

Aula 4: Subespaços, Axiomas de Separação, Espaços de Hausdorff, Espaços Regulares, Espaços Normais

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia

Estes slides tem interseção com as notas de aulas dos professores

- ▶ Jorge Mujica (foi professor da IMECC-UNICAMP)
- ▶ Leandro Aurichi (professor do ICMC-USP)

Como já vimos ...

Definição 1

Seja (X, τ) um espaço topológico, e seja $S \subset X$. A família

$$\tau_S = \{S \cap U : U \in \tau\}$$

é uma topologia em S , que chamamos de **topologia induzida**. Dizemos que (S, τ_S) é um subespaço de (X, τ) , ou simplesmente que S é um subespaço de X .

Exemplo 2

1. $\mathbb{Z}$, com a topologia induzida por $\mathbb{R}$, é um espaço topológico discreto.
2. $\mathbb{R}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Proposição 3

Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $S \subset X$ com a topologia induzida. Dado $x \in S$, denote por $\mathcal{U}_x$ e $\mathcal{U}_{x,S}$ os sistemas de vizinhanças de x em X e S , respectivamente. Então, para cada $x \in S$,

$$\{U \cap S : U \in \mathcal{U}_x\} = \mathcal{U}_{x,S}.$$

Demonstração: Dados $x \in S$ e $U \in \mathcal{U}_x$, então $x \in \overset{\circ}{U}$. Logo $x \in \overset{\circ}{U} \cap S$ e, portanto, $U \cap S \in \mathcal{U}_{x,S}$. Por outro lado, dado $V \in \mathcal{U}_{x,S}$, então $x \in B$, onde B denota o interior de V em S . Como $B = W \cap S$ para algum $W \in \tau$, tome $U = W \cup V$. Então $x \in W \subset \overset{\circ}{U}$ (isto é, $U \in \mathcal{U}_x$) e

$$U \cap S = (W \cup V) \cap S = (W \cap S) \cup V = B \cup V = V.$$

Vimos também (Proposição 18 da Aula 3) que

Proposição 4

Se $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ) , então $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $Y \subset X$ com a topologia de subespaço.

Proposição 5

Seja S um subespaço de um espaço topológico X . Então:

- (a) U é aberto em S se, e só se, $U = S \cap U_1$, sendo U_1 aberto em X .
- (b) F é fechado em S se, e só se, $F = S \cap F_1$, sendo F_1 fechado em X .
- (c) Se $A \subset S$, então $\bar{A}^S = S \cap \bar{A}^X$.
- (d) Se $x \in S$, então U é vizinhança de x em S se, e só se, $U = S \cap U_1$, sendo U_1 uma vizinhança de x em X .

Demonstração. (a) é a própria definição. (b) Usando (a) vemos que: F é fechado em $S \Leftrightarrow S \setminus F$ é aberto em $S \Leftrightarrow S \setminus F = S \cap U_1$, com U_1 aberto em $X \Leftrightarrow F = S \cap (X \setminus U_1)$, com U_1 aberto em $X \Leftrightarrow F = S \cap F_1$, com F_1 fechado em X . (c) Usando (b) vemos que:

$$\begin{aligned}\bar{A}^S &= \bigcap \{F : F \text{ fechado em } S, F \supset A\} \\ &= \bigcap \{S \cap F_1 : F_1 \text{ fechado em } X, F_1 \supset A\} = S \cap \bar{A}^X.\end{aligned}$$

(d) é a Proposição 3 da aula de hoje.

1. Seja X um espaço topológico, e seja S um subespaço de X .
 - (a) Se X é metrizável, prove que S é metrizável também.
 - (b) Se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, prove que S satisfaz o mesmo axioma.
 - (c) Se X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, prove que S satisfaz o mesmo axioma.

Definição 6

Dizemos que **um espaço topológico (X, τ) é T_0** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existir um aberto A tal que $(x \in A \text{ e } y \notin A)$ ou $(x \notin A \text{ e } y \in A)$.

