Universidade de São Paulo

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Departamento de Ciências Exatas

Curso Pré-Cálculo

Última atualização em 16/03/2023

Esta apostila foi elaborada para o curso Pré-Cálculo, oferecido aos alunos ingressantes da ESALQ/USP, e é composta por materiais elaborados pelos seguintes professores:

Clarice Garcia Borges Demetrio

Cristian Marcelo Villegas Lobos

Cristiane Mariana Rodrigues da Silva

Fábio Prataviera

Marcelo Andrade da Silva

Renata Alcarde Sermarini

Sonia Maria de Stefano Piedade

Taciana Villela Savian

Os textos originais tiveram colaboração de alunos do PPG em Estatística e Experimentação Agronômica de 2018 a 2023.

Cabe salientar que esta apostila pode conter erros que serão corrigidos à medida que novas versões forem disponibilizadas.

Este material foi organizado por Ulysses Chaves de Menezes Netto, aluno bolsista do Projeto "Pré-Cálculo" nos anos 2022 e 2023.

Sumário

1 Operações básicas com frações

1.1 Fração

Definição: Uma FRAÇÃO é um número racional que representa uma ou mais partes de um todo, ou seja, é a forma de dividir alguma coisa por meio da razão de dois números, em que o **dividendo** é chamado de numerador (indica quantas partes do todo foram tomadas) e o **divisor** é conhecido como denominador (indica o total de partes iguais que o inteiro fora dividido).

Definição

$$\frac{a}{b}$$

em que: "a" é o dividendo (numerador) e "b" é o divisor (denominador).

Ao dividir uma pizza, por exemplo, a pizza é fracionada. Cada fatia representa uma parte da pizza, ou seja, uma FRAÇÃO. Geralmente ela é dividida em 8 pedaços, então cada pedaço de uma pizza representa $\frac{1}{8}$ (um oitavo) dela.

1.2 Tipos de Frações

1.2.1 Frações Próprias

As frações são ditas próprias quando o valor numérico do numerador é menor que o valor do denominador, isto é, para uma fração $\frac{a}{b}$, tem-se que a $<$ b. Essas frações representam um número menor que um inteiro ($\frac{a}{b} < 1$).

EXEMPLO 1

$$\frac{1}{5} = 0{,}5; \quad \frac{3}{4} = 0{,}75; \quad \frac{10}{100} = 0{,}10; \quad \frac{5}{23} = 0{,}217$$

1.2.2 Frações Impróprias

As frações são ditas impróprias quando o valor numérico do numerador é maior que o valor do denominador, isto é, para uma fração $\frac{a}{b}$, tem-se que a > b. As frações impróprias representam um número maior que um inteiro ($\frac{a}{b} > 1$).

EXEMPLO 2

$$\frac{5}{2} = 2{,}5; \quad \frac{30}{4} = 7{,}5; \quad \frac{100}{10} = 10{,}0; \quad \frac{50}{23} = 2{,}174$$

1.2.3 Frações Mistas

As frações mistas, também conhecidas como **números mistos**, são uma segunda maneira de representar as frações impróprias. Nota-se no item 1.2.2, que as frações impróprias sempre representam um número maior que um inteiro. Isso acontece porque elas são formadas pela soma entre uma parte inteira e uma fração própria.

EXEMPLO 3

$$1\frac{2}{5} = 1{,}4; \quad 5\frac{3}{4} = 5{,}75; \quad 6\frac{4}{10} = 6{,}4$$

Portanto, sempre que existir um número inteiro ao lado de uma fração, tal como mostram os exemplos anteriores, sem qualquer sinal de soma, subtração, multiplicação ou divisão entre os mesmos, trata-se de um **número misto**. Para reescrevê-lo na forma de fração imprópria, deve-se **somar a parte inteira com a parte fracionária**.

EXEMPLO 4

$$1\frac{2}{5} = 5 \quad \text{representa} \quad 1 + \frac{2}{5} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

1.2.4 Frações Aparentes

As frações aparentes são frações impróprias que **representam um número** inteiro, ou seja, o numerador é múltiplo do denominador.

