Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Universidade de São Paulo

Cálculo I - Lista 7: Integrais II

Prof. Responsável: Andrés Vercik

1. Use o teorema fundamental do calculo para achar a derivada da função.

a) $g(x)=\int_0^x \sqrt{1+2t}\,dt$

b) $g(x)=\int_1^x \ln t\,dt$

c) $g(y)=\int_2^y t^2 sent\,dt$

d) $g(u)=\int_{-1}^u \frac{1}{x+x^2}\,dx$

e) $g(x)=\int_x^2 \cos(t^2)\,dt$

f) $g(x)=\int_x^{10} tg\theta\, d\theta$

g) $g(x)=\int_2^{1/x} arctgt\,dt$

h) $g(x)=\int_0^{x^2} \sqrt{1+r^3}\,dr$

i) $y=\int_3^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{t}\,dt$

j) $y=\int_1^{\cos x} (t+sent)\,dt$

k) $y=\int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1+u^2}\,du$

l) $y=\int_{e^x}^0 sen^3 t\,dt$

2. Use teorema fundamental do calculo para calcular a integral, ou explique o porquê não existe.

a) $\int_{-1}^3 x^5\,dx$

b) $\int_2^8 (4x+3)\,dx$

c) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

d) $\int_1^2 x^{-2}\,dx$

e) $\int_0^4 (1+3y-y^2)\,dy$

f) $\int_0^1 x^{3/7}\,dx$

g) $\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt$

h) $\int_{-1}^1 \frac{3}{t^4}\,dt$

i) $\int_3^3 \sqrt{x^5+2}\,dx$

j) $\int_\pi^{2\pi} \cos\theta\, d\theta$

k) $\int_{-4}^2 \frac{2}{x^6}\,dx$

l) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

m) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} sent\,dt$

n) $\int_0^1 (3+x\sqrt{x})\,dx$

o) $\int_{\pi/4}^{\pi} \sec^2\theta\, d\theta$

p) $\int_1^9 \frac{1}{2x}\,dx$

q) $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x\,dx$

r) $\int_8^9 2^t\,dt$

s) $\int_{-e^2}^{-e} \frac{3}{x}\,dx$

t) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{6}{1+x^2}\,dx$

u) $\int_0^{0,5} \frac{3}{x}\,dx$

3. Calcule as seguintes integrais:

   a) $\int_0^2 f(x)dx$, onde $f(x)=\begin{cases} x^4 & se \quad 0\le x\le 1 \\ x^5 & se \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$

   b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, onde $f(x)=\begin{cases} x & se \quad -\pi\le x\le 0 \\ senx & se \quad 0\le x\le \pi \end{cases}$

4. Ache a derivada da função:

   a) $g(x)=\int_{2x}^{3x}\frac{u^2-1}{u^2+1}du$

   b) $g(x)=\int_{tgx}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt$

   c) $y=\int_{\sqrt{x}}^{x^3}\sqrt{t}\,\mathrm{sen}\,t\,dt$

   d) $y=\int_{\cos x}^{5x}\cos(u^2)du$

5. Encontre a área das seguintes regiões.

   a) $y=x+1$, $y=9-x^2$, $x=-1$, $x=2$

   b) $y=senx,\quad y=e^x,\quad x=0,\quad x=\pi/2$

   c) $y=x,\quad y=x^2$

   d) $y=x^2,\quad y=x^4$

   e) $y=\frac{1}{x},\quad y=\frac{1}{x^2},\quad x=2$

   f) $y=1+\sqrt{x},\quad y=\frac{(3+x)}{3}$

   g) $y=x^2\quad y^2=x$

   h) $y=x,\quad y=\sqrt[3]{x}$

   i) $y=4x^2,\quad y=x^2+3$

   j) $y=x^3-x,\quad y=3x$

   k) $y=x+1,\quad y=(x+1)^2,\quad x=-1,\quad x=2$

   l) $y=x^2+1\quad y=3-x^2,\quad x=-2,\quad x=2$

   m) $y^2=x,\quad x-2y=3$

   n) $y=\frac{1}{x},\quad x=0,\quad y=1,\quad y=2$

   o) $x=1-y^2,\quad x=y^2-1$

   p) $y=\cos x,\quad y=\sec^2 x,\quad x=-\frac{\pi}{4},\quad x=\frac{\pi}{4}$

   q) $y=\cos x,\quad y=\mathrm{sen}\,2x,\quad x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}$

   r) $y=\mathrm{sen}\,x,\quad y=\mathrm{sen}\,2x,\quad x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}$

   s) $y=\cos x,\quad y=1-\frac{2x}{\pi}$

   t) $y=|x|,\quad y=x^2-2$

   u) $y=x^2,\quad y=\frac{2}{(x^2+1)}$

   v) $y=\mathrm{sen}\,\pi x,\quad y=x^2-x,\quad x=2$

6. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados. Esboce a região, o sólido e um disco típico ou arruela.

