

② Sistema de eq. lineares (Cap 5 Quateroni)

→ Gilbert Strang, MIT, Linear algebra and learning from data

→ Noble and Daniel, Álgebra linear aplicada

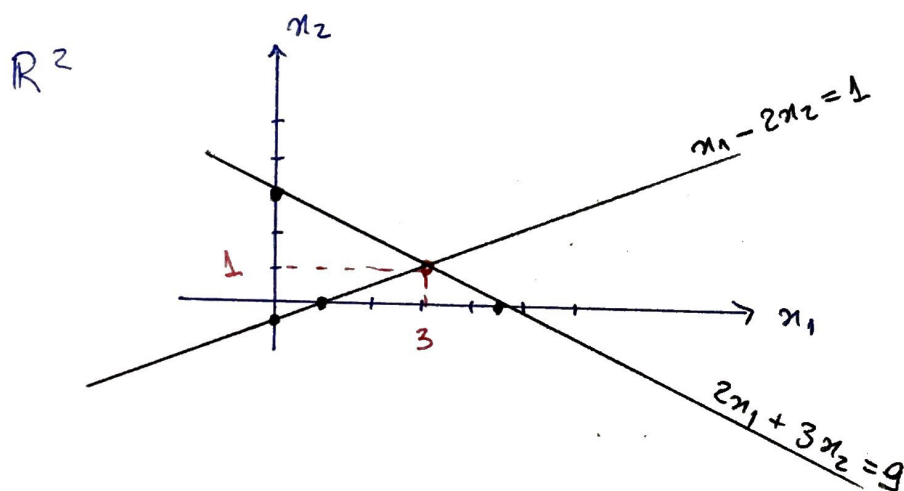
$$A_{m \times n}, \vec{x}_{n \times 1}, \vec{b}_{m \times 1}, \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

2 interpretações:

1) por linha: sistema de eq. lineares $\begin{cases} m = n^o \text{ eq} \\ n = n^o \text{ inc. (espaço } \mathbb{R}^n) \end{cases}$

ex) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$



solução:

$$(x_1, x_2) = (3, 1)$$

• $m > n$: mais eq. que dim. do espaço

$\begin{cases} 3 \text{ retas em } 2D \\ 4 \text{ planos em } 3D \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \text{ sol.} \\ \infty \text{ sol.} \\ \text{solução inexistente} \end{cases}$

• $m < n$: menos eq. que dim. do espaço

2 planos em 3D

$\begin{cases} \infty \text{ sol.} \\ \text{sol. inexistente} \end{cases}$

- $m = n$: $\begin{cases} 1 \text{ sol.} \\ \infty \text{ sol.} \\ \text{sol. inexistente} \end{cases}$

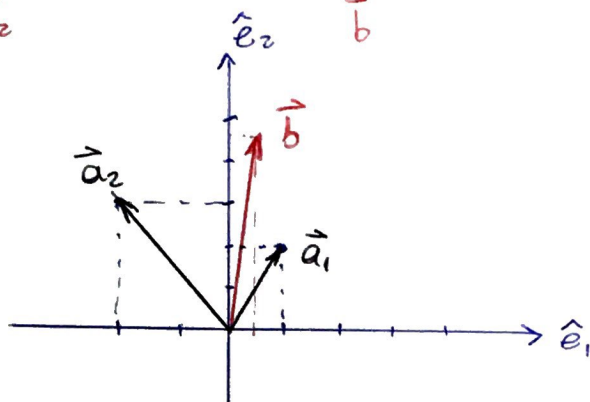
(2)

2) Combinações lineares de vetores coluna $\begin{cases} m = \dim. \text{espaço } (\mathbb{R}^m) \\ m = n^o \text{ de vetores } \vec{a}_i \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{b}$

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 = \vec{b}$$



$\text{posto}(A) = n^o \text{ de vetores } \vec{a}_i \text{ L.I.} \rightarrow \leq m \text{ e } \leq n$
(ou linhas L.I.)

- sistema tem solução se $\vec{b} \in \text{col}(A)$
- sistema tem solução única se $\vec{a}_i$'s são L.I.

* se $m > n$: menos vetores que dim. espaço:

- 1 sol: se $\vec{b} \in \text{col}(A)$
 - sol. inex: se $\vec{b} \notin \text{col}(A)$
 - ∞ sol: se $\vec{b} \in \text{col}(A)$ e $\vec{a}_i$'s L.D.
- } e $\vec{a}_i$'s L.I.

* se $m < n$: mais vetores que dim. espaço $\Rightarrow$ L.D.