EXEMPLO 5

$$\frac{5}{1} = 5; \quad \frac{12}{4} = 3; \quad \frac{100}{10} = 10; \quad \frac{8}{8} = 1$$

1.2.5 Frações equivalentes

As frações equivalentes são frações que representam uma mesma quantidade. Por exemplo, ao dividir-se uma pizza em 4 partes iguais e pegar apenas um pedaço, obtém-se $\frac{1}{4}$ da pizza. No entanto, se a mesma pizza for dividida em 8 partes iguais e pegar dois pedaços, resultará em $\frac{2}{8}$ da pizza. É possível perceber que, em ambas as situações, a quantidade de pizza consumida é a mesma. Nesse caso, significa que $\frac{2}{8}$ é uma fração equivalente de $\frac{1}{4}$.

Uma das formas de encontrar frações equivalentes é multiplicar os numeradores e denominadores por algum número natural que seja diferente de zero. Mas, lembre-se, tudo que for feito no numerador deve ser igualmente feito no denominador. Veja alguns exemplos:

EXEMPLO 6

$$\frac{5}{1} = 5; \quad \frac{12}{4} = 3; \quad \frac{100}{10} = 10; \quad \frac{8}{8} = 1$$

Formas Equivalentes

$$\frac{1(\times 2)}{5(\times 2)} = \frac{2}{10}$$

A fração $\frac{2}{10}$ é uma fração equivalente de $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1(\times 10)}{5(\times 10)} = \frac{10}{50}$$

A fração $\frac{10}{50}$ é uma fração equivalente de $\frac{1}{5}$.

Outra forma de ilustrar as frações equivalentes é subdividir uma forma inteira em duas, três, quatro, cinco e seis vezes. Veja uma ilustração de frações equivalentes.

1 Inteiro					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1.3 Operações com frações

Nessa seção são apresentadas as operações básicas: adição (ou soma), subtração, multiplicação e divisão.

1.3.1 Adição

Para somar frações é necessário identificar se os denominadores são iguais ou diferentes. Se forem iguais, basta repetir o denominador e somar os numeradores. Contudo, se os denominadores são diferentes, antes de somar deve-se transformar as frações em **frações equivalentes** de mesmo denominador.

Primeiro caso: Frações com denominadores iguais.

Quando for necessário somar frações com denominadores iguais, deve-se somar apenas os numeradores e manter o mesmo denominador.

Observe o exemplo a seguir:

EXEMPLO 7

$$\frac{6}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6+3}{3}=\frac{10}{3}$$

Segundo caso: Frações com denominadores diferentes
Quando as frações possuem denominadores diferentes, é necessário encontrar outras frações equivalentes a essas que possuam denominadores iguais e para isso usa-se o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os denominadores.

Suponha que deseja-se somar as três frações a seguir:

EXEMPLO 8

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}$$

Passo 1: Calcular o mínimo múltiplo comum entre os denominadores. O valor encontrado será o denominador comum que possibilitará substituir as frações dadas por outras (frações equivalentes) com denominadores iguais. No exemplo, temos os denominadores 4, 5 e 6. Desta forma, o MMC é dado por:

$$\begin{array}{ccc|l} 4 & 5 & 6 & \div 2 \\ \hline 2 & 5 & 3 & \div 2 \\ 1 & 5 & 3 & \div 3 \\ 1 & 5 & 1 & \div 5 \\ \cline{4-4} 1 & 1 & 1 & 60 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Multiplique os coeficientes para} \\ \text{obter o Mínimo Múltiplo Comum}\end{array}$$

Passo 2: Reescrever as frações com o novo denominador, deixando o espaço do numerador para os números que serão encontrados no passo seguinte.

