2F\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R} = F\vec{j}}$$

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^{N} (P_i - C) \wedge \vec{F}_i = -\frac{a}{2}\vec{i} \wedge -F\vec{j} + \frac{a}{2}\vec{i} \wedge 2F\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{M}_C = \frac{3a}{2} F\vec{k}}$$

$$I = \vec{M}_C \cdot \vec{R} = \frac{3a}{2} F\vec{k} \cdot F\vec{j} = 0 \Longrightarrow$$

$\exists\, E / \vec{M}_E = \vec{0}$

Sim, é redutível a apenas uma força!

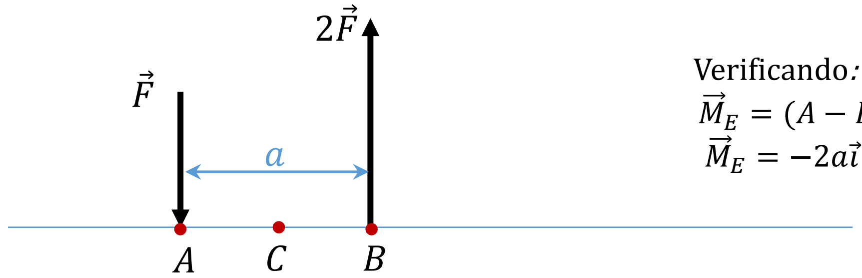
$$(E - C) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_C}{|\vec{R}|^2} + \lambda\vec{R} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(E - C) = \frac{F\vec{j} \wedge \frac{3a}{2} F\vec{k}}{|F|^2} + \lambda F\vec{j} \quad com\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(E - C) = \frac{3a}{2}\vec{i} + \beta\vec{j} \quad com\ \ \beta \in \mathbb{R}}$$

Exercício 1 (continuação)

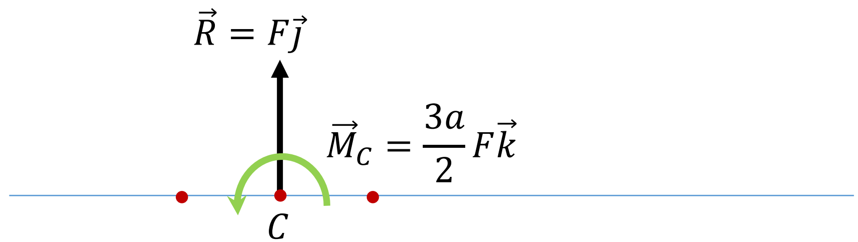
sistema de forças original



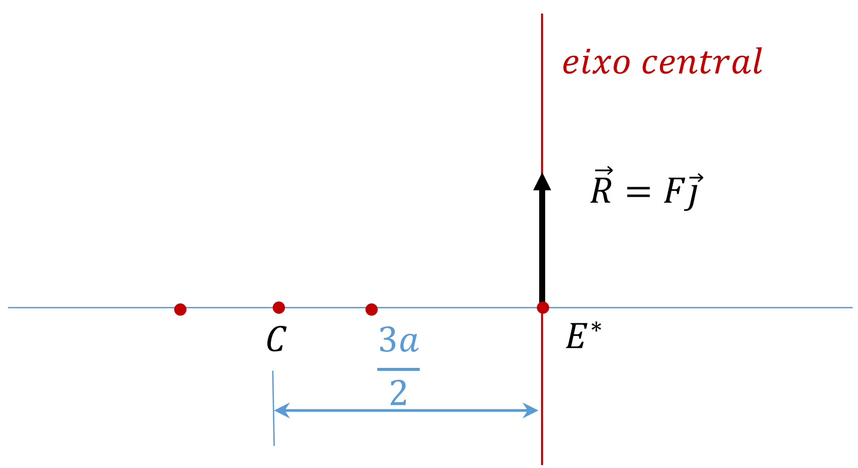
Verificando:

$$\vec{M}_E = (A-E) \wedge (-F\vec{j}) + (B-E) \wedge 2F\vec{j}$$
$$\vec{M}_E = -2a\vec{i} \wedge (-F\vec{j}) + (-a\vec{i}) \wedge 2F\vec{j} = \vec{0}$$