Exemplo 7

- (a) Cada espaço topológico discreto é um espaço T_0 .
- (b) Seja X um espaço topológico trivial (com a topologia trivial) com pelo menos dois pontos. Então X não é um espaço T_0 .
- (c) Seja X um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos. Fixe $x, y \in X$ distintos e defina $\tau = \{A \subset X : x, y \in A \text{ ou } A = \emptyset\}$. É fácil ver que (X, τ) é um espaço topológico. Contudo, não existe aberto em X tal que $x \in A$ e $y \notin A$ ou $y \in A$ e $x \notin A$. Logo (X, τ) não é T_0 .

Proposição 8

Um espaço topológico X é um espaço T_0 se, e só se, dados $a, b \in X$, com $a \neq b$, tem-se que $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$.

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja X um espaço T_0 , e sejam $a, b \in X$, $a \neq b$. Se existir U aberto tal que $a \in U$ e $b \notin U$, então $a \in \overline{\{a\}}$, mas $a \notin \overline{\{b\}}$. Se existir V aberto tal que $b \in V$ e $a \notin V$, então $b \in \overline{\{b\}}$, mas $b \notin \overline{\{a\}}$. Em ambos casos $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$.

$\Leftarrow$ Suponhamos que X não seja um espaço T_0 . Então existem $a, b \in X$, tal que qualquer aberto U contendo a também contém b (portanto $\overline{\{a\}} \subset \overline{\{b\}}$) e qualquer aberto V contendo b contém a (portanto $\overline{\{b\}} \subset \overline{\{a\}}$).

Proposição 9

Um espaço topológico (X, τ) é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e para quaisquer bases locais $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ para x e y respectivamente, tivermos que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponha que (X, τ) seja T_0 . Tomemos $x, y \in X$ pontos distintos e $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ bases locais arbitrárias para x e y respectivamente. Por X ser T_0 , existe um aberto A tal que $x \in A$ e $y \notin A$, ou $x \notin A$ e $y \in A$. Sem perda de generalidade, suponha o primeiro caso. Por $\mathcal{B}_x$ ser base, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset A$. Como $y \notin A$, segue que $y \notin B$ e, por tanto, $B \notin \mathcal{B}_y$, mostrando que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

$\Leftarrow$ Reciprocamente, suponha que para quaisquer $x, y \in X$ distintos, toda base local de x seja distinta de qualquer base local de y . Em particular, $\mathcal{B}_x = \{A \in \tau : x \in A\}$ e $\mathcal{B}_y = \{A \in \tau : y \in A\}$ são bases locais de x e y respectivamente. Logo, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ pela hipótese. Assim, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \notin \mathcal{B}_y$ ($x \in B$ e $y \notin B$) ou existe $B \in \mathcal{B}_y$ tal que $B \notin \mathcal{B}_x$ ($y \in B$ e $x \notin B$).

Definição 10

Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_1 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir A aberto tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Note que ser T_1 é “mais forte” do que ser T_0 ($T_1 \Rightarrow T_0$), pois enquanto o último exige a existência de um aberto que satisfaça ao menos um dentre dois casos, ser T_1 exige a existência de abertos que satisfaçam ambos os casos.

Proposição 11

(X, τ) é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponha (X, τ) um espaço T_1 . Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Como (X, τ) é T_1 , existe um aberto A tal que $y \in A$ e $x \notin A$, isto é, $A \cap \{x\} = \emptyset$. Logo, $y \notin \overline{\{x\}}$. Assim, o único ponto que pode pertencer a $\overline{\{x\}}$ é o próprio x . Ou seja $\{x\} = \overline{\{x\}}$.

$\Leftarrow$ Reciprocamente, sejam $x, y \in X$ distintos. Como $\{x\}$ é fechado para qualquer $x \in X$, então $X \setminus \{x\}$ é um conjunto aberto. Assim, $X \setminus \{x\}$ é um aberto tal que $y \in X \setminus \{x\}$ e $x \notin X \setminus \{x\}$.