EXEMPLO 9

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}=\frac{}{60}+\frac{}{60}+\frac{}{60}$$

Passo 3: Encontre os numeradores de cada nova fração. Para isso, o seguinte cálculo deverá ser feito:

Para encontrar o numerador da primeira fração, é necessário dividir o MMC (60) pelo denominador da primeira fração (4) e multiplicar o resultado pelo seu numerador (10). O resultado obtido por esse cálculo (150) será o numerador da primeira fração que tem denominador igual ao MMC (60). O mesmo procedimento deve ser repetido para todas as frações presentes na soma, ou seja,

EXEMPLO 10

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}=\frac{150}{60}+\frac{144}{60}+\frac{30}{60}$$

Tabela 1.1: Passo a passo do MMC

Memória de cálculo	(MMC ÷ denominador) × numerador
Primeira fração	$(60 \div 4) \times 10 = 150$
Segunda fração	$(60 \div 5) \times 12 = 144$
Terceira fração	$(60 \div 6) \times 3 = 30$

Passo 4: Somar as novas frações utilizando o caso anterior (de denominadores iguais), ou seja, some os numeradores e mantenha o mesmo denominador.

EXEMPLO 11

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}=\frac{150}{60}+\frac{144}{60}+\frac{30}{60}=\frac{150+144+30}{60}=\frac{324}{60}$$

1.3.2 Subtração

Para subtrair frações deve-se ter o mesmo cuidado que tivemos na soma, ou seja, verificar se os denominadores são iguais. Se forem, deve-se repetir o denominador e subtraímos os numeradores. Se forem diferentes, faz-se os mesmos procedimentos da soma, para obter frações equivalentes de mesmo denominador. Em seguida, deve-se efetuar a subtração. Veja o exemplo:

EXEMPLO 12

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{15}{20}-\frac{4}{20}-\frac{10}{20}=\frac{15-4-10}{20}=\frac{1}{20}$$

Efetue as seguintes operações (de soma ou subtração) com frações.

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{1}$

b) $2-\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$

1.3.3 Multiplicação

A multiplicação de frações é muito simples, basta multiplicar os numeradores entre si, bem como seus denominadores. Observe:

EXEMPLO 13

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21} \qquad \frac{6}{11} \times \frac{9}{5} = \frac{6 \times 9}{11 \times 5} = \frac{54}{55}$$

1.3.4 Divisão

A divisão deve ser efetuada aplicando uma regra prática e de fácil assimilação. Deve-se repetir a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda fração (invertendo o numerador e denominador da segunda fração). Os exemplos a seguir ilustram o procedimento:

EXEMPLO 14

$$\frac{9}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{9 \times 3}{2 \times 7} = \frac{27}{14} \qquad \frac{8}{3} \div \frac{5}{9} = \frac{8}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{8 \times 9}{3 \times 5} = \frac{72}{15}$$

1.4 Propriedades das operações

É importante lembrar que existe uma regra de prioridade das operações. Essa regra define a ordem correta para resolver as diferentes partes de uma expressão. Usar uma regra de ordem para realizar as operações garante que uma expressão tenha solução única. Sem uma ordem definida para as operações, as expressões usadas em áreas científicas ou financeiras, por exemplo, não seriam muito úteis, e seria impossível saber se uma resposta está correta numa prova de matemática.

Em qualquer operação matemática deve-se começar resolvendo os parênteses. Na verdade os sinais gráficos: 1º parênteses - ( ), 2º colchetes - [ ] e 3º Chaves - { }, depois os expoentes, em seguida as multiplicações e divisões e, por último, a adição e a subtração. Quando as operações são do mesmo nível (mesmo expoente), elas devem ser resolvidas da esquerda para a direita. Por exemplo, se o cálculo tiver mais de um expoente, primeiro você deve solucionar o da esquerda e continuar para a direita. A ordem padrão é a seguinte: parêntesis, expoentes, multiplicação e divisão, e finalmente, adição e subtração.

Vejamos a seguinte expressão:

EXEMPLO 15

$$\frac{4}{2} \times 3 + (4 + 6 \times 2) + \frac{18}{9} - 8$$

1. Sempre deve-se começar resolvendo as operações que estão dentro dos parênteses que servem para agrupar partes de uma expressão matemática.