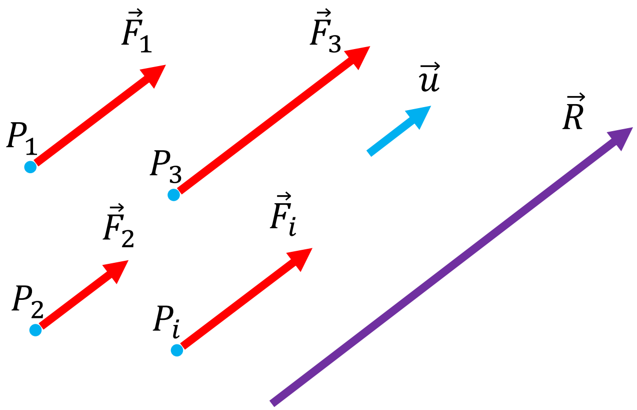
sistema reduzido para o polo C



sistema reduzido para o eixo central



Sistemas de Forças Paralelas



Sistema de Forças Paralelas é um sistema constituído por um conjunto de forças cujas linhas de ação são paralelas entre si.

$$\boxed{\left(\vec{F}_i, P_i\right) \ , \qquad onde \ \ \vec{F}_i = h_i \vec{u}}$$

$\vec{u}$ é o versor que dá a direção do sistema de forças paralelas.

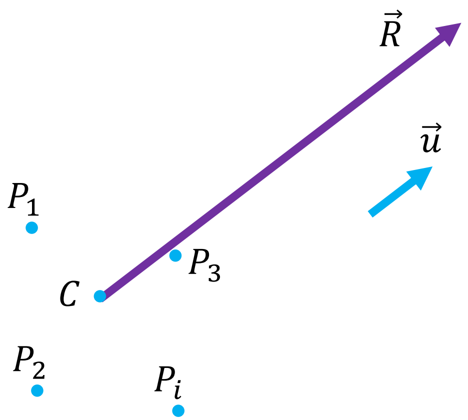
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} h_i \vec{u} \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right) \vec{u}}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge h_i \vec{u} \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{M}_O = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)\right) \wedge \vec{u}}$$

$$\vec{R} \parallel \vec{u} \quad e \quad \vec{M}_O \perp \vec{u} \Longrightarrow \quad \boxed{I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0}$$

Verifica-se que o invariante escalar é nulo e que então estamos no 3º caso particular de redução: $\boxed{\exists \, C / \vec{M}_C = \vec{0}}$

Sistemas de Forças Paralelas – Centro de Forças Paralelas



Verificou-se que o invariante escalar é nulo e que então estamos no 3º caso particular de redução:

$$\boxed{\exists\, C / \vec{M}_C = \vec{0}}$$

Da fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + (O - C) \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$(C - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$$

$$(C - O) \wedge \left(\sum_{i=1}^{N} h_i \right) \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O) \right) \wedge \vec{u}$$

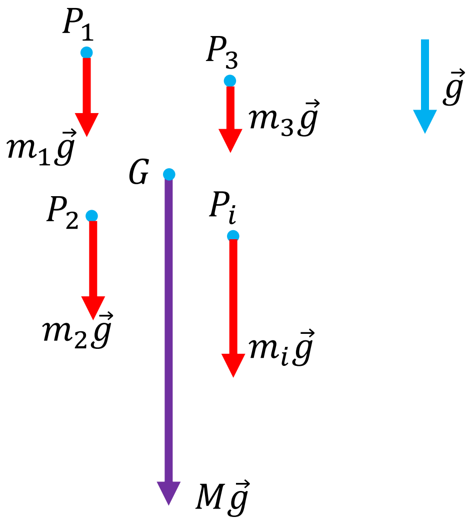
$$\left(\sum_{i=1}^{N} h_i (C - O) \right) \wedge \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O) \right) \wedge \vec{u}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} h_i (C - O) \right) = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O) \right) + \lambda \vec{u}$$

