Física III 2023 (IF) – Aula 5

Objetivos de aprendizagem

- Fazer uso de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas ou esféricas para descrever adequadamente diferentes distribuições de carga
- Integrar a carga contida em regiões do espaço com densidades de carga descritas por funções dependentes da posição em 1, 2, e 3 dimensões.

O “elemento de carga” dq

- 1D: densidade linear λ $\qquad dq = \lambda\, ds$
- 2D: densidade superficial σ $\qquad dq = \sigma\, da$
- 3D: densidade volumétrica ρ $\qquad dq = \rho\, dV$

$$q = \int_{\text{região}} dq$$

(Obs.: Em geral são distribuições contínuas. Pode-se generalizar para distribuições discretas com uso da função “delta de Dirac”, mas não vamos usar isso em Física 3)

Obs.: notação do "elemento de carga" (apostila)

- 1D: densidade linear λ
- 2D: densidade superficial σ
- 3D: densidade volumétrica ρ

$$\left.\begin{array}{l} dq = \lambda\, ds \\ \\ d^2 q = \sigma\, da \\ \\ d^3 q = \rho\, dV \end{array}\right\} \quad q = \int^{(1)} \dots \int^{(n)}_{região} d^n q$$

Abreviação: $$q = \int_{região} dq$$

Exemplo 1

- Barra (fina) de comprimento L com $\lambda(x)=\alpha(1-3x/L)$

$\alpha>0$

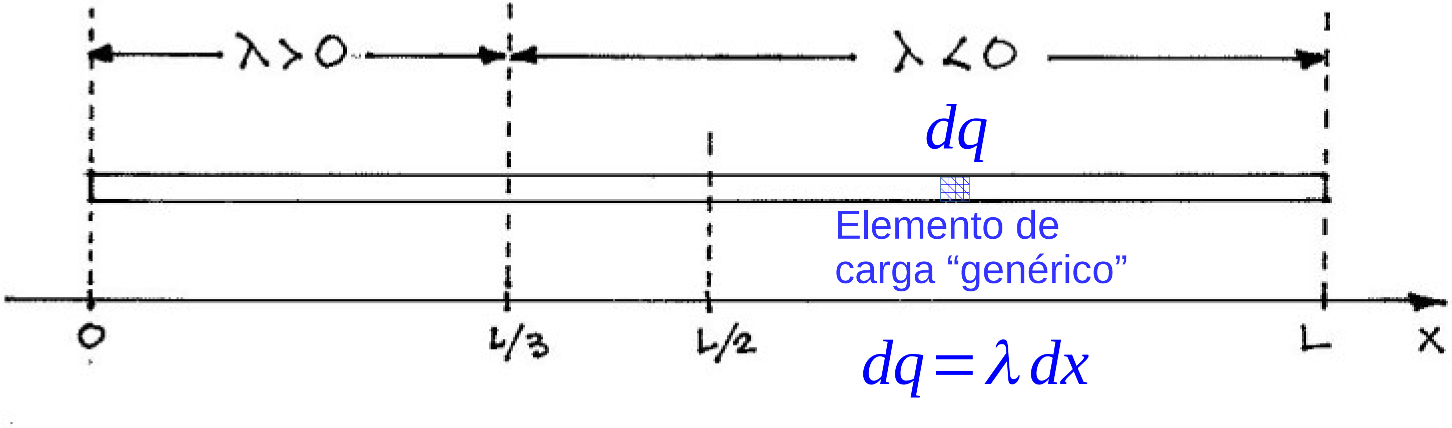


Figura 6.1:

Discutir forma da função/fazer gráfico (Desmos)
→ Qual é a carga total da barra?

Carga total

$$q=\int_{(L)} dq=\int_0^L \lambda(x)\,dx=\int_0^L \alpha(1-3x/L)\,dx$$

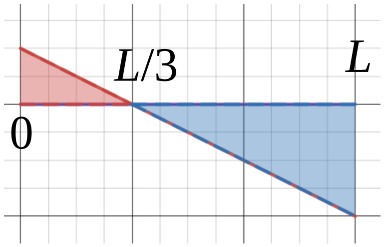
Integração em partes da região

- Lado esquerdo/Lado direito

  $(0 \rightarrow L/2; L/2 \rightarrow L)$

- Região de carga positiva/negativa

  $(0 \rightarrow L/3; L/3 \rightarrow L)$



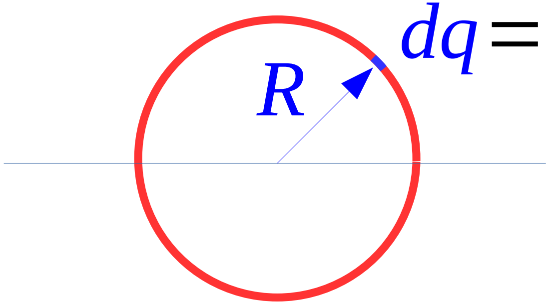
- ...

