10.9 Soluções

10.9.1 Solução dos exercícios sobre Formas de dependência, etc.

Solução do Exc. 172(b). Vamos calcular separadamente $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[Y]$ e $\mathbb{E}[X \times Y]$. Para as duas primeiras, precisa-se da distribuição marginal de X. Usando a tabela, deduz-se que X assume valores $0, 1$ e 2 com as respectivas probabilidades $8/20, 5/20$ e $7/20$. Portanto

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times \frac{8}{20} + 1 \times \frac{5}{20} + 2 \times \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

Para o cálculo da $\mathrm{Var}[X]$ precisamos de $\mathbb{E}[X^2]$. Eis seu valor:

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \times \frac{8}{20} + 1^2 \times \frac{5}{20} + 2^2 \times \frac{7}{20} = \frac{33}{20}$$

Finalmente,

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{33}{20} - \frac{361}{400} = \frac{660}{400} - \frac{361}{400} = \frac{299}{400}$$

Do modo análogo calculam-se os correspondentes valores para a variável aleatória Y. Começa-se de sua distribuição: são os valores $1, 2$ e 3 com as respectivas probabilidades $8/20, 4/20$ e $8/20$. Portanto:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \times \frac{8}{20} + 2 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{8}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

e

$$\mathbb{E}[Y^2] = 1^2 \times \frac{8}{20} + 2^2 \times \frac{4}{20} + 3^2 \times \frac{8}{20} = \frac{96}{20}$$

Finalmente,

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{96}{20} - (2)^2 = \frac{16}{20}$$

Nosso cálculo de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ vai ser feito com o uso da fórmula $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$. Vamos focar no termo $\mathbb{E}[XY]$. A fórmula é:

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{\substack{x \in \{0,1,2\} \\ y \in \{1,2,3\}}} \mathbb{P}[X = x, Y = y] \times x \times y$$

O lado direito da fórmula disse que temos que percorrer por todos os pares de valores de (X, Y) e somar os seus produtos ponderados por correspondente probabilidade; a soma final será o valor de $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Vamos ver como isso funciona:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] = \; & \mathbb{P}[X = 0, Y = 1] \times 0 \times 1 + \mathbb{P}[X = 1, Y = 1] \times 1 \times 1 + \mathbb{P}[X = 2, Y = 1] \times 2 \times 1 \\
& + \mathbb{P}[X = 0, Y = 2] \times 0 \times 2 + \mathbb{P}[X = 1, Y = 2] \times 1 \times 2 + \mathbb{P}[X = 2, Y = 1] \times 2 \times 2 \\
& + \mathbb{P}[X = 0, Y = 3] \times 0 \times 3 + \mathbb{P}[X = 1, Y = 3] \times 1 \times 3 + \mathbb{P}[X = 2, Y = 3] \times 2 \times 3 \\
= \; & \tfrac{3}{20} \times 0 \times 1 + \tfrac{3}{20} \times 1 \times 1 + \tfrac{2}{20} \times 2 \times 1 \\
& + \tfrac{1}{20} \times 0 \times 2 + \tfrac{1}{20} \times 1 \times 2 + \tfrac{2}{20} \times 2 \times 2 \\
& + \tfrac{4}{20} \times 0 \times 3 + \tfrac{1}{20} \times 1 \times 3 + \tfrac{3}{20} \times 2 \times 3 \\
= \; & \tfrac{38}{20}
\end{aligned}$$

Agora,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{38}{20} - \frac{19}{20} \times 2 = 0$$

Finalmente, vamos calcular o valor do coeficiente de correlação linear entre X e Y:

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{299}{400} \times \frac{16}{20}}} = 0$$

Neste momento vale parar e observar que nossos X e Y são dependentes (fato que você deve saber confirmar usando as técnicas ensinadas no Capítulo 3) mas que apesar disso o coeficiente de correlação linear entre eles é nulo.

Uma observação secundária fornecida pelos cálculos que fizemos é que para o fim do cálculo do coeficiente de correlação linear o cálculo auxiliar das variâncias seria disnecessário se soubessemos que a covariância é nula.