Tomando-se a solução que independe da direção do sistema de forças paralelas, mas sim <u>depende apenas da distribuição espacial dos escalares</u> h_i , define-se o <u>Centro de Forças Paralelas</u> (observe que ele é apenas um ponto em particular do eixo central do sistema de forças paralelas):

$$\boxed{(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} h_i}}$$

Sistemas de Forças Paralelas Peso - Baricentro



Para corpos de dimensão pequena quando comparados à dimensão da Terra, podemos considerar o sistema de forças peso distribuídas no volume do corpo como sendo um conjunto de Forças Paralelas.
Os escalares são o pesos de cada ponto.
A direção é aquela do campo gravitacional.
O centro de forças paralelas é chamado <u>BARICENTRO</u> (G), centro de massa ou ainda centro de gravidade.
O corpo pode girar em relação ao campo gravitacional que o Baricentro não muda de posição em relação à distribuição espacial dos escalares, pois ele não depende da direção do campo gravitacional, mas apenas desta distribuição espacial dos escalares, que são as massas dos pontos.
Podemos reduzir então o sistema de forças peso a apenas uma força, a resultante do sistema, que é o peso total do corpo, aplicada no seu centro de forças paralelas, que é o baricentro.

$$\boxed{\left(\vec{F}_i, P_i\right) \ , \qquad onde \ \ \vec{F}_i = m_i \vec{g}}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{g} \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{R} = M\vec{g}}$$

$$\boxed{(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{M}}$$

Sistemas de Forças Paralelas Peso - Baricentro

Para massas em pontos discretos:

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{M}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

Em um sistema de coordenadas cartesiano, sendo O a origem:

$$G = (x_G \,, y_G \,, z_G)$$

Para um corpo:

$$(G - O) = \frac{\int_{\mathbb{V}} (P - O)\, dm}{M}$$

$$x_G = \frac{\int_{\mathbb{V}} x\, dm}{M} \quad y_G = \frac{\int_{\mathbb{V}} y\, dm}{M} \quad z_G = \frac{\int_{\mathbb{V}} z\, dm}{M}$$

Para corpo homogêneo de massa específica ρ:

$$dm = \rho d\mathbb{V} \qquad M = \rho \mathbb{V}$$

$$x_G = \frac{\int_{\mathbb{V}} x\, d\mathbb{V}}{\mathbb{V}} \quad y_G = \frac{\int_{\mathbb{V}} y\, d\mathbb{V}}{\mathbb{V}} \quad z_G = \frac{\int_{\mathbb{V}} z\, d\mathbb{V}}{\mathbb{V}}$$

Para corpo homogêneo bi-dimensional (chapa)

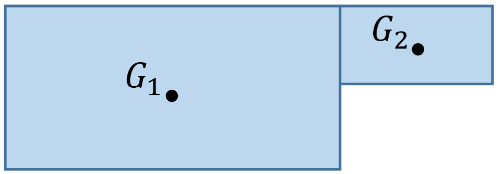
$$x_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} x\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}} \quad y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}} \quad z_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} z\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

Para corpo homogêneo uni-dimensional (barra)

$$x_G = \frac{\int_{\ell} x\, d\ell}{\ell} \quad y_G = \frac{\int_{\ell} y\, d\ell}{\ell} \quad z_G = \frac{\int_{\ell} z\, d\ell}{\ell}$$

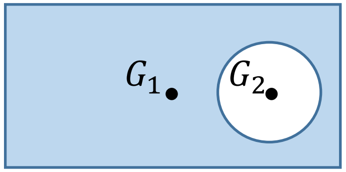
Propriedades do Baricentro

A: Propriedade Associativa



$$(G-O)=\frac{m_1(G_1-O)+m_2(G_2-O)+\cdots+m_N(G_N-O)}{m_1+m_2+\cdots+m_N}$$

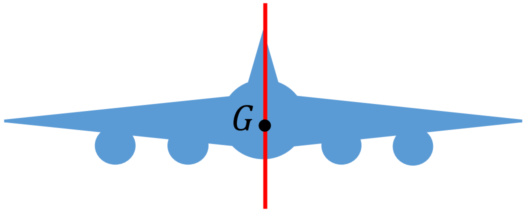
B: Propriedade Subtrativa



$$(G-O)=\frac{m_1(G_1-O)-m_2(G_2-O)+\cdots+m_N(G_N-O)}{m_1-m_2+\cdots+m_N}$$

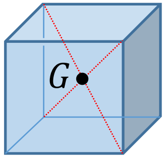
C: Propriedade de Corpos Simétricos

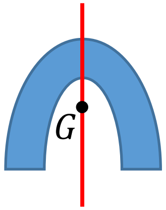
Havendo algum elemento de simetria (eixo ou plano), o baricentro estará sobre ele.
Havendo mais de um elemento de simetria, o baricentro estará na intersecção deles.