- ∞ sol.
- sol. inexistente

* se $m = n$: $m = \text{vet.} = \text{dim. espaço}$

- 1 sol : se $\vec{a}_i$'s L.I.
 - sol. inex
 - ∞ sol.
- } se $\vec{a}_i$'s L.D.

OCTAVE: `rank(A)`

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

↳ transf. linear de $\vec{x}$ em $\vec{b}$

⇒ Caso particular: $m = n \Rightarrow A_{n \times n}, \vec{x}_{n \times 1}, \vec{b}_{n \times 1}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ tem sol. única $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

- achar A^{-1}
- métodos diretos (substituição)
- Regra de Cramer: A_i : subs. $\vec{a}_i$ por $\vec{b}$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$
- métodos iterativos

* FLOPS: floating-point operations per second (adição, mult.)

intel i5 ~ 20 Gflops ~ 20×10^9 flops

i7 ~ 40 " ~ 40 "

i9 ~ 100 " ~ 100 "

* Regra de Cramer:

- expansão de Laplace no cálculo do determinante

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \text{ (cofator)}$$

A_{ij} : A sem linha i e coluna j

custo computacional : $\approx 3(n+1)!$ FLO



$$\begin{aligned}
 m=15 : & \quad \frac{6,3 \times 10^3 \text{ FLO}}{20 \times 10^9 \text{ FLOPS}} \approx 52 \text{ min} \\
 m=20 : & \quad \frac{1,5 \times 10^{20} \text{ FLO}}{20 \times 10^9 \text{ FLOPS}} \approx 243 \text{ anos} \\
 m=10 : & \quad \frac{1,2 \times 10^8 \text{ FLO}}{20 \times 10^9 \text{ FLOPS}} \approx 0,006 \text{ sec.}
 \end{aligned}$$

⇒ Métodos diretos:

* Substituições :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \rightarrow x = 1 + 2y \rightarrow x = 3 \\ 2x + 3y = 9 \rightarrow 2(1 + 2y) + 3y = 9 \\ 4y + 3y = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

algoritmo:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \xrightarrow{-2x} \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 7y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

* Operações elementares: na matriz aumentada $[A\vec{b}]$ não altera a solução do sistema (equivalentes)

- E_{pq} : troca as linhas p e q
- $E_p(c)$: multiplica a linha p pelo escalar $c \neq 0$
- $E_{pq}(c)$: soma à linha p a linha q vezes $c \neq 0$

* matrizes elementares: representação matricial das operações elementares (E)

- construída aplicando a operação elementar em $I_{n \times n}$
- operação elementar em $A \Rightarrow EA$ (mult. pela esquerda)

ex) $I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[A\vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

1) $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\swarrow \searrow$ $I_{3 \times 3}$ com linhas 1 e 3 trocadas

$E_{13}[A\vec{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\swarrow \searrow$ A com linhas 1 e 3 trocadas

2) $E_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\leftarrow I_{3 \times 3}$ com linha 2 multiplicada por 3.

$E_2(3)[A\vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ $\leftarrow A$ com linha 2 multiplicada por 3

⑥

3) $E_{21}(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow I_{3 \times 3} \text{ com a linha 2 somada à } (-4) \times \text{a linha 1.}$

$$E_{21}(-4) [\vec{A} \vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \leftarrow A \text{ com a linha 2 somada à } (-4) \cdot \text{linha 1.}$$

* inversa da operação elementar: operação elementar que volta A ao estado anterior.

1) $E_{pq}^{-1} = E_{pq} \rightarrow \text{troca as linhas novamente}$

2) $E_p(c)^{-1} = E_p\left(\frac{1}{c}\right) \rightarrow \text{multiplica a linha } p \text{ por } \frac{1}{c}, c \neq 0$

3) $E_{pq}(c)^{-1} = E_{pq}(-c) \rightarrow \text{soma à linha } p \text{ a linha } q \text{ vezes } (-c).$

1) $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad E_{13} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = [\vec{A} \vec{b}]$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad E_2\left(\frac{1}{3}\right) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = [\vec{A} \vec{b}]$

3) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad E_{21}(4) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = [\vec{A} \vec{b}]$

2023

Aula ④

⑦

⇒ Método de Gauss: utiliza $E_{pq}(c)$ para transformar $[A\vec{b}]$ em triangular superior (zeros abaixo da diagonal principal) + subst. inversa.