   a) $y = x^2, \quad x = 1, \quad y = 0;$ ao redor do eixo x.

   b) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1;$ ao redor do eixo x.

   c) $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0;$ ao redor do eixo x.

   d) $y = \sqrt{x-1}, \quad x = 2, \quad x = 5, \quad y = 0;$ ao redor do eixo x.

   e) $y = x^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad y = 4, \quad x = 0;$ ao redor do eixo y

   f) $x = y - y^2, \quad x = 0;$ ao redor do eixo y

   g) $y = x^2, \quad y^2 = x;$ ao redor do eixo x.

   h) $y = \sec x, \quad y = 1, \quad x = -1, \quad x = 1;$ ao redor do eixo x.

   i) $y = x^{2/3}, \quad x = 1, \quad y = 0;$ ao redor do eixo y.

   j) $y = x, \quad y = \sqrt{x};$ ao redor do eixo y.

   k) $y = x^2, \quad y = 4;$ ao redor de y=1.

   l) $y = x^4, \quad y = 1;$ ao redor de y=4.

   m) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3;$ ao redor de y=2.

   n) $x = y^2, \quad x = 1;$ ao redor de y=-1.

   o) $y = x, \quad x = 1;$ ao redor de x=1.

   p) $y = x, \quad y = \sqrt{x};$ ao redor de x=2.

   q) $y = x^2, \quad x = y^2;$ ao redor de x=-1.

   r) $y = x, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4;$ ao redor de x=1.

7. Escreva, mas não calcule, uma integral para os valores dos sólidos obtidos pela rotação da região limitada pelas curvas dadas e ao redor das retas especificadas.

   a) $y = \ln x, \quad y = 1, \quad x = 1;$ ao redor do eixo x .

   b) $y = \sqrt{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 5;$ ao redor do eixo y.

   c) $y = 0, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi;$ ao redor de y=1.

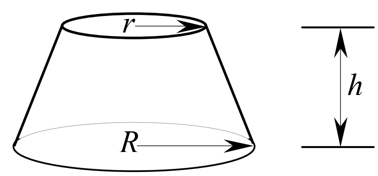
d) $y=0, \quad y=\operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi;$ ao redor de y=-2.

e) $x^2 - y^2 = 1, \quad x = 3;$ ao redor de x=-2.

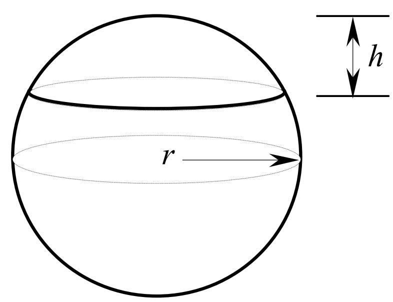
f) $2x + 3y = 6, \quad (y-1)^2 = 4 - x$ ao redor de x=-5.

8. Encontre o volume do sólido descrito.

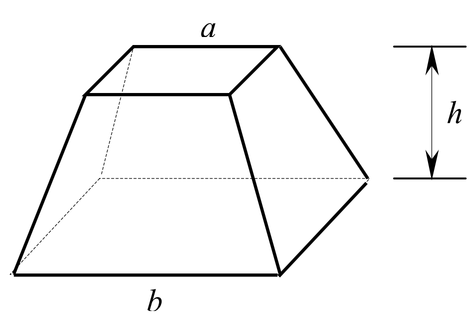
a) Um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.



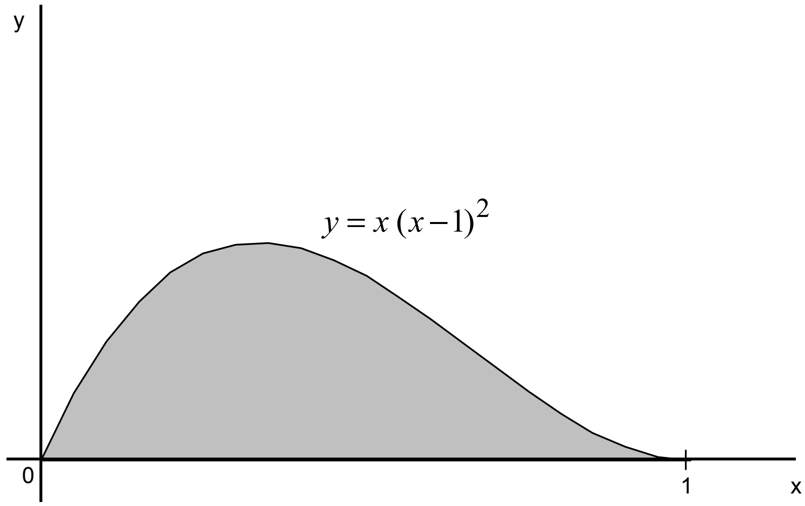
b) Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.



