Lista 1 - Cálculo Númerico

MAP - 0151

1 Método de Newton

Problema 1. *Utilize o método de Newton para encontrar raízes das seguintes funções com precisão de* 10^{-3}.

(a) $x^2 - 2$

(b) $e^x - 2$

(c) $x^3 - 3x - 2$

(d) $\sin x - x^4$

(e) $e^x - 4x^2$ *(maior das raízes)*

(f) $5xe^{-\frac{x}{3}}$ *(maior das raízes)*

(g) $lnx + x - 4$

Problema 2. *Os gráficos de* $y = e^x$ *e* $y = 5x^2$ *se cruzam em 3 pontos. Utilize o método de Newton para calcular o ponto de cruzamento com a maior abcissa* x*, com precisão pré-fixada* $\epsilon = 10^{-3}$ *em* x.

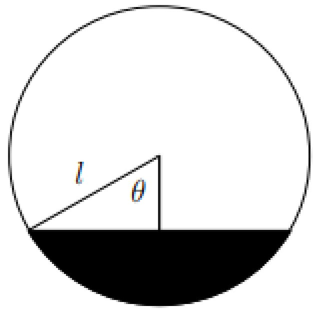
Problema 3. *A função*

$$F(t) = \frac{100}{(1 + 9e^{-\frac{t}{2}})}$$

representa a evolução de uma população ao longo do tempo a partir de $t = 0$. *Mostre que esta população é crescente e limitada, e que a equação* $F(t) = 25$ *possui única solução.*

Calcule 3 iterações partindo de $t_0 = 1$ *e avalie se o erro fica menor que* 10^{-3}.

Problema 4. *Um tanque tem a forma de um cilindro reto, com raio igual a 1 e comprimentol. Sua lateral (circular) é transparente e através dela podemos observar o nível de líquido no cilindro ("deitado"). A porcentagem de líquido no cilindro pode ser obtida em função do ângulo* θ *(veja a figura). Por exemplo, o cilindro está cheio para* $\theta = \pi$ *e pela metade para* $\theta = \pi/2$. *Calcule com erro menor que* 10^{-3} *o valor de* θ *para o qual o cilindro tem um quarto de seu volume cheio, através de um método de aproximações sucessivas.*



Problema 5. *Um vaso de 30cm de altura tem secções transversais de ŕea πe^{2h} para h de 0 a 30cm. O volume de água (em cm^3) que ele contém, estando cheio até uma altura a, é dado por*

$$V(a) = \int_0^a \pi e^{2x} dx$$

Até que altura deve-se encher o vaso para que ele contenha $5cm^3$ de água? Use o método de Newton, determinando um intervalo que contenha a solução e justificando a escolha do valor inicial de forma a garantir a convergência.

Problema 6. *Considere o método de Newton para minimizar $F(x)$*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F'(x_k)}{F''(x_k)}$$

Com

$$F(x) = 1 + \int_0^x \arctan y \; dy$$

(a) Mostre que F é estritamente convexa, isto é, $F''(x) > 0$.

(b) Encontre um valor para x_0 no qual o método de Newton converge.

(c) Qual seria um método simples para encontrar o mínimo de uma função estritamente convexa em $[a, b]$ sabendo que $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$.

2 Aproximações sucessivas

Problema 7. *Determine uma raíz de* $f(x) = x^2 - 0.9$ *a partir da função auxiliar* $\phi(x) = x^2 + x - 0.9$ *pelo método de aproximações sucessivas com* $x_0 = -1$. *A outra raíz pode ser determinada com utilização da mesma função auxiliar* ϕ*?*

Problema 8. *A função* $f(x) = xe^x - 2$ *possui uma única raíz no intervalo* $I = [0.7, 1]$. *Defina a função*

$$\phi(x) = \frac{2}{e^x}$$

Mostre que para todo $x_0 \in I$ *a sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por*

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

converge para a raíz de f.

Problema 9. *A função* $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$ *possui exatamente duas raízes* $\alpha_1 \in [0.01, 1]$ *e* $\alpha_2 \in [4, 5]$.

Considere as funções

$$\phi_1(x) = e^{x-3} \ , \phi_2(x) = \ln x + 3$$

Quais funções podem ser usadas para aproximar α_1*? E* α_2*?*

Problema 10. *A função* $f(x) = 1 - e^x + \frac{3x}{2x+1}$ *possui uma raíz em* $x = 0$. *Considere as funções*

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{(e^x - 1)(2x + 1)}{3} \\
\phi_2(x) &= x + 1 - e^x + \frac{3x}{2x + 1} \\
\phi_3(x) &= \frac{(e^x - 1)(2x + 1)}{5}
\end{aligned}$$