Exemplo 12

- (a) Como vimos, **todo T_1 é T_0 .**
- (b) Seja $X = \{a, b\}$, com $a \neq b$, e seja considere a topologia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ ((X, τ) é chamado de espaço de Sierpinski). Então (X, τ) é T_0 mas não é T_1 .
- (c) Cada espaço topológico discreto é um espaço T_1 .
- (d) Todo espaço métrico é T_1 .
- (e) A reta de Sorgenfrey é T_1 , pois $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x, x + 1/n)$.

Definição 13

Dizemos que (X, τ) é T_2 (espaço de Hausdorff) se, para todo $x, y \in X$ distintos, existem A, B abertos tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Note que

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Dizemos que em um espaço de Hausdorff os abertos separam pontos.

Exemplo 14

X munido da topologia cofinita é T_1 , mas não é T_2 se X for infinito.

Note que X é T_1 pois $\{x\}$ é fechado para cada $x \in X$.

Agora, sejam $x, y \in X$ distintos e abertos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$. Temos que $A = X \setminus F_1$ e $B = X \setminus F_2$, com F_1, F_2 finitos. Logo, $A \cap B = X \setminus (F_1 \cup F_2)$ e, como X é infinito, $A \cap B$ é necessariamente não vazio. Logo, X não é T_2 .

Proposição 15

Considere (X, d) um espaço métrico. Então tal espaço é de Hausdorff (com a topologia induzida pela métrica).

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Seja $r = d(x, y) > 0$. Vamos mostrar que $B(x; r/2) \cap B(y; r/2) = \emptyset$. Suponha que não. Seja $a \in B(x; r/2) \cap B(y; r/2)$. Então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

absurdo, pois $d(x, y) = r$.

Definição 16

Dizemos que (X, τ) é T_3 se, para quaisquer $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$ existirem A, B abertos tais que $x \in A$, $F \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Se, além disso, (X, τ) é T_1 , dizemos que (X, τ) é um *espaço regular*.

Essa nomenclatura não é padrão - às vezes se supõe T_1 para regulares, às vezes não.

Num espaço topológico regular, os abertos “separam” pontos de fechados.

O próximo resultado é provavelmente a principal caracterização de espaços T_3 .

Proposição 17

Seja (X, τ) um espaço topológico. (X, τ) é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ e para todo aberto V tal que $x \in V$, existe um aberto A tal que $x \in A \subset \bar{A} \subset V$.

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponha (X, τ) espaço T_3 . Sejam $x \in X$ e $V \in \tau$ tais que $x \in V$. Note que $X \setminus V$ é um fechado e $x \notin X \setminus V$. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $X \setminus V \subset B$. Assim, $A \subset X \setminus B$ que é fechado. Logo, $\bar{A} \subset X \setminus B \subset V$.

$\Leftarrow$ Reciprocamente, mostremos que (X, τ) é T_3 . Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então $X \setminus F$ é aberto e contém x . Logo, existe A aberto tal que $x \in A \subset \bar{A} \subset X \setminus F$. Note que $x \in A, F \subset X \setminus \bar{A}$ e $A \cap (X \setminus \bar{A}) = \emptyset$.

Corolário 18

Um espaço topológico (X, τ) é T_3 se, somente se, para todo $x \in X$ existe uma base de vizinhanças fechadas para x .

Demonstração. $\Rightarrow$ Dado uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ de x , para cada $V \in \mathcal{B}_x$, tome B_V aberto tal que $x \in B_V \subset \overline{B_V} \subset \overset{\circ}{V}$. Segue então que $\{\overline{B_V} : V \in \mathcal{B}_x\}$ é uma base vizinhanças fechadas para x .