Passo 1

$$\frac{4}{2} \times 3 + (4 + 6 \times 2) + \frac{18}{9} - 8$$

2. Dentro dos parênteses, é necessário seguir a ordem das operações como seria feito em uma expressão sem eles. No exemplo, existem duas operações: uma adição e uma multiplicação. Como a multiplicação sempre deve ser realizada primeiro, deve-se começar multiplicando $6 \times 2 = 12$ e, em seguida, realizar a adição $12 + 4 = 16$.

Passo 2

$$\frac{4}{2} \times 3 + (4 + 12) + \frac{18}{9} - 8$$
$$\frac{4}{2} \times 3 + (16) + \frac{18}{9} - 8$$

3. Agora realiza-se as operações de multiplicação ou divisão. É importante lembrar que a multiplicação não precisa ser feita necessariamente antes da divisão. Neste caso, as operações são resolvidas da esquerda para a direita. Começando pela esquerda primeiramente é necessário resolver $\frac{4}{2} = 2$

Passo 3.1

$$2 \times 3 + 16 + \frac{18}{9} - 8$$

a próxima operação é $2 \times 3 = 6$

Passo 3.2

$$6 + 16 + \frac{18}{9} - 8$$

a última operação de divisão ou multiplicação é $\frac{18}{9} = 2$

Passo 3.3

$$6 + 16 + 2 - 8$$

4. Não há mais nada para multiplicar ou dividir, então é possível avançar para a última parte na ordem de operações: a adição e a subtração. Assim, como fizemos com as multiplicações e com as divisões, adicionaremos e subtrairemos da esquerda para a direita.

Passo 4.1

$$6 + 16 + 2 - 8$$
$$24 - 8$$
$$16$$

Em outras palavras:

Passo 4.2

$$\frac{4}{2} \times 3 + (4 + 6 \times 2) + \frac{18}{9} - 8 = 16$$

De forma análoga ao exemplo anterior, calcule as seguintes expressões:

a) $\dfrac{\frac{2}{5}}{3}$

b) $\dfrac{5}{2} + \left[2 - \left(\dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}\right)\right]$

c) $\left[\dfrac{7}{2} - \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}\right)\right]$

d) $\dfrac{17}{3} \div \left[5 + \dfrac{7}{5} \times \left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{6}\right)\right]$

e) $[9 - (-6)] \times \left[\dfrac{2(-3) - 4(5)}{-8(6) - 4}\right]$

1.5 Exercícios

1. Calcule as expressões a seguir e simplifique o resultado (quando possível)

   a) $\dfrac{3}{4} + 1$

   b) $2 - \dfrac{2}{3}$

   c) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{13}$

   d) $\dfrac{7}{3} \times 2$

   e) $\dfrac{1}{7} \div \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{3}$

   f) $\dfrac{1}{9} \times \dfrac{12}{7}$

   g) $\dfrac{1}{11} \div \dfrac{4}{5} + 9$

   h) $\dfrac{3}{7} - \dfrac{8}{4} + 4$

   i) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{2}$

   j) $\dfrac{1}{30} \div \dfrac{2}{15} - \dfrac{1}{3}$

2. Calcule as expressões a seguir e simplifique o resultado (quando possível)

   a) $\dfrac{\frac{2}{5}}{3}$

   b) $\dfrac{5}{6} - \left(\dfrac{2+3}{7}\right)$

   c) $\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right) \div \left(\dfrac{3}{2} + 3\right)$

   d) $9 - 3 \div \dfrac{1}{3} + 1$

   e) $\dfrac{5}{2} + \left[2 - \left(\dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}\right)\right]$

   f) $\dfrac{\frac{6}{9} \div \frac{1}{3} + 6}{\frac{4}{3} \div \frac{1}{6} + \frac{6}{5} \times \frac{2}{30}}$

   g) $\dfrac{\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} - 2}{\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} + \frac{6}{5} \times \frac{2}{3}}$

   h) $3 \times \dfrac{9}{4} - \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + 2\right] \div \sqrt{\dfrac{4}{9}}$

i) $\left[\left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{12} + 2\right) \div \left(\frac{1}{10}\right)^2 - 10^3\right]$ j) $\dfrac{\frac{4}{3} \times \frac{1}{8}}{\frac{3}{7} + \frac{16}{9} \times \frac{7}{2}}$

