

Álgebra Linear e Aplicações

- *Matrizes elementares e escalonamento*



MATRIZES ELEMENTARES

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS SOBRE MATRIZES (L_i SÃO LINHAS)

1) MULTIPLICAR LINHA POR CONSTANTE NÃO NULA: $L_i \mapsto \lambda L_i$

2) TROCAR LINHAS: $L_i \leftrightarrow L_j, i \neq j$

3) SOMAR UMA LINHA COM UM MÚLTIPLO DE OUTRA: $L_i \mapsto L_i + \lambda L_j, i \neq j$

TODAS AS OPERAÇÕES ACIMA SÃO INVERSÍVEIS:

A INVERSA DE 1 É $L_i \mapsto \lambda^{-1} L_i$

A INVERSA DE 2 É $L_i \leftrightarrow L_j$

A INVERSA DE 3 É $L_i \mapsto L_i - \lambda L_j$

MATRIZES ELEMENTARES

DEFINIÇÃO: UMA MATRIZ ELEMENTAR $E \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É UMA MATRIZ QUE FOI OBTIDA DA MATRIZ IDENTIDADE APÓS A APLICAÇÃO DE UMA OPERAÇÃO ELEMENTAR.

TIPOS DE MATRIZES ELEMENTARES:

1) $E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \lambda & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ LINHA i .
COLUMA j

$$E_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \text{ e } i \neq i_0 \\ \lambda, & i = j = i_0 \end{cases}$$

NESTE CASO, $E = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n e_i e_i^T + \lambda e_{i_0} e_{i_0}^T$

$$2) E = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{LINHA } i_0 \\ \leftarrow \text{LINHA } j_0 \\ \uparrow \\ \text{COLUMA } i_0 \quad \text{COLUMA } j_0 \end{matrix} \quad E_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, i \neq i_0 \text{ e } i \neq j_0 \\ 1, & i=i_0, j=j_0 \\ 1, & i=j_0, j=i_0 \\ 0, & \text{DE OUTRA FORMA} \end{cases}$$

$$\text{NESTE CASO, } E = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \{i_0, j_0\}}}^n e_i e_i^T + e_{i_0} e_{j_0}^T + e_{j_0} e_{i_0}^T$$

$$3) E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{LINHA } i_0 \\ \uparrow \\ \text{COLUMA } j_0 \end{matrix} \quad E_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ \lambda, & i=i_0, j=j_0 \\ 0, & \text{DE OUTRA FORMA} \end{cases}$$

$$\text{NESTE CASO, } E = \sum_{i=1}^n e_i e_i^T + \lambda e_{i_0} e_{j_0}^T = I + \lambda e_{i_0} e_{j_0}^T$$

PROPOSIÇÃO: SEJA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ E $E \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ UMA MATRIZ ELEMENTAR OBTIDA DA IDENTIDADE APÓS UMA OPERAÇÃO ELEMENTAR. LOGO EA É A MATRIZ OBTIDA DE A APÓS APLICAR A MESMA OPERAÇÃO ELEMENTAR.

DEMO: SEJA $A = \begin{bmatrix} - & L_1 & - \\ & \vdots & \\ - & L_m & - \end{bmatrix}$, L_j LINHA j DE A . LOGO

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{LINHA } j_0 \\ \uparrow \\ \text{COLUMA } j_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} - & L_1 & - \\ & \vdots & \\ - & L_m & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_{j_0} \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{LINHA } i_0 \\ \leftarrow \text{LINHA } j_0 \\ \uparrow \\ \text{COLUMA } i_0 \quad \text{COLUMA } j_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} - & L_1 & - \\ & L_{j_0} & \\ & L_{j_0} & \\ - & L_m & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j_0} \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{LINHA } i_0 \\ \uparrow \\ \text{COLUMA } j_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} - & L_1 & - \\ & L_{j_0} & \\ - & L_m & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j_0} + \lambda L_{j_0} \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO: DIZEMOS QUE UMA MATRIZ $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É INVERSÍVEL SE EXISTIR $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ T.B. $BA = AB = I$. B É CHAMADA DE INVERSA DE A ($B = A^{-1}$).

PROPOSIÇÃO: SE A É INVERSÍVEL, SUA INVERSA É ÚNICA.