Quais funções podem ser usadas para aproximar $x = 0$*?*

Problema 11. *Mostre que as funções* $\phi_1(x) = e^{-x^2}$ *e* $\phi_2(y) = e^{-2y^2}$ *possuem único ponto fixo em* $[0, 1]$. *Considere as sequências* $x_{n+1} = \phi_1(x_n)$ *e* $y_{n+1} = \phi_2(y_n)$ *, com* $x_0 = y_0 = 0$. *Uma delas converge para o ponto fixo da função* ϕ_i *correspondente e a outra não. Justifique o porque da convergência e da não convergência destas sequências. Para a sequência convergente, estime a partir de qual iteração os elementos da sequência distam menos que* 10^{-6} *do ponto fixo.*

Problema 12. *Um carro se move ao longo de uma estrada com velocidade instantânea* $v(t) = 5e^{-t} m/s$.

Definimos $\bar{t}$ *como o instante para o qual a velocidade média do carro no intervalo* $[0, \bar{t}]$ *é igual a* $2.5 m/s$. *Utilize um método de aproximações sucessivas para calcular* $\bar{t}$ *com erro menor que* 10^{-5}.

(Obs: A velocidade média no intervalo $[0, \bar{t}]$ *é o quociente da distância percorrida neste intervalo, pelo valor de* $\bar{t}$*.)*

Problema 13. *Dado* $a \geq 0$, *mostre que a sequência*

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\Big((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\Big)$$

converge para $\sqrt[p]{a}$

Problema 14. *Dado* $c \in (0,1)$, *função* $\phi(x) = \frac{1}{2}(x^2 - c)$ *admite dois pontos fixos, a saber*

$$\xi_1 = 1 - \sqrt{1-c} \;, \xi_2 = 1 + \sqrt{1-c}$$

Considere a interação

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 - c) \;, n \in \mathbb{N}$$

onde $0 \leq x_0 < \xi_2$.

Mostre que

$$x_{n+1} - \xi_1 = \frac{1}{2}(x_n - \xi_1)(x_n + \xi_1)$$

e deduza que $\lim_{n\to\infty x_n} = \xi_1$

3 Problemas teóricos

Problema 15. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável com $-\frac{1}{2} \leq \phi'(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Considere a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_{n+1} = \phi(x_n)$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um ponto fixo de ϕ.

Mostre que, se $x_0 < \alpha$ então

$$x_0 < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n} < \cdots < \alpha < \cdots < x_{2n+1} < x_{2n-1} < \ldots < x_1$$

Problema 16. *Pelo método das aproximações sucessivas, encontre funções ϕ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = \phi(x_n)$*

(a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge monotonamente

(b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alternadamente

(c) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge

Problema 17. *Defina*

$$g(x) = \begin{cases} -x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que g é contínua e que o único ponto fixo de g em $[0, 1]$ é $x = 0$.

(b) Considerando a sequência de interações $x_{n+1} = g(x_n)$ a partir de $x_0 = \frac{1}{k\pi}$ e $x_0 = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ onde $k \in \mathbb{Z}$ alguma delas converge para o ponto fixo de g?

Esse exercício pretende mostrar que mesmo escolhendo pontos suficientemente próximos do ponto fixo, não necessáriamente todas as sequências convergem ou todas as sequências não convergem. Procuramos mostrar que existem pontos que não são ***pontos críticos estáveis ou instáveis*** *onde*

(i) $\xi \in \mathbb{R}$ é ***ponto crítico estável*** *de g se existe $\delta > 0$ tal que para cada $x_0 \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ a sequência $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para ξ.*

(ii) $\xi \in \mathbb{R}$ é ***ponto crítico instável*** *de g $\delta > 0$ tal que para cada $x_0 \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $x_0 \neq \xi$ a sequência $x_{n+1} = g(x_n)$ não converge para ξ*

Problema 18. *Suponha que a função f possui segunda derivada contínua, que $f(\xi) = 0$,e que no intervalo $[X, \xi]$, com $X < \xi$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$.*

Mostre que o método de Newton começando em qualquer $x_0 \in [X, \xi]$ converge para ξ.

Problema 19. *Suponha que $f(\xi) = f'(\xi) = 0$ e que f'' está definida e é contínua em uma vizinhança de ξ. Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é a sequência obtida pelo método de Newton.*

(a) *Mostre que*

$$\xi - x_{k+1} = -\frac{1}{2}\frac{(\xi - x_k)^2 f''(\eta_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2}(\xi - x_k)\frac{f''(\eta_k)}{f''(\tau_k)}$$

onde η_k *e* τ_k *estão entre* ξ *e* x_k.

Suponha também, que para algum $\delta > 0$ *tenhamos* $0 < m < |f''(x)| < M$ *para todo* $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$ *onde* $M < 2m$.

(b) *Mostre que* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* ξ *para todo* $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$

(c) *Extenda o resultado para condições inciais* $f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = 0$