3. A expressão $\dfrac{1 + \dfrac{1}{1 - \frac{1}{5}}}{-1 + \dfrac{3}{1 + \frac{1}{5}}}$ é equivalente a:

   (a) $\frac{2}{3}$

   (b) $\frac{3}{2}$

   (c) $\frac{1}{3}$

   (d) $\frac{1}{4}$

   (e) 0

4. O valor da expressão $\left[9 \times \left(\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6} - \frac{2}{12}}{\frac{8}{5} \times \frac{3}{8} \div 2 + 1 + \frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right]$ é:

   (a) $\frac{2}{3}$

   (b) $\frac{3}{2}$

   (c) $\frac{1}{3}$

   (d) $\frac{1}{4}$

   (e) 0

5. A expressão $\dfrac{5 + \left(\frac{2}{4}\right)^2}{1 + \dfrac{8}{8 + \sqrt{\frac{9}{100}}}}$ equivale a:

   (a) $\frac{11}{4}$

   (b) $\frac{230}{82}$

   (c) $\frac{77}{29}$

(d) $\dfrac{2770}{1012}$

(e) $\dfrac{13}{5}$

6. A prática de consórcio em fazendas de produção é muito realizada por diversas vantagens, entre elas a diminuição com o custo de fertilizantes para culturas de interesse. Pensando nisso, a fazenda do Sr. Agenor possui a seguinte divisão: $\frac{1}{9}$ da sua área está destinada à produção de suínos, enquanto $\frac{5}{8}$ estão destinados à produção de milho e o restante à produção de trigo, na qual recebem os dejetos tratados da suinocultura como complemento na sua fertilização. Considerando que para a produção de milho e trigo há o mesmo número de parcelas dentro das áreas, se o Sr. Agenor possui 81 parcelas de produção de trigo, quantas parcelas para a produção de milho existem a mais do que para a produção de trigo?

7. Uma empresa da indústria alimentícia está estudando o gasto em reais da compra de ingredientes e condimentos de um laboratório de processamento de carne e um laboratório de processamento de leite. Tentando entender a dinâmica de tais gastos, foi liberada uma quantia igual para cada um dos laboratórios e um mês depois tal gasto foi avaliado. O laboratório de processamento de carne gastou um montante de $R\$$ 3.500,00 enquanto que o laboratório de processamento de leite um total de $R\$$ 950,00. Após um levantamento, percebeu-se que para o primeiro laboratório tinha sobrado $\frac{4}{7}$ do valor restante do segundo. Diante disso, quantos reais tinham sobrado para o laboratório de processamento de leite após um mês?

8. O Parque Estadual da Cantareira, no estado de São Paulo, é conhecido pela sua grande diversidade na flora, possuindo uma das maiores áreas de mata tropical nativa do mundo. A fim de caracterizar as espécies de árvores e suas aproximadas quantidades no parque, um grupo de pesquisadores da área de ciências florestais da ESALQ/USP determinou uma região do parque e avaliou a quantidade de árvores de Embaúba e Jacarandá-Paulista presente em tal. Foi notado que $\frac{2}{9}$ de árvores presentes na região eram de Embaúba, entretanto verificou-se que havia 95 árvores de Jacarandá-Paulista a mais do que Embaúba. Assim, quantas árvores de Jacarandá-Paulista há na região?

