INTRODUÇÃO ÀS EDO LINEARES

Vamos, nesta aula e nas próximas duas, falar de Equações Diferenciais Ordinárias, e, ao fazê-lo, vamos adiantar vários assuntos que só discutiremos em detalhe mais tarde no semestre. Os mais importantes desses "assuntos do futuro" são

- séries de funções e séries de potências em particular e
- álgebra linear, autovalores e autovetores.

EDO:

A equação Diferencial Ordinária mais simples do mundo é

$$(*) \quad y' = y$$

Isto é, estamos procurando uma função ~~que~~ $y = y(x)$ cuja derivada $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ é igual a ela própria.

~~Em geral~~ Mais geralmente, uma EDO é uma equação ~~da forma~~ envolvendo derivadas ~~$a_n(x) y^{(n)} + a$~~ $y' = \cancel{f(x,y)}$ de uma função $y(x)$.

Ao invés de darmos sequência às generalidades, vamos logo mergulhar nos exemplos mais importantes.

A equação diferencial ordinária mais importante da história da humanidade é a 2da LEI DE NEWTON

$$\boxed{ma = F}$$

O que chamamos de "a" acima, a ACELERAÇÃO, é a taxa de variação da velocidade de um corpo de massa m em movimento, quando a força F age sobre ele.

Neste contexto, em geral usamos a variável t, de "tempo", como variável independente, ao invés de x.

Assim • $y(t)$ é a posição do corpo no espaço

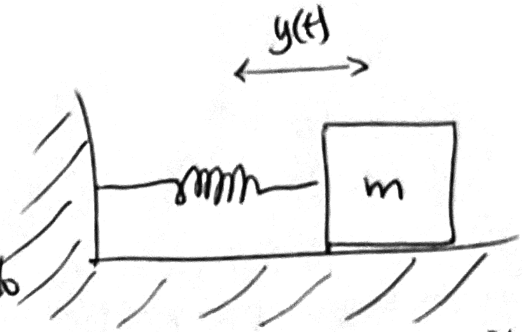
• $v(t) = \frac{dy}{dt}(t)$ é sua VELOCIDADE

• $a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$ é sua ACELERAÇÃO.

A 2da Lei de Newton é, então,

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2} = F} \quad \text{ou} \quad \boxed{my'' = F}$$

A força F deve ser determinada por considerações físicas.



<u>Lei de Hooke</u>: sistema massa-mola

Nesse caso, Hooke diz que a força é diretamente proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio, no sentido oposto à velocidade:

$$\boxed{m y'' = -ky}$$

onde m = massa e k é uma constante que depende apenas da mola. Ambos $m, k > 0$.

$$(**) \quad \boxed{y'' = -\omega^2 y}, \quad \text{onde} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} > 0$$

Como fizemos com

$$y' = ay \qquad y(x) = Ce^{ax} \Rightarrow y'(x) = a(Ce^{ax}) = ay(x)$$

adivinhando a solução, podemos fazer o mesmo aqui e verificar que a solução geral de $(**)$ é

$$\boxed{y(t) = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t}$$

Façamos algo que tem alguma melhor chance de se tornar uma "teoria", isto é, algo que possamos tentar usar mais geralmente.

A solução de $y' = ay$ tem, como com frequência acontece quando derivamos, uma "constante indeterminada":

$$\boxed{y(t) = C e^{at}}$$

Essa constante pode ser determinada se sabemos um VALOR INICIAL: $\underline{y(0) = C e^{a0} = C}$

Assim, podemos pensar que queremos resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$y(t) = y_0 e^{at}$$

No caso da 2ª lei de Newton

$$my'' = F$$

como derivamos duas vezes, devemos esperar precisar de duas <u>condições iniciais</u>.

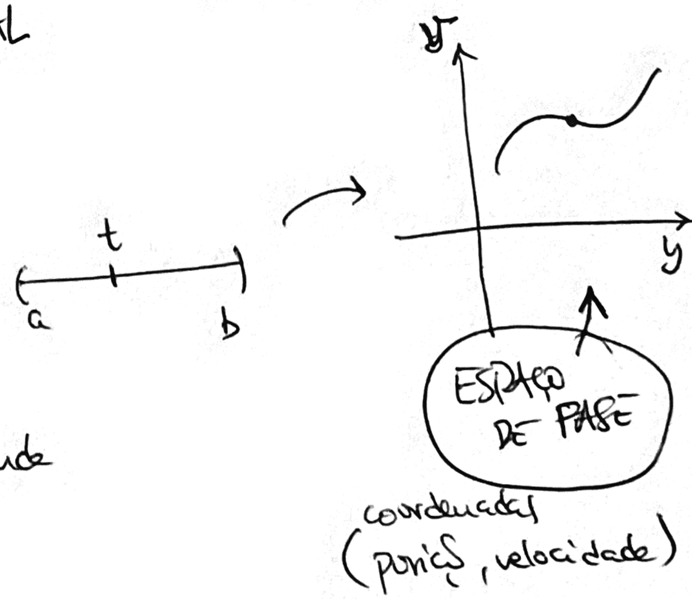
Mas aqui vamos mudar de estratégia e adotar um ponto de vista equivalente mas melhor adaptado à criação de uma "teoria":

