ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À PRIMEIRA SEMANA

Exercício 1. (Seção 1.4 Strang. Problema 11) A primeira linha de AB é uma combinação linear de todas as linhas de B (combinação linear seria algo do tipo $a_1 L_{B_1} + ... + a_n L_{B_n}$, em que L_{B_i} são as linhas da matriz B e a_j são os coeficientes da combinação linear e pertencem a $\mathbb{R}$). Quais são os coeficientes desta combinação linear e qual é a primeira linha de AB se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}?$$

Exercício 2. (Seção 1.4 Strang. Problema 12) O produto de duas matrizes triangulares inferiores é novamente uma matriz triangular inferior (todas as entradas acima da diagonal principal são zeros). Mostre isso para um exemplo 3 por 3 e depois explique como isso segue das leis de multiplicação entre matrizes.

Exercício 3. (Seção 1.4 Strang. Problema 21) Ache as potências A^2, A^3, B^2, B^3, C^2 e C^3. Quem são A^k, B^k e C^k?

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Exercício 4. (Seção 1.4 Strang. Problema 24) Quais matrizes elementares E_{21}, E_{31}, E_{32} colocam A numa forma triangular U? Ou seja, $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$?

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Multiplique as matrizes E para obter a matriz M que faz o escalonamento $MA = U$.

Exercício 5. (Seção 1.4, Strang, Problema 26) Seja $A \in M_{3,n}(\mathbb{R})$, com $n \in \mathbb{N}$. Se toda coluna de A é um múltiplo de $(1, 1, 1)$, então prove que Ax é sempre um múltiplo de $(1, 1, 1)$. Faça um exemplo 3 por 3. Após escalonar a matriz A, quantos pivôs a matriz na forma escalonada tem?

Exercício 6. (Seção 1.4, Strang, Problema 27) Qual é a matriz $E \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ que aplicada numa matriz $A \in M_{3,n}(\mathbb{R})$ subtrai 7 vezes a linha 1 da linha 3? Ou seja, faz $L_3 = L_3 - 7L_1$. A operação inversa deve ____ 7 vezes a linha _____ da linha ____ (Complete a frase). Qual a matriz R corresponde a esta operação inversa? Multiplique E por R.

Exercício 7. (Seção 1.4, Strang, Problema 31) Essa matriz 4 por 4 precisa ser multiplicada por quais matrizes elementares para ser escalonada?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 8. (Seção 1.4, Strang, Problema 34) Multiplique as matrizes abaixo na ordem EF e FE e E^2, em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 9. (Seção 1.4, Strang, Problema 46) Multiplicação por blocos separa matrizes em blocos (submatrizes). Se seus tamanhos tornam a multiplicação por blocos possível, então a multiplicação por blocos é válida.

Mostre que se $A \in M_{m,n_1}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,n_2}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n_1,p}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{n_2,p}(\mathbb{R})$, então

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = AC + BD.$$

Considere matrizes $A_1, B_1 \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $A_2, B_2 \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $A_3, B_3 \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ e $A_4, B_4 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix},$$

para algum valor particular dessas matrizes (tente não usar valores triviais como tudo ser zero. Procure números que tornem a conta fácil, mas que permitam entender o que está acontecendo).

Exercício 10. (Seção 1.4, Strang, Problema 49) Eliminação para matrizes com blocos 2 por 2. Considere matrizes A, B, C, D e S com tamanhos adequados. Quando $A^{-1}A = I$, multiplique o primeiro bloco por CA^{-1} e subtraia da segunda linha (a segunda llinha pode conter matrizes com várias linhas...) para achar o complemento de Schur S.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

.