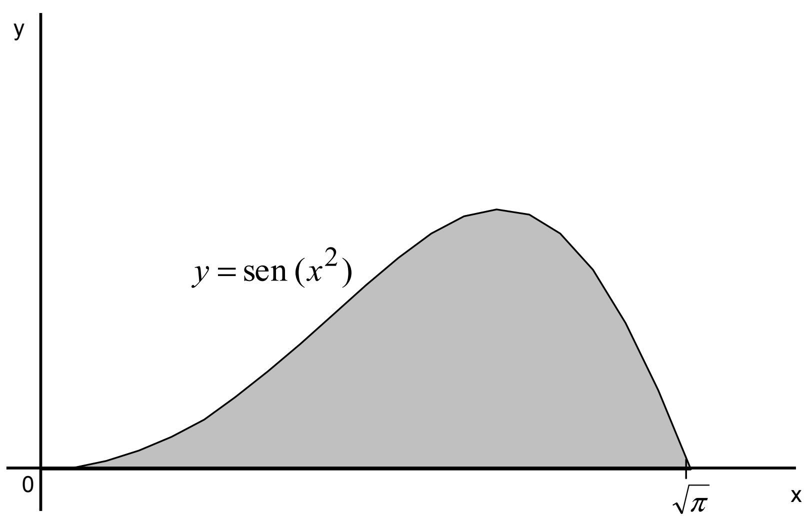
c) Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.



9. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura ao redor do eixo y. Explique por que é inconveniente fatiar para obter o volume V de S. Esboce uma casca cilíndrica típica de aproximação. Qual é a circunferência e a altura? Use cascas para encontrar o volume V.



10. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura ao redor do eixo y. Esboce uma casca cilíndrica típica, e encontre sua circunferência e altura. Use cascas para encontrar o volume de S. Você acha que esse método é preferível ao fatiamento?



11. Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação ao redor do eixo y da região limitada pelas curvas dadas. Esboce a região e a casca típica.

   a) $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$
   b) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$
   c) $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
   d) $y = x^2 - 6x + 10, \quad y = -x^2 + 6x - 6$
   e) $y^2 = x, \quad x = 2y$

12. Seja V o volume de um sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Encontre V pelos métodos de fatiamento e cascas cilíndricas. Em ambos os casos, desenhe um diagrama para explicar o seu método.

13. Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor do eixo x. Esboce a região e a casca típica.

   a) $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$
   b) $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$
   c) $y = x^2, \quad y = 9$
   d) $y^2 - 6y + x = 0, \quad x = 0$
   e) $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x + y = 2$
   f) $x + y = 3, \quad x = 4 - (y-1)^2$

14. Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação de região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados. Esboce a região e uma casca típica.

   a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$ ao redor de $x = 1$
   b) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = -1;$ ao redor do eixo y
   c) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$ ao redor de $x = 4$
   d) $y = 4x - x^2, \quad y = 8x - 2x^2;$ ao redor de $x = -2$
   e) $y = \sqrt{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 5;$ ao redor de $y = 3$
   f) $y = x^2, \quad x = y^2;$ ao redor de $y = -1$

15. Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume de um sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

a) $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 2;$ ao redor do eixo y

b) $y = x, \quad y = 4x - x^2;$ ao redor de $x = 7$

c) $y = x^4, \quad y = \mathrm{sen}(\pi x/2);$ ao redor de $x = -1$

d) $y = 1/(1 + x^2), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$ ao redor de $x = 2$

e) $x = \sqrt{\mathrm{sen}\, y}, \quad 0 \le y \le \pi, \quad x = 0;$ ao redor de $y = 4$

f) $x^2 - y^2 = 7, \quad x = 4;$ ao redor de $y = 5$

16. A região limitada pelas curvas dadas é girada ao redor dos eixos especificados. Ache o volume do sólido resultante por qualquer método.