1.6 Respostas dos exercícios

1. a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{188}{195}$
   d) $\frac{14}{3}$ e) $\frac{5}{14}$ f) $\frac{4}{21}$
   g) $\frac{401}{44}$ h) $\frac{17}{7}$ i) $-\frac{14}{5}$
   j) $-\frac{1}{12}$

2. a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{5}{42}$ c) $\frac{1}{6}$
   d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{216}{181}$
   g) $-\frac{10}{21}$ h) $\frac{37}{12}$ i) 0
   j) $-\frac{735}{3352}$

3. Alternativa (b) $= \frac{3}{2}$

4. Alternativa (d) $= 1$

5. Alternativa (a) $= \frac{11}{4}$

6. 54 parcelas.

7. $R\$$ 5.950,00

8. 133 árvores.

Anexo A

Para saber mais sobre frações, separamos alguns vídeos interessantes que servirão de base para o estudo.

1. O que é fração? Ideias das Frações e o que são frações

   Link: `https://youtu.be/55sqKNqgK8s`

2. Tipos de frações

   (a) Própria, Aparente, Mista e Imprópria

   Link: `https://youtu.be/C6D62Or8HcA`

   (b) O que são Frações Equivalentes e Frações Irredutíveis

   Link: `https://youtu.be/AMjr5IgaAS4`

3. Operações com frações

   (a) MMC | Mínimo Múltiplo Comum

   Link: `https://youtu.be/02NUuEKseEg`

   (b) Adição e Subtração de Frações | Denominadores iguais e diferentes

   Link: `https://youtu.be/HmtEOJ-CXds`

   (c) Como fazer Multiplicação de Frações | Significado Geométrico

   Link: `https://youtu.be/oc-oHcItwJE`

   (d) Divisão de Frações | Interpretação Geométrica e Aritmética

   Link: `https://youtu.be/bbw9kwj3g7U`

2 Potenciação e Radiciação

2.1 Potenciação

Definição: Sejam a um número real e n um número natural, tal que $n \geq 2$. Chama-se potência de base a e expoente n o número a^n, em que

Definição

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ vezes} \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \geq 2.$$

Dessa definição decorre que:

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \quad \text{etc.}$$

Definições Especiais

- Para $n = 0$ e $a \neq 0$, $a^0 = 1$;
- Para $n = 1$, $a^1 = a$;
- Note a condição de existência $a \neq 0$, pois 0^0 é indeterminado.

EXEMPLO 16

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

Quando o número base é negativo, o resultado será positivo para expoente par e negativo para expoente ímpar.Veja alguns exemplos:

EXEMPLO 17

$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{81}$$

2.1.1 Propriedades

Sejam a um número real e m e n números naturais.

- Multiplicação de potência de mesma base

$$(a)^m \cdot (a)^n = a^{m+n}$$

- Multiplicação de potência de bases diferentes e mesmo expoente

$$(a)^n \cdot (b)^n = (ab)^n$$

- Divisão de potências de mesma base

$$\frac{(a)^m}{(a)^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

- Divisão de potências de bases diferentes e mesmo expoente

$$\frac{(a)^n}{(b)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$$

- Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

2.1.2 Consequências

- Potência de expoente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

pois,

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

EXEMPLO 18

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$ $$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$ $$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$$

2.2 Radiciação

Definição: Dados um número real não negativo a e um número natural n, $n \geq 1$, chama-se raiz enésima aritmética de um número a o número real b e não negativo tal que $b^n = a$.

A radiciação é a operação inversa da potenciação. De modo geral, tem-se:

Definição

índice

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, \quad b \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \; e \; n \geq 1.$$

radical radicando

isto é, o resultado b da raiz enésima de um número a corresponde à expressão deste número b elevado a n com resultado a.

