



Cálculo I - Lista 1: Números reais. Desigualdades. Funções.

Prof. Responsável: Andrés Vercik

- Um inteiro positivo n é par se $n = 2k$ para algum inteiro positivo k . Se $n = 2k + 1$ (k um inteiro), então n é ímpar. Mostre que se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.
- Mostre que se n^2 é par então n é par.
- Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.
- Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional.
- Mostre que se n é da forma $4m - 1$ (onde m é um inteiro positivo), então \sqrt{n} é irracional.
- Encontre e represente em uma reta, os números reais que verificam:
 - $|x - 3| < 1$
 - $|2x + 1| < 2$
 - $|2 - 3x| \leq 1$
 - $|12 - 4x| \geq 3$
 - $|x - 1| + |2x - 3| < 6$
 - $\frac{|2x - 8|}{1 - |x - 2|} < 1$
- Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, diga quais das seguintes correspondências são funções de A em B .
 - $f(1) = a \quad f(2) = b \quad f(3) = c$
 - $f(1) = c \quad f(2) = c \quad f(3) = c \quad f(4) = c$
 - $f(1) = a \quad f(2) = c \quad f(3) = c \quad f(4) = d \quad f(1) = c \quad f(4) = a$
- Dizer qual o maior conjunto $A \in \mathbf{R}$ para o qual cada uma das seguintes correspondências é função de A em \mathbf{R} . (Isto significa achar o domínio da função)
 - $f(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2 - 3x}$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
 - $f(x) = \frac{2x}{x + 4}$
 - $f(x) = \frac{x^{3/4} - 1}{(x^2 - 9)^{3/2} - 1}$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

9. Determine o conjunto imagem da função dada.

a) $f(x) = x^4, \quad -\infty < x < \infty$

b) $f(x) = 1 + x^2, \quad -\infty < x < \infty$

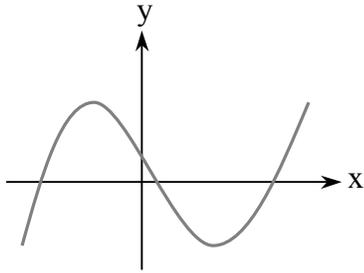
c) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

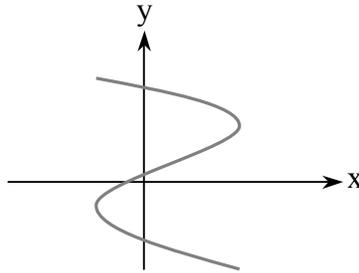
e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

f) $f(x) = \frac{2}{3+x^2}$

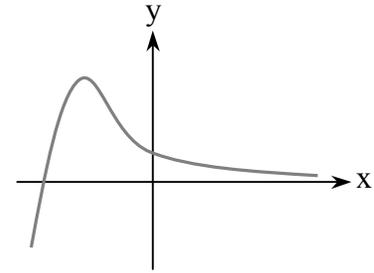
10. Verifique se a curva dada é ou não o gráfico de uma função da forma $y = f(x)$. Justifique sua resposta.



a)

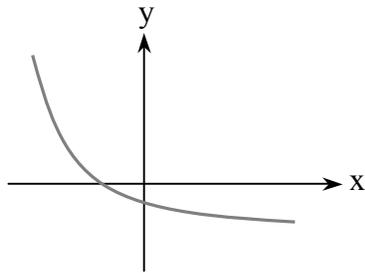


b)

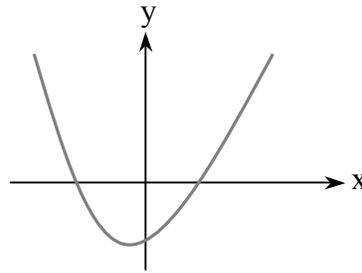


c)

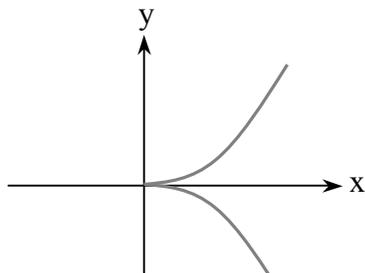
11. Verifique se a curva dada é ou não o gráfico de uma função injetora. Justifique sua resposta.



