1. Uma corrente flexível de comprimento l está pendurada em uma extremidade $x = 0$, mas oscila horizontalmente. Considere o eixo x na vertical com sentido positivo apontando para baixo e o eixo u na horizontal com sentido positivo apontando para à direita. Suponha que a força da gravidade em cada ponto da corrente seja igual ao peso da parte da corrente abaixo do ponto e seja direcionada tangencialmente ao longo da corrente. Admita que as oscilações são pequenas. Mostre que a EDP satisfeita pela função deslocamento $u(x,t)$ a partir da posição de equilibrio é
$$u_{tt} = g[(l-x)u_x]_x.$$

2. Suponha que algumas partículas suspensas em um meio líquido sejam puxadas para baixo com velocidade constante $V > 0$ pela gravidade no ausência de difusão. Levando em conta a difusão, encontre a equação para a concentração de partículas. Admita homogeneidade nas direções horizontais x e y. Considere o eixo z apontando para cima.

3. No Exercício 2, mostre que se as partículas estiverem acima de um plano horizontal impermeável $z = a$, a condição de contorno é
$$Vu(a,t) + ku_z(a,t) = 0, \quad t > 0$$
onde k é uma constante.

4. Duas hastes homogêneas têm a mesma seção transversal, calor específico c e densidade ρ, mas diferentes condutividades térmicas κ_1 e κ_2 e comprimentos L_1 e L_2. Seja $k_j = \kappa_j/c\rho$ suas constantes de difusão. Elas são soldadas entre si de modo que a temperatura u e o fluxo de calor κu_x na solda sejam contínuas. A haste esquerda tem sua extremidade esquerda mantida à temperatura zero grau. A haste direita tem sua extremidade direita mantida à temperatura T graus.
   (a) Encontre a distribuição de temperatura de equilíbrio na barra composta.
   (b) Esboce-a como uma função de x no caso $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $L_1 = 3$, $L_2 = 2$, e $T = 10$.

5. Considere o problema
$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0,$$
consistindo de uma EDO e um par de condições de contorno. Claramente, o a função $u(x) \equiv 0$ é uma solução. Esta solução é única ou não? A resposta depende de L?

6. Considere o problema
$$u''(x) + u'(x) = f(x)$$
$$u'(0) = u(0) = \frac{1}{2}[u'(l) + u(l)],$$
com $f(x)$ uma dada função.
   (a) A solução é única?
   (b) Existe necessariamente uma solução ou existe uma condição de que f deve satisfazer para a existência?

7. Considere o problema de Neumann
$$\Delta u = f(x,y,z) \quad \text{em } D$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial D,$$
onde $D \subset \mathbb{R}^3$ é domínio limitado com fronteira ∂D uma superfície C^1 por partes.

(a) O que podemos certamente adicionar a qualquer solução para obter outra solução? Então esse problema não tem unicidade de solução.

(b) Use o teorema da divergência e a EDP para mostrar que

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = 0$$

é uma condição necessária para que o problema de Neumann tenha solução.

(c) É possível dar uma interpretação física da parte (a) e/ou (b) para fluxo de calor ou difusão?