Todo radical pode ser escrito na forma de uma potência fracionária

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Note que para $n = 2$, a notação reduz-se a

$$\sqrt{a}$$

Isto é, quando o índice da raiz é igual a 2, é possível omiti-lo. Além disso, note que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Usando a definição:

EXEMPLO 19

$$\sqrt[2]{9} = 3 \iff 3^2 = 9$$ $$\sqrt[3]{8} = 2 \iff 2^3 = 8$$ $$\sqrt[3]{0} = 0 \iff 0^3 = 0$$

$$\sqrt[4]{625} = 5 \iff 5^4 = 625$$

Usando expoente fracionário e propriedades de potência

EXEMPLO 20

$$\sqrt[2]{9} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\cdot\frac{1}{2}} = 3$$

$$\sqrt[3]{8} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2$$

$$\sqrt[3]{0} = 0^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\sqrt[4]{625} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\cdot\frac{1}{4}} = 5$$

2.2.1 Propriedades

- Potência de uma raiz de índice e expoente iguais

$$(\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

- Potência de uma raiz de índice e expoente diferentes

$$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- Raiz de uma raiz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$$

- Multiplicação de raízes com mesmo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$$

- Divisão de raízes com mesmo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

2.3 Exercícios

1. Obtenha o valor da expressão $\dfrac{3^{x+2} + 3^{x+1}}{3^{x+1}}$

2. A fração $\dfrac{2^{98} + 4^{50} - 8^{34}}{2^{99} - 32^{20} + 2^{101}}$ é equivalente a

   (a) -1

   (b) $\dfrac{-11}{6}$

   (c) 2

   (d) $\dfrac{-5}{2}$

   (e) $\dfrac{7}{4}$

3. Simplifique as expressões abaixo:

(a) $\dfrac{2^3}{2^{-2}}$

(b) $-\sqrt[3]{-8}$

(c) $(3^5)(9^2)$

4. Marque as sentença como verdadeiras ou falsas.

(a) [ ] $x^{-4} > x^{-3}$

(b) [ ] $y^{-b} = \dfrac{1}{y^b}$

(c) [ ] $\sqrt{x^4} = x^2$

(d) [ ] $\sqrt{16} = \pm 2$

5. Calcule o valor da expressão $\dfrac{\sqrt[3]{3^n - 9^n}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{9^n}\sqrt{3^n}}}$

6. Simplifique as expressões abaixo

(a) $\sqrt{8} + \sqrt{18}$

(b) $\sqrt{x}\sqrt{32y^4x}$

(c) $\dfrac{x}{\sqrt{9}}(\sqrt[3]{-8} + 5\sqrt[5]{-32})$

(d) $(a^{-1})^2 + (b^2)^{-1} + 2(ab)^{-1}$

2.4 Respostas dos exercícios

1. 4

2. $\dfrac{-11}{6}$

3. Simplifique as expressões abaixo:

(a) 2^5

(b) 2

(c) 3^9

4. Marque as sentença como verdadeiras ou falsas.

(a) [F]

(b) [V]

(c) [V]

(d) [F]

5. $\sqrt[3]{1 - 3^n}$

6. Simplifique as expressões abaixo

   (a) $5\sqrt{2}$

   (b) $4xy^2\sqrt{2}$

   (c) $-4x$

   (d) $\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^2$

3

Produtos Notáveis e Fatoração

3.1 Produtos notáveis

Produtos notáveis são multiplicações em que os fatores (que estão sendo multiplicados) são polinômios. Existem cinco produtos notáveis mais relevantes e que serão utilizados com mais frequência: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos, cubo da soma de dois termos e cubo da diferença de dois termos. Cada um deles serão vistos em detalhe.

3.1.1 Principais produtos notáveis

Quadrado da soma de dois termos

Para obter a expressão que representa o quadrado da soma de dois termos, basta representar de forma algébrica a frase que nomeia o produto notável.

> Quadrado da soma de dois termos
>
> O quadrado: $(\quad)^2$
>
> Da soma: $(\quad + \quad)^2$
>
> De dois termos: $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

"O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo."

Desenvolvendo algebricamente a expressão $(a+b)^2$, tem-se:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EXEMPLO 21

$$(x+3y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$$

$$(7x+1)^2 = (7x)^2 + 2\cdot 7x\cdot 1 + 1^2 = 49x^2 + 14x + 1$$

$$(a^2+2bc)^2 = (a^2)^2 + 2\cdot a^2\cdot 2bc + (2bc)^2 = a^4 + 4a^2bc + 4b^2c^2$$

$$\left(2m+\frac{3}{4}\right)^2 = (2m)^2 + 2\cdot 2m\cdot\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 4m^2 + 3m + \left(\frac{9}{16}\right)$$

Quadrado da diferença de dois termos

Para obter a expressão que representa o quadrado da diferença de dois termos, deve-se transcrever esse produto em linguagem algébrica.