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A_{n \times n}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\rightarrow \begin{bmatrix} \underline{a_{11}^{(0)}} & \underline{a_{12}^{(0)}} & \dots & \underline{a_{1m}^{(0)}} \end{bmatrix} \\ L_2 &\rightarrow \begin{bmatrix} \underline{a_{21}^{(0)}} & \underline{a_{22}^{(0)}} & \dots & \underline{a_{2m}^{(0)}} \end{bmatrix} \\ \vdots & \\ L_m &\rightarrow \begin{bmatrix} \underline{a_{m1}^{(0)}} & \underline{a_{m2}^{(0)}} & \dots & \underline{a_{mm}^{(0)}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underline{b_1^{(0)}} \\ \underline{b_2^{(0)}} \\ \vdots \\ \underline{b_m^{(0)}} \end{bmatrix}$$

* Zerar a_{21} :

$$L_2^{(1)} = L_2^{(0)} + c_{21} L_1^{(0)}$$

$$c_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

↳ linha 2 de $[A\vec{b}]$

① zerar abaixo de a_{11} : (usa $a_{11}^{(0)}$)

$$\text{for } i = 2, m: \quad L_i^{(1)} = L_i^{(0)} + c_{i1} L_1^{(0)}$$

$$c_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

② zerar abaixo de a_{22} : (usa $a_{22}^{(1)}$)

$$\text{for } i = 3, m: \quad L_i^{(2)} = L_i^{(1)} + c_{i2} L_2^{(1)}$$

$$c_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

* de forma geral: ① • $c_{in} = -\frac{a_{in}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, $i = n+1, \dots, m$

$$\bullet \quad a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)} + c_{in} a_{nj}^{(n-1)}, \quad \bullet \quad b_j^{(n)} = b_j^{(n-1)} + c_{in} b_n^{(n-1)}, \quad i, j = n+1, \dots, m$$

for $n = 1 : m-1$ (iterações, zerar abaixo de a_{nn})

8

for $i = n+1 : m$ (para cada linha abaixo de a_{nn})

$$c_{in} = - \frac{a_{in}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (\text{escalar } c \text{ usado na linha } i \text{ na iteração } n)$$

for $j = n : m$ (para cada coluna na linha i , não precisa fazer para as que já foram zeradas)

$$E_{in}(m_{in}) \rightarrow a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)} + c_{in} a_{nj}^{(n-1)}$$

end for

$$b_{in}^{(n)} = b_i^{(n-1)} + c_{in} b_n^{(n-1)}$$

end for

end for

② Substituição inversa:

$$x_m = \frac{b_m^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}}$$

$$x_{m-1} = \frac{b_{m-1} - a_{m-1,m} x_m}{a_{m-1,m-1}}$$

⋮

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad i = m : -1 : 1.$$

⇒ Decomposição LV: método de Gauss na forma matricial (2)

$$A_{m \times m} \Rightarrow A = L \cdot U \quad \left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow \text{triang. inferior com} \\ \text{diag. prime. 1} \\ U \rightarrow \text{triang. Sup.} \end{array} \right.$$

(não-singular)

$$A_{m \times m} = L_{m \times m} \cdot U_{m \times m}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{mm} \end{bmatrix}}_U$$

• método de Gauss: $[A \vec{b}] \Rightarrow [U \vec{d}]$

$$E_{pq}(c) \cdot [A \vec{b}]$$

ex) $A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

• $n = 1$: $E_{21}(-4) A^{(0)}$ (zerar abaixo de a_{11})

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{A^{(*)}}$$

$$E_{31}(-7) A^{(*)} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

• $n = 2$: (zerar abaixo de a_{22})

(10)

$$E_{32}\left(-\frac{6}{7}\right) A^{(1)} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -4/7 \end{bmatrix}$$

$A^{(2)} = U$

de forma resumida:

$$E_{32}\left(-\frac{6}{7}\right) E_{31}(-7) E_{21}(-4) A = U$$

(ordem importa!)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & -6/7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$FA = U$$

$$A = \underbrace{F^{-1}}_{\text{produto das inversas das operações elementares}} U$$

produto das inversas das operações elementares.

$$F^{-1} = E_{21}(4) E_{31}(7) E_{32}\left(\frac{6}{7}\right)$$

para reverter as operações: sequência inversa.

$$F^{-1} \cdot F = I \rightarrow \text{testar}$$

além disso: F^{-1} e F são triang. inferiores (L)

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 6/7 & 1 \end{bmatrix} = L \quad \text{e} \quad A = L \cdot U.$$

cálculo numérico: Gauss: $A \rightarrow U$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & -m_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$