DEMO: SEJAM B E C INVERSAS DE A . LOGO $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. ■

OBS: USAMOS A PROPRIEDADE $(AB)C = A(BC)$ ^{$l \leftrightarrow k$}
 (DE FATO $(AB)C_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_k \sum_l A_{il} B_{lk} C_{kj} = \sum_l \sum_k A_{il} B_{lk} C_{kj} = \sum_l A_{il} (BC)_{lj} = (A(BC))_{ij} = (A(BC))_{ij}$.)

PROPOSIÇÃO: AS MATRIZES ELEMENTARES SÃO INVERSÍVEIS E AS INVERSAS TAMBÉM SÃO MATRIZES ELEMENTARES.

DEMO:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{array} \right]^{-1} &= & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\lambda & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{array} \right]^{-1} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{array} \right]^{-1} &= & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{array} \right]^{-1} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{array} \right]^{-1} &= & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{array} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO: DIZEMOS QUE UMA MATRIZ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ É EQUIVALENTE A $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ SE B PUDER SER OBTIDO DE A APÓS UM NÚMERO FINITO DE OPERAÇÕES ELEMENTARES. (OU SEJA, $B = E_1 \dots E_m A$, E_j MATRIZES ELEMENTARES). NOTASÃO: $A \sim B$.

PROPOSIÇÃO $A \sim B$ É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

DEMO: 1) $A \sim A$

DE FATO, $A = IA$ E I É MATRIZ ELEMENTAR

2) $A \sim B$, ENTÃO $B \sim A$

DE FATO, $A \sim B \Leftrightarrow B = E_1 \dots E_m A \Leftrightarrow A = E_m^{-1} \dots E_1^{-1} B \Leftrightarrow B \sim A$.

3) $A \sim B$ E $B \sim C$, ENTÃO $A \sim C$

DE FATO, $B = E_1 \dots E_m A$ E $C = \tilde{E}_1 \dots \tilde{E}_q B$ IMPLICA $C = \tilde{E}_1 \dots \tilde{E}_q E_1 \dots E_m A \Rightarrow A \sim C$

EXEMPLO: AS MATRIZES ABAIXO SÃO EQUIVALENTES

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 4L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = -\frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - \frac{1}{4}L_1} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = \frac{4}{3}L_2} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - 5L_2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRIZES TRIANGULARES

DEFINIÇÃO: • DIZEMOS QUE $L \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ É UMA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR SE $L_{ij} = 0$ SE $j > i$
 • DIZEMOS QUE $U \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ É UMA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR SE $U_{ij} = 0$ SE $i > j$.
 ACIMA, L_{ij} E U_{ij} SÃO AS ENTRADAS DAS MATRIZES L E U .

EXEMPLO: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ É TRIANGULAR INFERIOR E $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ É TRIANGULAR SUPERIOR.

DE MANEIRA UM POUCO MAIS GERAL, PODEMOS DEFINIR MATRIZES ESCALONADAS

DEFINIÇÃO: DIZEMOS QUE UMA MATRIZ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ É UMA MATRIZ NA FORMA ESCALONADA SE AS CONDIÇÕES ABAIXO VALEM PARA TODO $i \in \{1, \dots, m\}$:

- 1) DADO $i \in \{1, \dots, m\}$, SE EXISTIR $j \in \{1, \dots, n\}$ TAL QUE $A_{ij} \neq 0$ E $A_{il} = 0, \forall l < j$, ENTÃO $A_{kl} = 0$ PARA TODO $k > i, l \leq j$.
- 2) DADO $i \in \{1, \dots, m\}$, SE $A_{ij} = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}$, ENTÃO $A_{kl} = 0, \forall k \in \{i, \dots, m\}$ E $j \in \{1, \dots, n\}$.

ILUSTRAÇÃO:

LINHA $i \rightarrow$

TUDO IGUAL A 0.				$\neq 0$		
0	...	0	A_{ij}	A_{ij+1}	...	A_{in}
0	...	0	0	A_{i+j+1}	...	
0	...	0	0	0	...	

↓

TUDO IGUAL A ZERO!

OU LINHA $i \rightarrow$

LINHA = 0			
0	...	0	
0	...	0	
0	...	0	

↳ TUDO IGUAL A 0.