D: Propriedade de Corpos Convexos

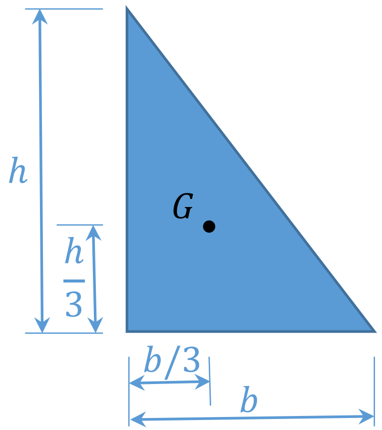
Sendo o corpo convexo, o baricentro estará dentro do volume do corpo.
Sendo o corpo não convexo, o baricentro poderá estar fora do volume do corpo.
Corpo convexo: todo plano tangente ao corpo o deixa em um mesmo semi-espaço.





Exercício 2

Pede-se demostrar que o baricentro de um triângulo localiza-se a um terço da altura até a base.



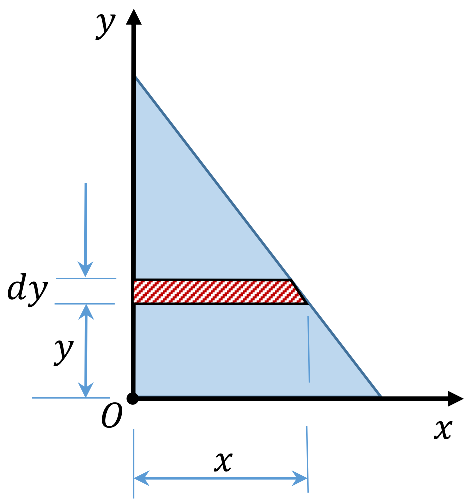
Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente os resultados para:

$$h = 0{,}6\ [m]$$

$$b = 0{,}4\ [m]$$

Exercício 2 (continuação)

Iremos calcular a coordenada y do baricentro (y_G) conforme o sistema de coordenadas cartesiano indicado:



$$\boxed{y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y \, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}}$$

Definindo uma fatia de altura infinitesimal como elemento infinitesimal de área de integração, assim todos os pontos do elemento infinitesimal tem mesma coordenada y.

$$d\mathbb{A} = xdy$$

$$y_G = \frac{\int_0^h y \, xdy}{\mathbb{A}}$$

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{h}{b} = \frac{h-y}{x} \Longrightarrow x = \frac{b(h-y)}{h} = b - \frac{by}{h}$$

$$y_G = \frac{\int_0^h y\,(b - \frac{by}{h})\,dy}{\frac{bh}{2}} = \frac{2}{h}\int_0^h (y - \frac{y^2}{h})\,dy = \frac{2}{h}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h}\right)\Bigg|_0^h = \frac{2}{h}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h}\right) = 2h\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{y_G = \frac{h}{3}}$$

$p/h = 0{,}6\ [m]$

$$\boxed{y_G = 0{,}2\ [m]}$$

Por analogia:

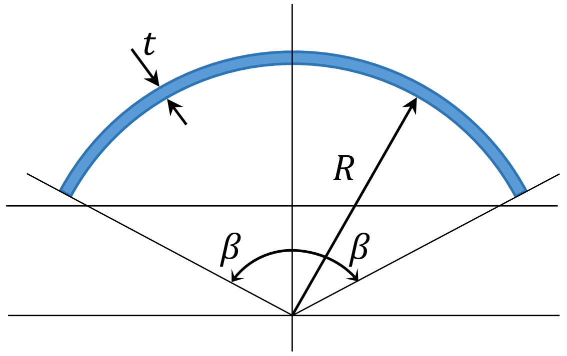
$$\boxed{x_G = \frac{b}{3}}$$

$p/b = 0{,}4\ [m]$

$$\boxed{x_G = 0{,}133\ [m]}$$

Exercício 3

Pede-se determinar a posição do baricentro do setor de arco delgado ilustrado.