$\Leftarrow$ Reciprocamente, sejam $x \in X$ e V um aberto tal que $x \in V$. Seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças fechadas de x . Então, existe $F \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$x \in \overset{\circ}{F} \subset \overline{\overset{\circ}{F}} \subset F \subset V.$$

Exemplo 19

(a) *Cada espaço discreto é um espaço também regular. (use o Corolário 18)*

(b) *Cada espaço métrico é um espaço regular. (use o Corolário 18)*

(c) *A reta de Sorgenfrey é regular.*

Note que é T_1 e T_3 (pelo Corolário 18, use $\{[x, x + 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$).

(d) *Seja X um espaço topológico trivial, com pelo menos dois pontos. Então X é T_3 , mas não é um espaço regular.*

(e) *O espaço de Sierpinski não é T_3 .*

(f) $T_3 + T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ isto é, $\text{Regular} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Definição 20

Dizemos que (X, τ) é T_4 se, para quaisquer $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A, G \subset B$. Se, além disso, (X, τ) é T_1 , dizemos que (X, τ) é espaço normal.

Novamente, tal nomenclatura não é completamente padrão. Às vezes se supõe T_1 , às vezes não.

Dizemos que num espaço normal, os abertos separam os fechados disjuntos.

$$T_4 + T_1 \Rightarrow T_3 + T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0, \text{ isto é}$$

$$\text{Normal} \Rightarrow \text{Regular} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Exemplo 21

Vamos mostrar mais para frente que todo métrico é normal.

Exemplo 22

A reta de Sorgenfrey é normal.

Prova: Já sabemos que ela é T_1 . Sejam F, G fechados disjuntos. Para cada $a \in F$ e cada $b \in G$, sejam $x(a)$ e $y(b)$ de forma que

$$[a, x(a)) \cap G = \emptyset \quad \text{e} \quad [b, y(b)) \cap F = \emptyset.$$

Podemos fazer isso pois os complementares de F e G são abertos. Sejam

$$A = \bigcup_{a \in F} [a, x(a)) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{b \in G} [b, y(b)).$$

Note que $F \subset A$ e $G \subset B$ e que A e B são abertos. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$.

Suponha que não. Então existe $c \in A \cap B$. Para tanto, existem $a \in F$ e $b \in G$ tais que $c \in [a, x(a)) \cap [b, y(b))$.

Caso $a < b$. Como $x(a) < b$, pois $b \notin [a, x(a))$, temos $[a, x(a)) \cap [b, y(b)) = \emptyset$, absurdo.

Caso $b < a$. Como $y(b) < a$, pois $a \notin [b, y(b))$, temos $[b, y(b)) \cap [a, x(a)) = \emptyset$, absurdo.

É claro que $a = b$ não pode ocorrer por estarmos supondo $F \cap G = \emptyset$.

Exemplo 23

Veremos mais para frente que o quadrado da reta de Sorgenfrey é regular mas não é normal.

Veremos que até regularidade, as propriedades são “bem comportadas” e muitas vezes a verificação de se um espaço tem ou não a propriedade é elementar ou segue de algum teorema.

Mas com a normalidade, a situação muda. Desta forma, um tipo de resultado bastante útil é quando podemos “subir” alguma propriedade até a normalidade. O próximo resultado vai nesta direção: veremos que para um espaço enumerável ser normal basta ele ser regular. A ideia para a demonstração será usada outras vezes no decorrer do texto.

Proposição 24

Todo espaço enumerável e regular é normal.

Demonstração. Sejam F e G fechados disjuntos de X . Faça $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $G = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como o espaço é regular, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe A_m aberto tal que $x_m \in A_m$ e $\overline{A_m} \cap G = \emptyset$ (pela Proposição 17), bem como B_m aberto tal que $y_m \in B_m$ e $\overline{B_m} \cap F = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$A_n^* = A_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k} \text{ e } B_n^* = B_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{A_k}$$

Note que A_n^* e B_n^* são abertos (pois $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ para $A, B \subset X$). Sejam $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^*$ e $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^*$. Note que $F \subset A$ e $G \subset B$, e observe também que $A_n^* \cap F = A_n \cap F$.

Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $z \in A \cap B$. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $z \in A_n^*$ e $z \in B_m^*$.

Vamos fazer o caso $n \leq m$, o outro é análogo. Então

$$z \in A_n^* = A_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k} \quad \text{e} \quad z \in B_m^* = B_m \setminus \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k}.$$

Por $z \in B_m^*$ e como $m \geq n$, temos que $z \notin \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k} \supset \overline{A_n} \supset A_n \supset A_n^*$, contradição, pois supomos $z \in A_n^*$.

Note que na verdade provamos que **todo espaço T_3 enumerável é T_4 .**

Exercícios - Axiomas de Separação

1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset X$ converge para $x \in X$ se dado qualquer aberto $V \ni x$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.
 - (a) Se (X, τ) é Hausdorff, então o limite de uma sequência é único.
 - (b) Considere o espaço de Sierpinski do Exemplo 12 (que é T_0 mas não é T_1). Mostre que a sequência constante igual a a converge para a e b simultaneamente.
 - (c) Considere $\mathbb{N}$ com a topologia cofinita. Pelo Exemplo 14 sabemos que, com esta topologia, $\mathbb{N}$ é T_1 , mas não é T_2 . Considere a sequência (a_n) , com $a_n = n$. Mostre que (a_n) converge para todos os pontos de $\mathbb{N}$.

Prova: (a) Sejam $(x_n) \subset X$, suponha que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$, e seja $y \neq x$. Então, como X é Hausdorff, existem abertos A e B tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Como $x_n \rightarrow x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_n \in A \quad \forall n \geq n_0) \Rightarrow (x_n \notin B \quad \forall n \geq n_0) \Rightarrow (x_n \not\rightarrow y)$$

(b) É claro que a sequência constante igual a a converge para a . Agora, o único aberto que contém b é $\{a, b\}$ que também contém a . Logo a sequência constante igual a a também converge para b .

(c)

Exercícios - Axiomas de Separação

2. Mostre que um espaço finito é T_1 se, e somente se, tem a topologia discreta.
3. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que T_4 é equivalente à seguinte propriedade: “Para todo F fechado e todo V aberto tal que $F \subset V$, existe um aberto U tal que $F \subset U \subset \bar{U} \subset V$ ”.
4. Seja (X, τ) espaço topológico que é T_4 . Prove que, dados dois fechados disjuntos A e B em X , existem dois abertos U e V em X tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
5. Seja (X, τ) um espaço topológico. São equivalentes:
 - (a) (X, τ) é T_1
 - (b) $\forall x \in X$, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de abertos tal que $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x\}$;
 - (c) $\forall x \in X$, existe $\mathcal{V}_x$ uma base de vizinhanças para x tal que $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} V = \{x\}$.
6. Prove a cadeia de implicações: (X, τ) é normal $\Rightarrow (X, \tau)$ é regular $\Rightarrow (X, \tau)$ é $T_2 \Rightarrow (X, \tau)$ é $T_1 \Rightarrow (X, \tau)$ é T_0 .
7. Sejam (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que se (X, τ) é T_i para $i = 0, \dots, 3$, então Y também é.
8. Mostre que se Y é subespaço fechado de um espaço normal, então Y também é normal.

9. Considere $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma

$$(a, b) \setminus C.$$

onde $a < b \in \mathbb{Q}$ e $C \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Vamos chamar tal espaço de reta esburacada.

- (a) Mostre que isso é uma base para tal topologia;
 - (b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff;
 - (c) Mostre que todo subconjunto enumerável é fechado;
 - (d) Mostre que tal espaço não é regular.
10. Mostre que $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida pela reta de Sorgenfrey é normal.
11. Mostre que $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}$ é normal.