



## Cálculo I - Lista 1: Números reais. Desigualdades. Funções.

Prof. Responsável: Andrés Vercik

- Um inteiro positivo  $n$  é par se  $n = 2k$  para algum inteiro positivo  $k$ . Se  $n = 2k + 1$  ( $k$  um inteiro), então  $n$  é ímpar. Mostre que se  $n$  é ímpar, então  $n^2$  também é ímpar.
- Mostre que se  $n^2$  é par então  $n$  é par.
- Mostre que  $\sqrt{2}$  é irracional.
- Mostre que  $\sqrt{3}$  é irracional.
- Mostre que se  $n$  é da forma  $4m - 1$  (onde  $m$  é um inteiro positivo), então  $\sqrt{n}$  é irracional.
- Encontre e represente em uma reta, os números reais que verificam:
  - $|x - 3| < 1$
  - $|2x + 1| < 2$
  - $|2 - 3x| \leq 1$
  - $|12 - 4x| \geq 3$
  - $|x - 1| + |2x - 3| < 6$
  - $\frac{|2x - 8|}{1 - |x - 2|} < 1$
- Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c, d\}$ , diga quais das seguintes correspondências são funções de  $A$  em  $B$ .
  - $f(1) = a \quad f(2) = b \quad f(3) = c$
  - $f(1) = c \quad f(2) = c \quad f(3) = c \quad f(4) = c$
  - $f(1) = a \quad f(2) = c \quad f(3) = c \quad f(4) = d \quad f(1) = c \quad f(4) = a$
- Dizer qual o maior conjunto  $A \in \mathbf{R}$  para o qual cada uma das seguintes correspondências é função de  $A$  em  $\mathbf{R}$ . (Isto significa achar o domínio da função)
  - $f(x) = \sqrt{x}$
  - $f(x) = \frac{1}{x}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2 - 3x}$
  - $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
  - $f(x) = \frac{2x}{x + 4}$
  - $f(x) = \frac{x^{3/4} - 1}{(x^2 - 9)^{3/2} - 1}$
  - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

9. Determine o conjunto imagem da função dada.

a)  $f(x) = x^4, \quad -\infty < x < \infty$

b)  $f(x) = 1 + x^2, \quad -\infty < x < \infty$

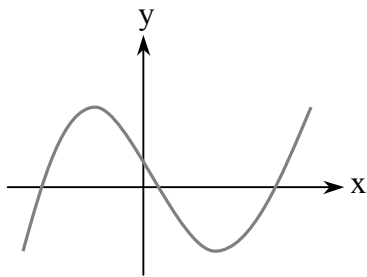
c)  $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$

d)  $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

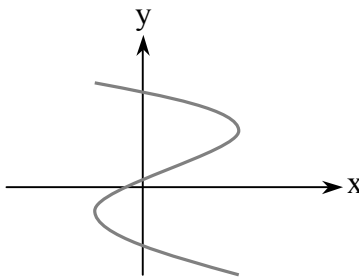
e)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

f)  $f(x) = \frac{2}{3+x^2}$

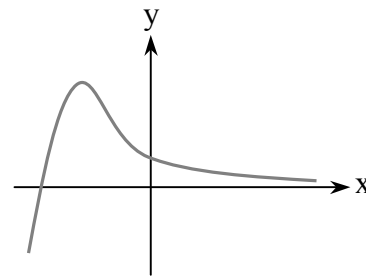
10. Verifique se a curva dada é ou não o gráfico de uma função da forma  $y = f(x)$ . Justifique sua resposta.



a)

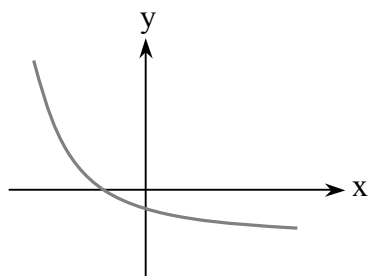


b)

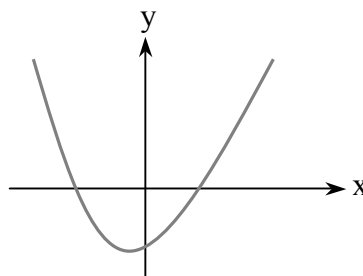


c)

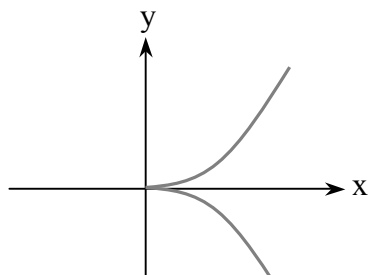
11. Verifique se a curva dada é ou não o gráfico de uma função injetora. Justifique sua resposta.