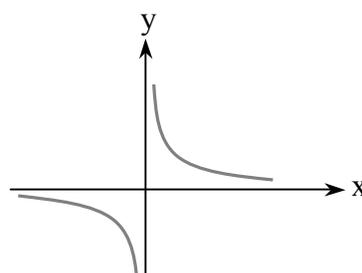
a)



b)



c)



d)

12. Verifique se $f(x)$ possui uma função inversa. Se a resposta for afirmativa, determine uma fórmula explícita para a função inversa e especifique seu domínio e contradomínio.

a) $f(x) = 1/x^2, x \neq 0$

d) $f(x) = 1/x^3, x \neq 0$

b) $f(x) = 1/x^2, x > 0$

e) $f(x) = 1/(x-2), x \neq 2$

c) $f(x) = 1/x^2, x < 0$

f) $f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2$

13. Seja $f(x) = 1/(x-1)^2, x > 1$. Determine a função inversa e especifique seu domínio e contradomínio.

14. Trace o gráfico das funções dadas a continuação. Determine a função inversa, especifique seu domínio e contradomínio.

a) $f(x) = -1/x, x > 0$

b) $f(x) = -x^3$

15. Determine em que intervalo(s) a função dada é crescente e em que intervalo(s) a função é decrescente.

a) $f(x) = -2x + 7$

f) $f(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1$

b) $f(x) = \frac{x}{3} - 1$

g) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, x \neq 1$

c) $f(x) = (x+1)^2$

h) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = x^3 + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

16. Verifique se a função é par, ímpar ou nem para nem ímpar e qual o tipo de simetria do gráfico correspondente.

a) $f(x) = 2x$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = 2x - 1$

g) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

h) $f(x) = 1 - |x|$

d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

e) $f(x) = x^3 + 5x$

i) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

17. Representar graficamente as seguintes funções lineares. Determine a inclinação e a interseção com o eixo y .

a) $f(x) = x - 1$

c) $f(x) = -x + 2$

e) $f(x) = 4x + 1$

b) $f(x) = 2x - 3$

d) $f(x) = -2x + 1$

f) $f(x) = -5x + 4$

18. Representar graficamente as seguintes funções:

a) $f(x) = 2|x|$

f) $f(x) = |x + 1| + |x - 2|$

b) $f(x) = |x - 1|$

g) $f(x) = 2|x - 2| + 3|x + 1|$

c) $f(x) = |2x + 2|$

h) $f(x) = |3x - 4| + 2|4x + 1|$

d) $f(x) = 3|x - 4| + 2$

i) $f(x) = 2x + |x|$

e) $f(x) = |6 - 2x| - 5$

j) $f(x) = 6x + 3 + |x - 1| + |3 - x|$

19. Achar a função linear cujo gráfico contem os pontos:

a) $(1, 2)$ e $(2, 5)$

b) $(2, 4)$ e $(-1, 2)$

c) $(0, -2)$ e $(-1, 1)$

20. Provar que não existe função linear cujo gráfico contenha os pontos $(1, 3)$, $(2, 4)$ e $(-1, 2)$.

21. Determine a equação da reta dada.

a) Reta com inclinação -3 e interseção com o eixo y no ponto 2 .

b) Reta com inclinação $1/2$ e interseção com o eixo y no ponto -1 .

c) Reta com inclinação $-1/2$ passando pelo ponto $(0, 0)$.

d) Reta horizontal passando pelo ponto $(-3, 5)$.

e) Reta horizontal com interseção como o eixo y no ponto $-5/4$.

f) Reta vertical passando pelo ponto $(-2, 1/3)$.

g) Reta com inclinação -2 passando pelo ponto $(0, 3)$.

h) Reta passando pelos pontos $(2, 1)$ e $(-1, 5)$.

i) Reta passando pelos pontos $(2/3, 1)$ e $(-4/7, 1)$.