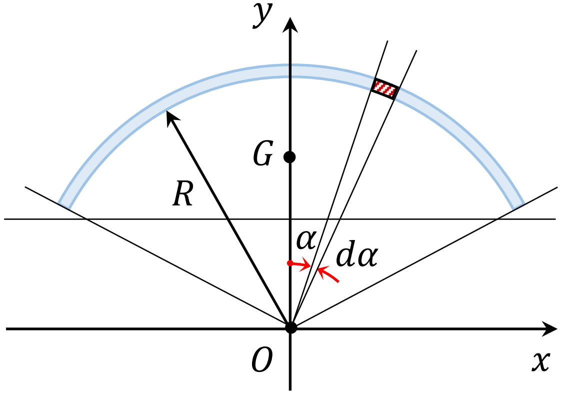


Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente para:

$$R = 0{,}6\ [m] \qquad t = 0{,}01\ [m] \qquad \beta = \frac{\pi}{3} rad = \ 60^0$$

Exercício 3 (continuação)

Aproveitando a propriedade de corpos simétricos, sabemos que o baricentro estará sobre o eixo vertical:



$$G = (x_G, y_G) = (0, y_G)$$

$$\boxed{y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}}$$

$$d\mathbb{A} = Rtd\alpha \qquad \mathbb{A} = 2Rt\beta$$

$$y = Rcos\alpha$$

$$y_G = \frac{\int_{-\beta}^{\beta}(Rcos\alpha)(Rtd\alpha)}{2Rt\beta} = \frac{R}{2\beta} sen\,\alpha\Big|_{-\beta}^{\beta} = \frac{R}{2\beta}(sen\beta - sen(-\beta)) \Longrightarrow \boxed{y_G = \frac{Rsen\beta}{\beta}}$$

Para:

$$R = 0{,}6\ [m]$$

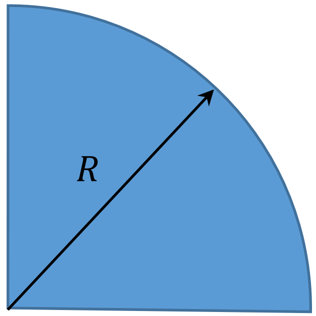
$$t = 0{,}01\ [m]$$

$$\beta = \frac{\pi}{3} rad = 60^0$$

$$y_G = \frac{0{,}6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow \boxed{y_G = 0{,}496\ [m]}$$

Exercício 4

Pede-se determinar a posição do baricentro de ¼ de círculo.

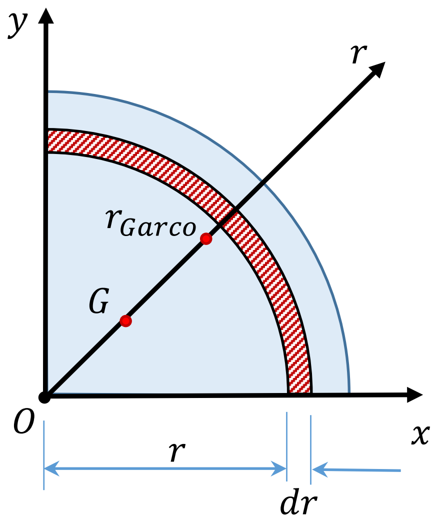


Resolva inicialmente de forma literal e depois calcule numericamente para:

$$R = 0{,}6\ [m]$$

Exercício 4 (continuação)

Aproveitando a propriedade de corpos simétricos, sabemos que o baricentro estará sobre a diagonal ilustrada:



$$r_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} r\, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

Definindo uma fatia em arco, de largura infinitesimal, como elemento infinitesimal de área de integração, assim todos os pontos do elemento infinitesimal tem mesma coordenada r.

$$d\mathbb{A} = \frac{1}{4} 2\pi r dr = \frac{1}{2}\pi r dr$$

Já calculamos em exercício anterior a posição do baricentro de um arco:

$$r_{Garco} = \frac{r sen\beta}{\beta}$$ **Aqui:** $\beta = 45^0$ **Assim:** $r_{Garco} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} r}{\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow r_{Garco} = \frac{2\sqrt{2}r}{\pi}$

$$r_G = \frac{\int_0^R \left(\frac{2\sqrt{2}r}{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi r dr\right)}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4\sqrt{2}\int_0^R r^2 dr}{\pi R^2} = \frac{4\sqrt{2}r^3}{3\pi R^2}\Bigg|_0^R \Longrightarrow \boxed{r_G = \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}}$$