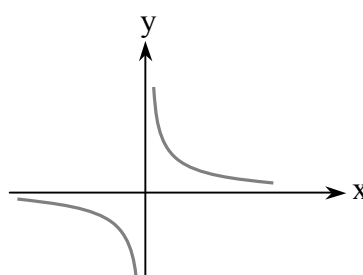
a)



b)



c)



d)

12. Verifique se  $f(x)$  possui uma função inversa. Se a resposta for afirmativa, determine uma fórmula explícita para a função inversa e especifique seu domínio e contradomínio.

a)  $f(x) = 1/x^2, x \neq 0$

d)  $f(x) = 1/x^3, x \neq 0$

b)  $f(x) = 1/x^2, x > 0$

e)  $f(x) = 1/(x-2), x \neq 2$

c)  $f(x) = 1/x^2, x < 0$

f)  $f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2$

13. Seja  $f(x) = 1/(x-1)^2, x > 1$ . Determine a função inversa e especifique seu domínio e contradomínio.

14. Trace o gráfico das funções dadas a continuação. Determine a função inversa, especifique seu domínio e contradomínio.

a)  $f(x) = -1/x, x > 0$

b)  $f(x) = -x^3$

15. Determine em que intervalo(s) a função dada é crescente e em que intervalo(s) a função é decrescente.

a)  $f(x) = -2x + 7$

f)  $f(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1$

b)  $f(x) = \frac{x}{3} - 1$

g)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, x \neq 1$

c)  $f(x) = (x+1)^2$

h)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d)  $f(x) = x^3 + 1$

e)  $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

16. Verifique se a função é par, ímpar ou nem para nem ímpar e qual o tipo de simetria do gráfico correspondente.

a)  $f(x) = 2x$

f)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

b)  $f(x) = 2x - 1$

g)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

c)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

h)  $f(x) = 1 - |x|$

d)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

e)  $f(x) = x^3 + 5x$

i)  $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$

17. Representar graficamente as seguintes funções lineares. Determine a inclinação e a interseção com o eixo  $y$ .

a)  $f(x) = x - 1$

c)  $f(x) = -x + 2$

e)  $f(x) = 4x + 1$

b)  $f(x) = 2x - 3$

d)  $f(x) = -2x + 1$

f)  $f(x) = -5x + 4$

18. Representar graficamente as seguintes funções:

a)  $f(x) = 2|x|$

f)  $f(x) = |x + 1| + |x - 2|$

b)  $f(x) = |x - 1|$

g)  $f(x) = 2|x - 2| + 3|x + 1|$

c)  $f(x) = |2x + 2|$

h)  $f(x) = |3x - 4| + 2|4x + 1|$

d)  $f(x) = 3|x - 4| + 2$

i)  $f(x) = 2x + |x|$

e)  $f(x) = |6 - 2x| - 5$

j)  $f(x) = 6x + 3 + |x - 1| + |3 - x|$

19. Achar a função linear cujo gráfico contem os pontos:

a)  $(1, 2)$  e  $(2, 5)$

b)  $(2, 4)$  e  $(-1, 2)$

c)  $(0, -2)$  e  $(-1, 1)$

20. Provar que não existe função linear cujo gráfico contenha os pontos  $(1, 3)$ ,  $(2, 4)$  e  $(-1, 2)$ .

21. Determine a equação da reta dada.

a) Reta com inclinação  $-3$  e interseção com o eixo  $y$  no ponto  $2$ .

b) Reta com inclinação  $1/2$  e interseção com o eixo  $y$  no ponto  $-1$ .

c) Reta com inclinação  $-1/2$  passando pelo ponto  $(0, 0)$ .

d) Reta horizontal passando pelo ponto  $(-3, 5)$ .

e) Reta horizontal com interseção com o eixo  $y$  no ponto  $-5/4$ .

f) Reta vertical passando pelo ponto  $(-2, 1/3)$ .

g) Reta com inclinação  $-2$  passando pelo ponto  $(0, 3)$ .

h) Reta passando pelos pontos  $(2, 1)$  e  $(-1, 5)$ .

i) Reta passando pelos pontos  $(2/3, 1)$  e  $(-4/7, 1)$ .