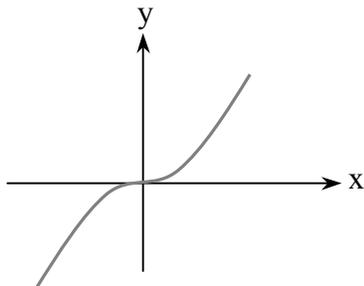
- j) Reta passando pelo ponto $(3/2, -1/2)$ e paralela à reta $x + 2y = 3$.
- k) Reta passando pelo ponto $(0, 4)$ e perpendicular à reta $x + 2y = 3$.
22. Uma companhia telefônica cobra uma taxa de 9 centavos por minuto e uma taxa fixa de R\$ 6,50 por mês. Escreva uma função linear que permita calcular o valor da conta mensal (em reais) em função do tempo total das ligações em minutos.
23. Uma padaria descobriu que não pode produzir nenhuma quantidade de pão a um preço de 75 centavos ou menos por unidade, mas pode produzir 80 unidades por semana por um preço unitário de R\$1,25. Do lado da demanda, estima que por um preço unitário de R\$1,00 a demanda é de 450 pães por semana e por um preço unitário de R\$3,00 a demanda é de 150 pães por semana. Determine as funções demanda e oferta, supondo que sejam lineares. Determine o ponto de equilíbrio.
24. Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2$, uma função polinomial de grau 2.
- a) Verificar que 1 é raiz de $f(x)$.
- b) Encontrar uma função polinomial g de grau 1 tal que $f(x) = (x-1)g(x)$
25. Nos seguintes exercícios, complete o quadrado da função quadrática. Verifique se a concavidade do gráfico da função está voltada para cima ou para baixo, determine o vértice e o eixo de simetria e desenhe o gráfico.
- a) $y = -x^2 + 6x + 11$
- b) $y = 3x^2 - 6x + 7$
- c) $y = 2x^2 + 5x$
- d) $y = -2x^2 + x + 1$
- e) $y = -0,1x^2 - 1,2x + 3,6$
- f) $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$
- g) $y = 3x^2 - 2x + 1$
- h) $y = 3x^2 + 2x + 1$
26. Nos seguintes exercícios, fatore a função quadrática sem usar a fórmula de Báskara para determinar as raízes. Em seguida, determine o(s) intervalo(s) em que a função é negativa.
- a) $y = x^2 - 5x - 14$
- b) $y = 2x^2 - x - 1$
- c) $y = x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$
- d) $y = 4x^2 - 9$
- e) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$
- f) $y = 3x^2 + 5x - 2$
27. Seja $f(x) = x^3 + 1$, uma função polinomial de grau 3.

- a) Verificar que -1 é raiz de $f(x)$.
 b) Encontrar uma função polinomial g de grau 2 tal que $f(x) = (x+1)g(x)$

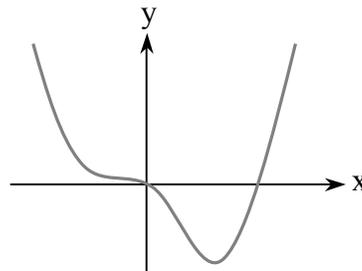
28. Nos exercícios seguintes, determine qual é o comportamento do gráfico da função dada quando x aumenta sem limite e quando x diminui sem limite.

- a) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 6x^2 - x - 8$ c) $f(x) = -0,01x^3 + x^2 + 0,1x - 10$
 b) $f(x) = -3x^4 + x^2 - 9$ d) $f(x) = 100x^6 - 82x^4 + 31x^2 - 144$

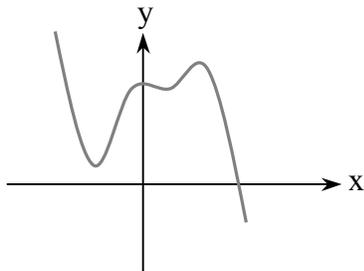
29. Dados os seguintes gráficos de um polinômio de grau n cujo coeficiente principal é a_n , determine se n é par ou ímpar e se a_n é positivo ou negativo.



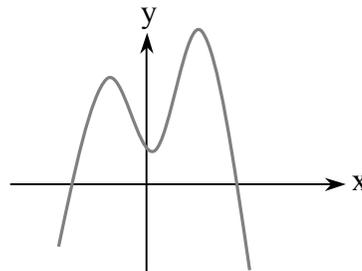
a)



b)



c)



d)

30. Determine o valor da expressão dada sem usar calculadora

- a) 2^4 c) $(0,3)^3$ e) 4^{-2}
 b) $(-4)^3$ d) $4^{1/2}$ f) $(0,008)^{1/3}$
 g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ h) $\left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}$ i) $8^{2/3}$ j) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1/3}$

31. Determine o valor de $f(9)$ sem usar calculadora

a) $f(x) = (x+7)^{1/2}$

b) $f(x) = x^{1/2} + 3$

c) $f(x) = 4x^{1/2}$

d) $f(x) = (4x)^{-1/2}$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-3/2}$

32. Sejam $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $g(x) = x^2 + 1$ e $f : \mathbf{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, achar:

a) $g(f(2))$

c) $g(g(2))$

e) $1 + g(f(2))$

b) $f(g(2))$

d) $g(1 + f(2))$

f) $f(g(f(2)))$