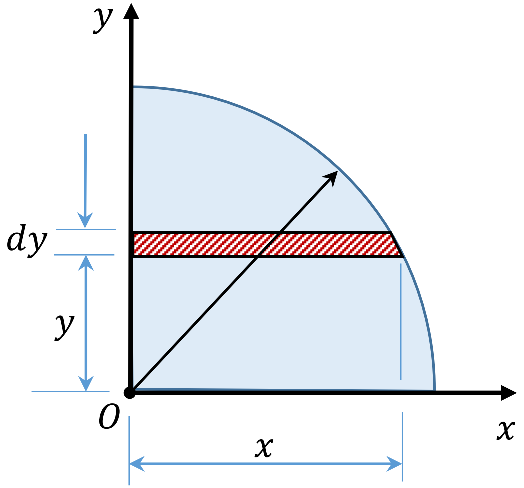
$$y_G = \frac{\sqrt{2}}{2} r_G \Longrightarrow \boxed{y_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

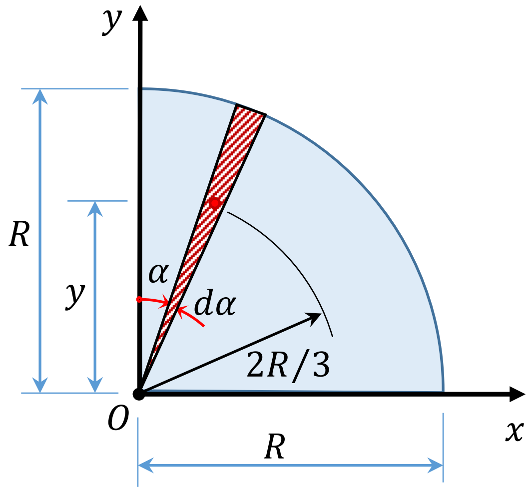
Pela simetria, $x_G = y_G \Longrightarrow \boxed{x_G = \frac{4R}{3\pi}}$

$p/R = 0{,}6\ [m]$ $\boxed{(x_G, y_G) = (0{,}255\ , 0{,}255\ )\quad [m]}$

Exercício 4 (continuação)

Outras possibilidades:





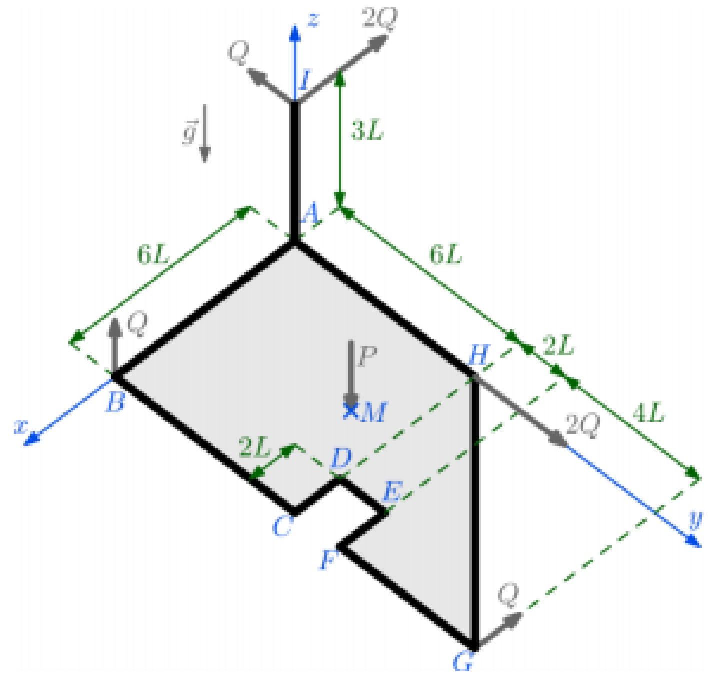
$$y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y \, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

$$y_G = \frac{\int_{\mathbb{A}} y \, d\mathbb{A}}{\mathbb{A}}$$

Tentar essas formas alternativas

Exercício 5

Considere o sistema material indicado na figura, composto por uma placa plana *ABCDEFGH*, de espessura desprezível, e uma barra vertical *AI* fixa rigidamente à placa. O sistema está livre no espaço. A placa plana é homogênea e tem peso $-P\vec{k}$. A barra vertical tem peso desprezível. Sobre este sistema material também atuam as seguintes forças: $(\vec{F}_B, B)$, $(\vec{F}_G, G)$, $(\vec{F}_H, H)$, $(\vec{F}_I, I)$, com $\vec{F}_B = Q\vec{k}$, $\vec{F}_G = -Q\vec{i}$, $\vec{F}_H = 2Q\vec{j}$, $\vec{F}_I = -2Q\vec{i} - Q\vec{j}$. Determine:



(a) Mostre que o centro de massa da placa plana *ABCDEFGH* é o ponto $M = \left(\frac{16}{5}L, \frac{112}{25}L, 0\right)$.

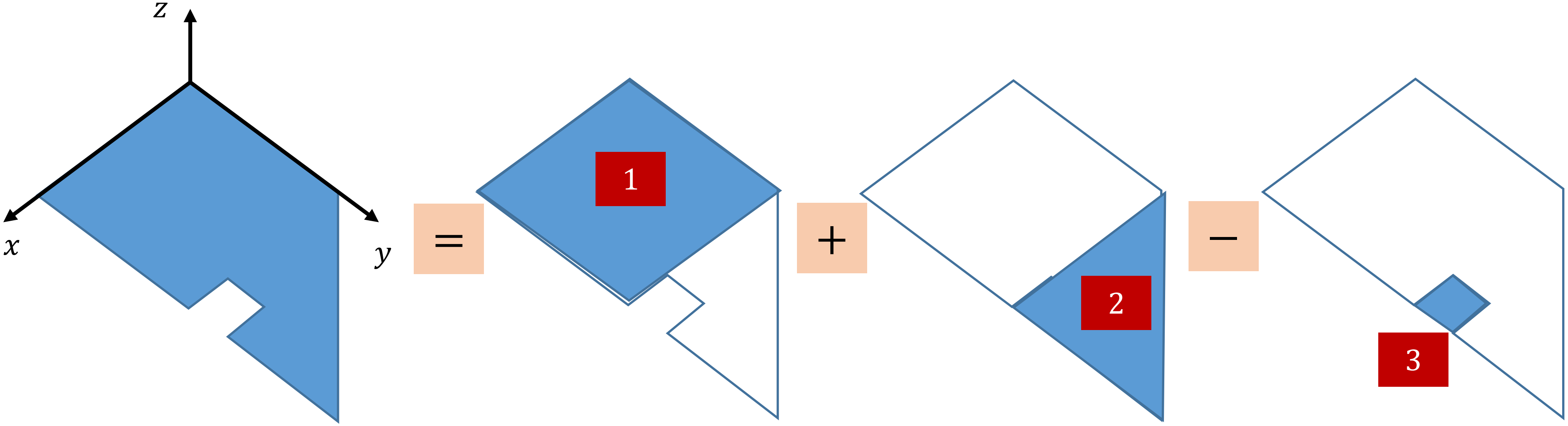
(b) A resultante $\vec{R}$ e o momento resultante $\vec{M}_A$ no pólo *A*.

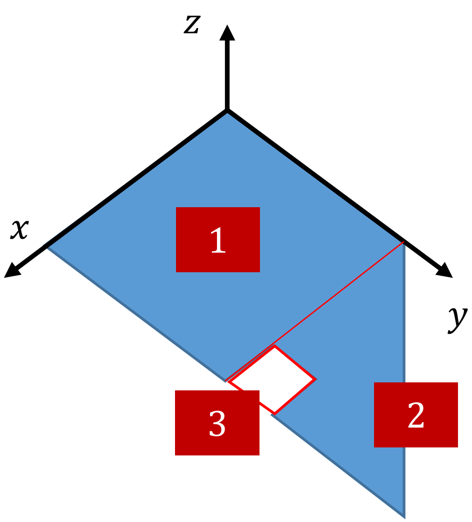
(c) A relação que deve existir entre *P* e *Q* para que o momento resultante em torno do eixo *Ay* seja nulo.

(d) A relação que deve existir entre *P* e *Q* para que o sistema de forças aplicadas possa ser reduzido a uma única força.