Outro exemplo linear

- Anel com densidade linear $\lambda(\theta)=\alpha\cos(\theta)$

$$ds=R\,d\theta$$

$$dq=\lambda\,ds=\lambda R\,d\theta$$



Qual é a carga total desse anel?

E da metade direita? $\left(\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

...

Exemplo 2

- Placa retangular (ab) com $\sigma(x,y)=\alpha(1+x/a)$

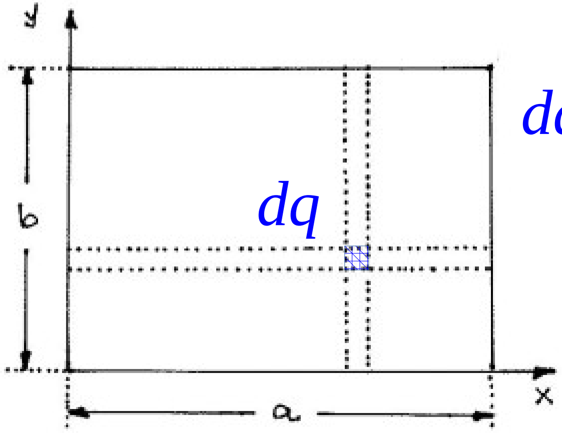


Figura 6.2:

$$dq=\sigma\, dxdy$$

$$q=\int_0^b dy\int_0^a dx\,\sigma$$

ou

$$q=\int_0^a dx\int_0^b dy\,\sigma$$

Ordem da integração

Exemplo 2 – placa triangular

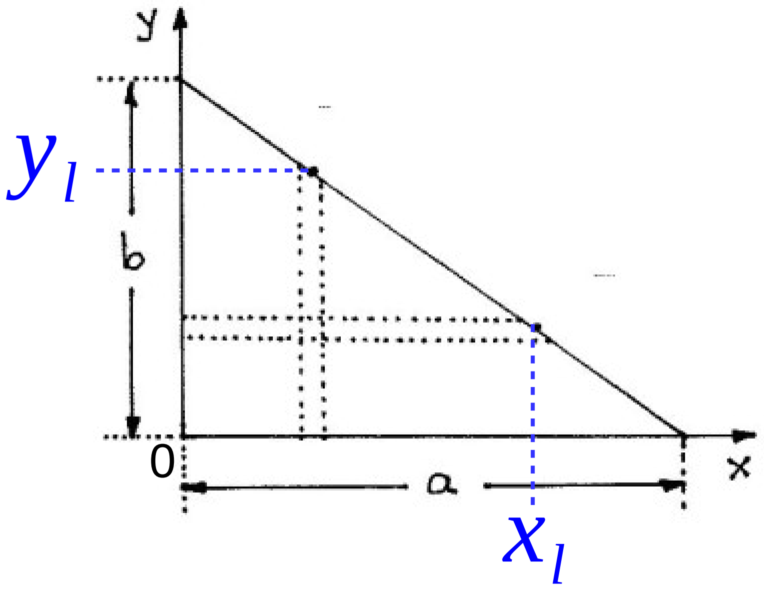


Figura 6.3:

- Neste caso o limite de integração depende da “outra” coordenada.