$$(***) \begin{cases} y' = v \\ mv' = my'' = F \end{cases}$$

Assim, ao invés de considerarmos $\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto y(t) \end{aligned}$

consideramos uma função VETORIAL

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$



$$(***) \quad \boxed{Y' = \Phi(Y)}$$ onde

$$\Phi\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ F/m \end{pmatrix}$$

Lei de Hooke

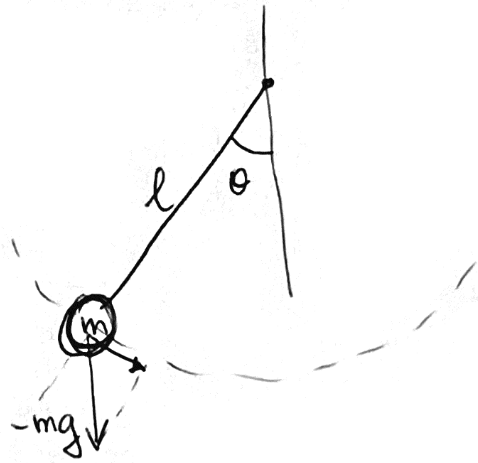
$$my'' = -ky$$

$$\begin{cases} y' = v \\ mv' = -ky \end{cases} \iff \begin{cases} y' = v \\ v' = -\frac{k}{m}\, y \end{cases}$$

$$\iff \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k}{m}\, y \end{bmatrix}$$

$$Y' = \Phi(Y) \quad \text{onde} \quad \Phi\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 y \end{pmatrix}$$

O PÊNDULO SIMPLES



No caso do pêndulo simples, a força que "contribui" para o movimento é a força tangencial $-mg\,\text{sen}\,\theta$.

Nesse caso a 2ª LN é

$$\cancel{m}l\theta'' = -\cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta$$

aceleração linear

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta \end{bmatrix}$$

$$Y = \Phi[Y]$$

<u>Pequenas oscilações</u>: Para $x \approx 0$, $\text{sen}\, x \approx x$ e o pêndulo simples se aproxima então do oscilador harmônico.

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -g/_\ell \, \text{sen}\,\theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -g/_\ell \, y \end{bmatrix}$$

<u>Resolvendo as equações acima</u>

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$y'(0) = ay_0 \quad y''(t) = (y'(t))' \Rightarrow a y'(t) = a^2 y(t)$

$y''(0) = a^2 y_0$

$\vdots$

$y^{(n)}(0) = a^n y_0$

$\vdots$

This will be formalized and proven later in the course.

<u>Ex</u>: $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = f'(0) = \dots = 1$

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Lembre-se da "série" de Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Como calculamos as derivadas em 0 de todas as ordens de y, podemos escrever

$$y(t) = y_0 + ay_0 t + \frac{a^2 y_0}{2!} t^2 + \frac{a^3 y_0}{3!} t^3 + \dots + \frac{a^n y_0}{n!} t^n + \dots$$

$$= y_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots + \frac{(at)^n}{n!} + \dots \right) = y_0 e^{at}$$

Para o oscilador harmônico vamos:

1. Usar x e y ao invés de y e v
2. mudar as unidades de forma que $m = k \Rightarrow \omega^2 = 1$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}} \iff \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{\iff X' = AX \text{ onde } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

$$Y' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = AY$$

$$\boxed{Y' = AY \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Assim, no mínimo formalmente, há uma grande semelhança entre

$$y' = ay \iff y(t) = y_0 e^{at} = e^{at} y_0$$

e

$$Y' = AY \overset{?}{\iff} Y(t) = e^{tA} Y_0 \quad ??$$

Vamos fazer o mesmo que fizemos com a equação $y' = ay$, $y(0) = y_0$ e escrever uma série para a equação. Aqui tomamos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ qualquer matriz 2×2.

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = Y_0 \end{cases}$$

fazer a conta

$$Y' = AY \Rightarrow Y'(0) = AY(0) = A\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}} = AY_0$$

$$Y'' = (Y')' = (AY)' = AY' = A^2 Y \Rightarrow Y''(0) = A^2 Y_0$$

$$Y''' = (Y'')' = (A^2 Y)' = A^2 A Y = A^3 Y \Rightarrow Y'''(0) = A^3 Y_0$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \cdots \\ y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \cdots \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = Y(0) + Y'(0)\cdot t + Y''(0)\frac{t^2}{2!} + Y'''(0)\cdot\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$= Y_0 + AY_0\, t + A^2 Y_0 \frac{t^2}{2!} + A^3 Y_0 \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \cdots\right) Y_0$$

$$:= e^{tA} Y_0$$

A questão é que sentido faz essa série!

Vejamos o que acontece no nosso caso, com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vamos ter que calcular as potências de A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -A, \quad A^4 = I$$

Portanto, a série é

$$Y(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \cdots \right) Y_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \mp \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - + \cdots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + - \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - + \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos t + y_0 \operatorname{sen} t \\ -x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + y_0 \operatorname{sen} t \\ y(t) = -x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t \end{cases}$$