(e) A momento mínimo do sistema de forças, considerando que *P* e *Q* satisfaçam a relação obtida no item anterior.

Exercício 5 (continuação)





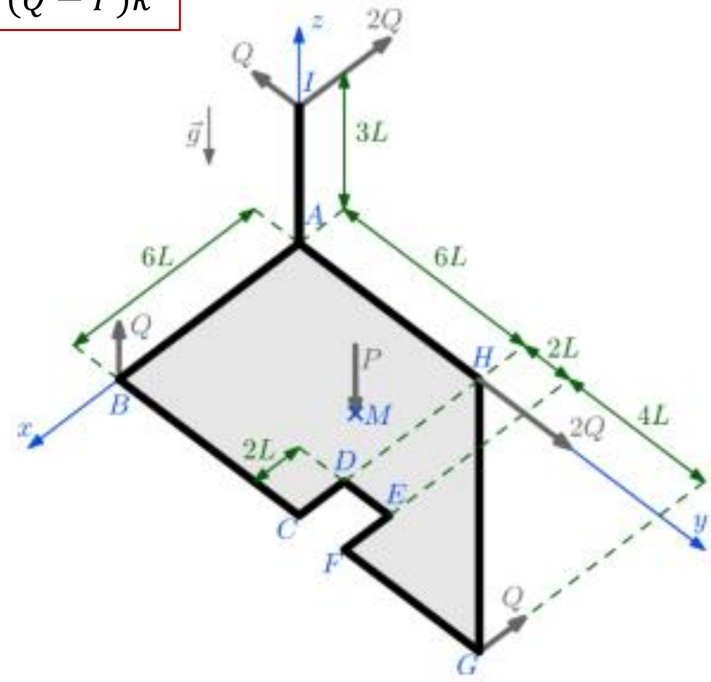
$$x_G = \frac{A_1(x_{G_1}) + A_2(x_{G_2}) - A_3(x_{G_3})}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{36L^2(3L) + 18L^2(4L) - 4L^2(5L)}{36L^2 + 18L^2 - 4L^2} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{16}{5}L}$$

$$y_G = \frac{A_1(y_{G_1}) + A_2(y_{G_2}) - A_3(y_{G_3})}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{36L^2(3L) + 18L^2(8L) - 4L^2(7L)}{36L^2 + 18L^2 - 4L^2} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{112}{25}L}$$

$$\boxed{z_G = 0}$$

Exercício 5

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = -P\vec{k} + Q\vec{k} - Q\vec{\imath} + 2Q\vec{\jmath} - 2Q\vec{\imath} - Q\vec{\jmath} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = -3Q\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + (Q-P)\vec{k}}$$



$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{N} M_{Ax}\,\vec{\imath} + \sum_{i=1}^{N} M_{Ay}\,\vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{N} M_{Az}\,\vec{k}$$

$$M_{Ax} = -(P)\left(\frac{112}{25}L\right) + Q(3L) = 3QL - \frac{112PL}{25}$$

$$M_{Ay} = -(Q)(6L) + P\left(\frac{16}{5}L\right) - 2Q(3L) = \frac{16PL}{5} - 12QL$$

$$M_{Az} = Q(12L) = 12QL$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \left(3QL - \frac{112PL}{25}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{16PL}{5} - 12QL\right)\vec{\jmath} + 12QL\vec{k}}$$

$$Para\ M_{Ay} = 0 \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4}{15}P}$$

$$Para\ I = \vec{M}_A \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow \left(3QL - \frac{112PL}{25}\right)(-3Q) + \left(\frac{16PL}{5} - 12QL\right)(Q) + (12QL)(Q-P) = 0 \Rightarrow \boxed{Q = \frac{116}{225}P}$$

$$\boxed{Como\ na\ condição\ anterior\ I = 0 \Rightarrow é\ imediato\ que\ o\ momento\ mínimo\ é\ nulo!}$$

Duvidem
Pensem
Comuniquem
Perguntem
Cometam erros
Aprendam dos seus erros
... e mais importante,
Tenham alegria em aprender.

Estupidez:
Você pensa que sabe tudo, sem questionar.

Inteligência:
Você questiona tudo que você pensa que sabe.

Aproveite cada minuto,
porque o tempo não volta...
O que volta é a vontade de voltar no tempo.