a) $y = x^2 + x - 2, \ y = 0;$ ao redor do eixo x

b) $y = x^2 - 3x + 2, \ y = 0;$ ao redor do eixo x

c) $y = 5, \ y = x + (4/x);$ ao redor de $x = -1$

d) $x = 1 - y^4, \ x = 0;$ ao redor de $x = 2$

e) $x^2 + (y-1)^2 = 1;$ ao redor do eixo y

f) $x^2 + (y-1)^2 = 1;$ ao redor do eixo x

17. Encontre o valor médio da função no intervalo dado.

a) $f(x) = x^2, \quad [-1, 1]$

b) $f(x) = 1/x, \quad [1, 4]$

c) $g(x) = \cos x, \quad [0, \pi/2]$

d) $g(x) = \sqrt{x}, \quad [1, 4]$

e) $f(t) = te^{-t^2}, \quad [0, 5]$

f) $f(\theta) = \sec\theta\, tg\theta, \quad [0, \pi/4]$

g) $h(x) = \cos^4 x\, \mathrm{sen}\, x, \quad [0, \pi]$

h) $h(r) = 3/(1+r)^2, \quad [1, 6]$

18. i) Encontre o valor médio de f no intervalo dado. ii) Encontre c tal que $f_{méd} = f(c)$. iii) Esboce o gráfico de f e um retângulo cuja área é a mesma que a área sob o gráfico de f .

a) $f(x) = 4 - x, \quad [0\ 2]$

b) $f(x) = e^x, \quad [0, 2]$

19. Use a fórmula do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = 2 - 3x, -2 \le x \le 1$. Verifique sua resposta notando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

20. Use a fórmula do comprimento de arco para achar o comprimento da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \le x \le 2$. Verifique sua resposta notando que a curva é um quarto de círculo.

21. Ache o comprimento de arco da curva dada do ponto A ao ponto B.

a) $y^2 = (x-1)^3$; $A(1, 0)$, $B(2, 1)$

b) $12xy = 4y^4 + 3$; $A\left(\frac{7}{12}, 1\right)$, $B\left(\frac{67}{24}, 2\right)$

22. Calcule o comprimento da curva

a) $y = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\right)^{3/2}$, $0 \le x \le 1$

b) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$, $2 \le x \le 4$

c) $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{8x^2}$, $1 \le x \le 3$

d) $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)$, $0 \le y \le 9$

e) $y = \ln(\sec x)$, $0 \le x \le \pi/4$

f) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, $\pi/6 \le x \le \pi/3$

g) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$

h) $y = \ln x$, $1 \le x \le \sqrt{3}$

i) $y = \cosh x$, $0 \le x \le 1$

j) $y^2 = 4x$, $0 \le y \le 2$

k) $y = e^x$, $0 \le x \le 1$

l) $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, $a \le x \le b$, $a > 0$

23. Monte, mas não avalie, uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo dado.

a) $y = \ln x$, $1 \le x \le 3$; *eixo x*

b) $y = \operatorname{sen}^2 x$, $0 \le x \le \pi/2$; *eixo x*

c) $y = \sec x$, $0 \le x \le \pi/4$; *eixo y*

d) $y = e^x$, $1 \le y \le 2$; *eixo y*

24. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor de eixo x.

a) $y = x^3, \qquad 0 \le x \le 2$
b) $y^2 = 4x + 4, \quad 0 \le x \le 8$
c) $y = \sqrt{x}, \qquad 4 \le x \le 9$
d) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}, \qquad 1 \le x \le 4$
e) $y = \operatorname{sen} x, \qquad 0 \le x \le \pi$
f) $y = \cos 2x, \qquad 0 \le x \le \pi/6$
g) $y = \cosh x, \qquad 0 \le x \le 1$
h) $2y = 3x^{2/3}, \quad 1 \le x \le 8$
i) $x = \frac{1}{3}\left(y^2 + 2\right)^{3/2}, \qquad 1 \le y \le 2$
j) $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \le y \le 2$

25. A curva dada é girada ao redor do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

a) $y = \sqrt[3]{x}, \qquad 1 \le y \le 2$
b) $y = 1 - x^2, \qquad 0 \le x \le 1$
c) $x = e^{2y}, \qquad 0 \le y \le \frac{1}{2}$
d) $x = \sqrt{2y - y^2}, \qquad 0 \le y \le 1$
e) $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(y^2 - \ln y\right), \quad 1 \le y \le 2$
f) $x = a\cosh(y/a), \qquad -a \le y \le a$