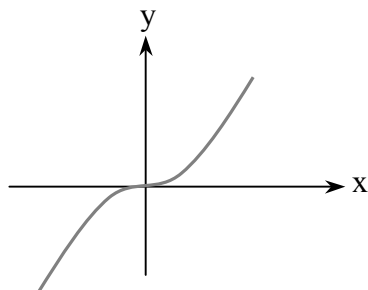
- j) Reta passando pelo ponto  $(3/2, -1/2)$  e paralela à reta  $x + 2y = 3$ .
- k) Reta passando pelo ponto  $(0, 4)$  e perpendicular à reta  $x + 2y = 3$ .
22. Uma companhia telefônica cobra uma taxa de 9 centavos por minuto e uma taxa fixa de R\$ 6,50 por mês. Escreva uma função linear que permita calcular o valor da conta mensal (em reais) em função do tempo total das ligações em minutos.
23. Uma padaria descobriu que não pode produzir nenhuma quantidade de pão a um preço de 75 centavos ou menos por unidade, mas pode produzir 80 unidades por semana por um preço unitário de R\$1,25. Do lado da demanda, estima que por um preço unitário de R\$1,00 a demanda é de 450 pães por semana e por um preço unitário de R\$3,00 a demanda é de 150 pães por semana. Determine as funções demanda e oferta, supondo que sejam lineares. Determine o ponto de equilíbrio.
24. Seja  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , uma função polinomial de grau 2.
- a) Verificar que 1 é raiz de  $f(x)$ .
- b) Encontrar uma função polinomial  $g$  de grau 1 tal que  $f(x) = (x-1)g(x)$
25. Nos seguintes exercícios, complete o quadrado da função quadrática. Verifique se a concavidade do gráfico da função está voltada para cima ou para baixo, determine o vértice e o eixo de simetria e desenhe o gráfico.
- a)  $y = -x^2 + 6x + 11$
- b)  $y = 3x^2 - 6x + 7$
- c)  $y = 2x^2 + 5x$
- d)  $y = -2x^2 + x + 1$
- e)  $y = -0,1x^2 - 1,2x + 3,6$
- f)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$
- g)  $y = 3x^2 - 2x + 1$
- h)  $y = 3x^2 + 2x + 1$
26. Nos seguintes exercícios, fatore a função quadrática sem usar a fórmula de Báskara para determinar as raízes. Em seguida, determine o(s) intervalo(s) em que a função é negativa.
- a)  $y = x^2 - 5x - 14$
- b)  $y = 2x^2 - x - 1$
- c)  $y = x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$
- d)  $y = 4x^2 - 9$
- e)  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$
- f)  $y = 3x^2 + 5x - 2$
27. Seja  $f(x) = x^3 + 1$ , uma função polinomial de grau 3.

- a) Verificar que  $-1$  é raiz de  $f(x)$ .  
 b) Encontrar uma função polinomial  $g$  de grau 2 tal que  $f(x) = (x+1)g(x)$

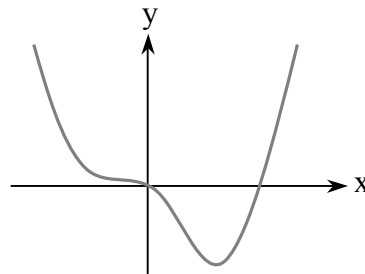
28. Nos exercícios seguintes, determine qual é o comportamento do gráfico da função dada quando  $x$  aumenta sem limite e quando  $x$  diminui sem limite.

- a)  $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 6x^2 - x - 8$                       c)  $f(x) = -0,01x^3 + x^2 + 0,1x - 10$   
 b)  $f(x) = -3x^4 + x^2 - 9$     d)  $f(x) = 100x^6 - 82x^4 + 31x^2 - 144$

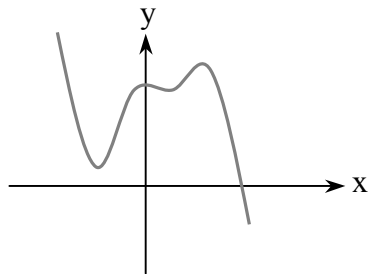
29. Dados os seguintes gráficos de um polinômio de grau  $n$  cujo coeficiente principal é  $a_n$ , determine se  $n$  é par ou ímpar e se  $a_n$  é positivo ou negativo.



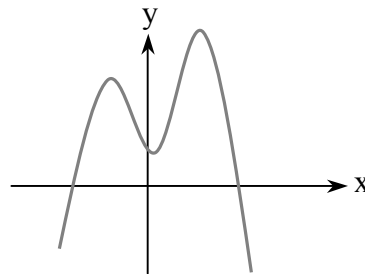
a)



b)



c)



d)

30. Determine o valor da expressão dada sem usar calculadora

- a)  $2^4$                                       c)  $(0,3)^3$                                       e)  $4^{-2}$   
 b)  $(-4)^3$                                       d)  $4^{1/2}$                                       f)  $(0,008)^{1/3}$   
 g)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$                                       h)  $\left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}$                                       i)  $8^{2/3}$                                       j)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1/3}$

31. Determine o valor de  $f(9)$  sem usar calculadora

a)  $f(x) = (x+7)^{1/2}$

b)  $f(x) = x^{1/2} + 3$

c)  $f(x) = 4x^{1/2}$

d)  $f(x) = (4x)^{-1/2}$

e)  $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$

f)  $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-3/2}$

32. Sejam  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $g(x) = x^2 + 1$  e  $f : \mathbf{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , achar:

a)  $g(f(2))$

c)  $g(g(2))$

e)  $1 + g(f(2))$

b)  $f(g(2))$

d)  $g(1 + f(2))$

f)  $f(g(f(2)))$