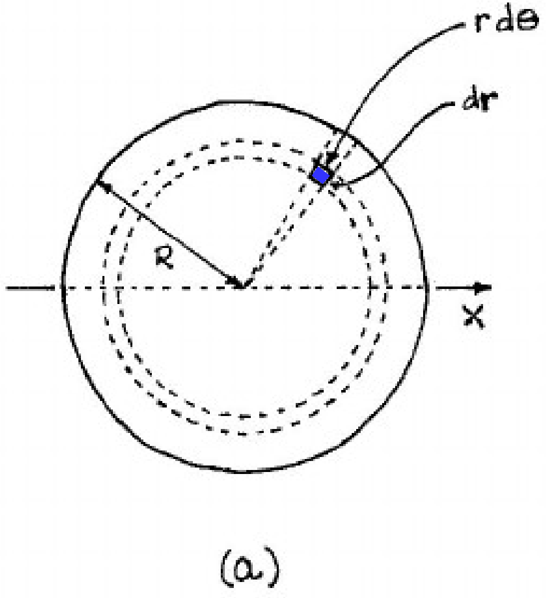
$$\int_0^{x_l} dx \qquad \text{ou} \qquad \int_0^{y_l} dy$$

$$x_l = a - \frac{a}{b} y \qquad\qquad y_l = b - \frac{b}{a} x$$

(obs.: calcular carga total e depois voltar no slide 3)

Exemplo 3

- Disco de raio R com densidade superficial $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$

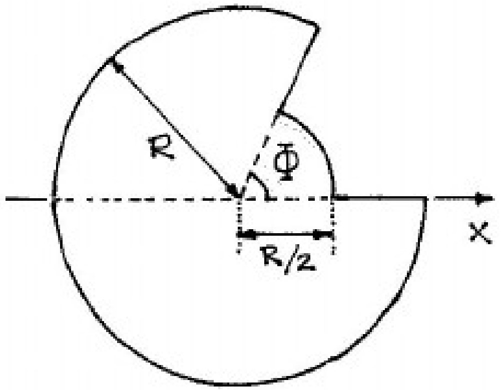


$$dq = \sigma da = \sigma r dr\, d\theta$$

$$q = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta\, \alpha\, r\, (1 - 2r/R)$$

Exemplo 4

- Mesmo disco, faltando um “pedaço”, com $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$



(b)

$$(dq = \sigma da = \sigma r dr\, d\theta)$$

- Qual é o ângulo do pedaço faltante tal que a carga total é nula?

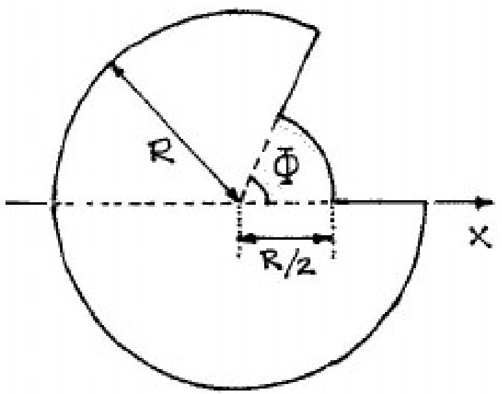
$$q(\Phi) = ?$$

Como integrar?

Exemplo 4

- Mesmo disco, faltando um “pedaço”, com $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$

$$(dq = \sigma\, da = \sigma r dr\, d\theta)$$



- Qual é o ângulo do pedaço faltante tal que a carga total é nula?

$$q = \int_0^{R/2} dr \int_0^{\phi} d\theta\, \alpha\, r\, (1 - 2r/R) + \int_0^{R} dr \int_{\phi}^{2\pi} d\theta\, \alpha\, r\, (1 - 2r/R)$$

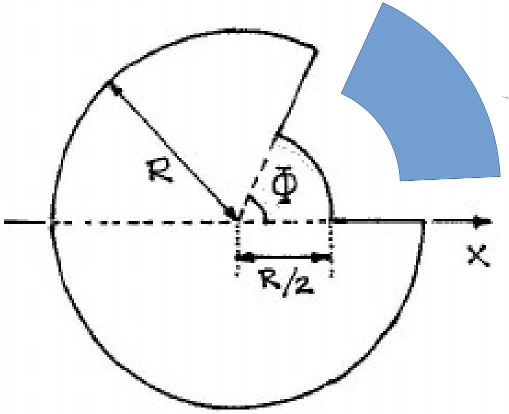
Exemplos 5 e 6 do cap. 6

- Enquetes no moodle

Resp. dos ex. 3 e 4

Ex. 3) $q=-\frac{\pi}{3}\alpha R^2$

Ex. 4) $\Phi=\frac{24}{15}\pi\ =1,6\pi$



(b)

$$\int_{\frac{R}{2}}^{R}\sigma(r)r\,dr\int_{0}^{\Phi}d\theta=-\frac{5}{24}\Phi\alpha R^2$$

Desmos