TÍPICA MATRIZ ESCALONADA:

"FORMA DE ESCADA"

0	...	0	$\neq 0$	A_{1n_1}	$\neq 0$	...	A_{1n}				
0	...	0	...	0	$\neq 0$	A_{2n_2}	A_{2n}				
0	...	0	...	0	...	0	$\neq 0$	A_{3n_3}	A_{3n}		
0	...	0	...	0	...	0	...	0	$\neq 0$	A_{pn_p}	A_{pn}
0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	
0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	

Aqui

$n_1 < n_2 < \dots < n_p$

Linhas = 0

AS ENTRADAS $A_{p1}, \dots, A_{pn}$ SÃO CHAMADAS DE PIVÔS. POR DEFINIÇÃO, PIVÔS SÃO SEMPRE DIFERENTES DE 0. NOTE QUE O NÚMERO DE PIVÔS É SEMPRE MENOR OU IGUAL A m E A n ($p \leq \min\{m, n\}$)

EXEMPLOS:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 PIVÔS: 1, 5, 3 2 PIVÔS: 1, 1 3 PIVÔS: 1, 1, 1

TEOREMA (IMPORTANTE): PARA TODA MATRIZ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, EXISTE UM CONJUNTO FINITO DE OPERAÇÕES ELEMENTARES QUE TRANSFORMA A MATRIZ A NUMA MATRIZ NA FORMA ESCALONADA.
 DE TIPO 2 E 3 (OU SEJA, TODA MATRIZ É EQUIVALENTE A UMA MATRIZ NA FORMA ESCALONADA)

DEMO: VAMOS PROVAR POR INDUÇÃO EM m .

CASO $m=1$ NESTE CASO $A = [A_{11} \dots A_{1n}]$ JÁ ESTÁ NA FORMA ESCALONADA.

SE VALE PARA $m-1$, VALE PARA m SEJA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. SE $A=0$, ENTÃO A ESTÁ NA FORMA ESCALONADA. SE $A \neq 0$, ESCOLHO $A_{i_0, j_0} \neq 0$ TAL QUE $A_{i,j} = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ E $\forall 1 \leq j < j_0$. TROCAMOS AS LINHAS 1 E i_0 (SE PRECISAR) E OBTAMOS

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{1,j_0} & \bar{A}_{1,j_0+1} & \dots & \bar{A}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{2,j_0} & \bar{A}_{2,j_0+1} & \dots & \bar{A}_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{i_0,j_0} & \bar{A}_{i_0,j_0+1} & \dots & \bar{A}_{i_0n} \end{bmatrix}$$

A PARTIR DE $\bar{A}$, FAZEMOS AS OPERAÇÕES $L_2 = L_2 - \frac{\bar{A}_{2,j_0}}{\bar{A}_{1,j_0}} L_1$, $L_3 = L_3 - \frac{\bar{A}_{3,j_0}}{\bar{A}_{1,j_0}} L_1$, $\dots$, $L_k = L_k - \frac{\bar{A}_{k,j_0}}{\bar{A}_{1,j_0}} L_1$, $\dots$, $L_m = L_m - \frac{\bar{A}_{m,j_0}}{\bar{A}_{1,j_0}} L_1$.

OBTENHAMOS A MATRIZ

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{1j} & \bar{A}_{1,j+1} & \dots & \bar{A}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{2j} & \bar{A}_{2,j+1} & \dots & \bar{A}_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{mj} & \bar{A}_{m,j+1} & \dots & \bar{A}_{mn} \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow M \in M_{(m-1), (m-1)}(\mathbb{R})$

PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO, PODEMOS AGORA APLICAR OPERAÇÕES ELEMENTARES EM M DE FORMA A DEIXÁ-LA NA FORMA ESCALONADA. ■

OBS: EM TERMOS MATRICIAIS, TEMOS

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow j_0 \text{ - COLUMNA} \\ \downarrow j_0 \text{ LINHA} \end{matrix}$$

$$A \text{ E } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{A_{2j_0}}{A_{1j_0}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \bar{A}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{A_{2j_0}}{A_{1j_0}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{A_{mj_0}}{A_{1j_0}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}$$

EXEMPLO: 1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

$L_2 = L_2 - 4L_1$

2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$L_1 \leftrightarrow L_2$ $L_3 = L_3 - 2L_1$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$L_1 \leftrightarrow L_2$ $L_3 = L_3 - 2L_1$