O quadrado da diferença de dois termos

O quadrado: $(\quad)^2$

Da diferença: $(\quad - \quad)^2$

De dois termos: $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

"O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, ***menos*** *duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo."*

Desenvolvendo algebricamente essa expressão, tem-se:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EXEMPLO 22

$$(7x-4)^2 = (7x)^2 - 2\cdot 7x\cdot 4 + 4^2 = 49x^2 - 56x + 16$$

$$(x^3-xy)^2 = (x^3)^2 - 2\cdot x^3\cdot xy + (xy)^2 = x^6 - 2x^4y + x^2y^2$$

$$(a^2-2bc)^2 = (a^2)^2 - 2\cdot a^2\cdot 2bc + (2bc)^2 = a^4 - 4a^2bc + 4b^2c^2$$

$$\left(\frac{1}{5}p-2q\right)^2 = \left(\frac{1}{5}p\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{5}p\cdot 2q + (2q)^2 = \frac{1}{25}p^2 - \left(\frac{4}{5}pq\right) + 4q^2$$

Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

Em termos algébrico, tem-se:

Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

O produto: $(\quad)\times(\quad)$

Da soma: $(\quad+\quad)\times(\quad)$

Pela diferença: $(\quad+\quad)\times(\quad-\quad)$

De dois termos: $(a+b)\times(a-b)$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

"O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo"

Desenvolvendo algebricamente, tem-se:

$$(a+b)\times(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b=a^2-b^2$$

EXEMPLO 23

$$(3a+x)\times(3a-x)=(3a)^2-x^2=9a^2-x^2$$

$$(x^2+5p)\times(x^2-5p)=(x^2)^2-(5p)^2=x^4-25p^2$$

$$(10+ab^3)\times(10-ab^3)=10^2-(ab^3)^2=100-a^2b^6$$

$$\left(b^3+\frac{3}{5}c\right)\times\left(b^3-\frac{3}{5}c\right)=(b^3)^2-\left(\frac{3}{5}c\right)^2=b^6-\frac{9}{25}c^2$$

O Cubo da Soma de Dois Termos

A notação algébrica desse produto notável é:

O Cubo da Soma de Dois Termos

O cubo: $(\quad)^3$

Da diferença: $(\quad+\quad)^3$

De dois termos: $(a+b)^3$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

"O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo mais três vezes o produto do primeiro termo ao quadrado pelo segundo termo mais três vezes o produto

do primeiro termos pelo quadrado do segundo termo mais o cubo do segundo termo"

O desenvolvimento algébrico será omitido neste item.

EXEMPLO 24

$$(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x(1)^2 + (1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{x} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{6}{4x} + \frac{12}{2x^2} + \frac{8}{x^3}$$

O Cubo da Diferença de Dois Termos

A notação algébrica desse produto notável é:

O Cubo da Diferença de Dois Termos

O cubo: $(\quad)^3$

Da diferença: $(\quad - \quad)^3$

De dois termos: $(a-b)^3$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

"O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo ***menos*** *três vezes o produto do primeiro termo ao quadrado pelo segundo termo* ***mais*** *três vezes o produto do primeiro termos pelo quadrado do segundo termo* ***menos*** *o cubo do segundo termo"*

O desenvolvimento algébrico será omitido neste item.

EXEMPLO 25

$$(1-2z)^3 = (1)^3 - 3(1)^2 \times 2z + 3 \times 1(2z)^2 - (2z)^3 = 1 - 6z + 12z^2 - 8z^3$$

$$\left(2-\frac{x}{3}\right)^3 = (2)^3 - 3(2)^2 \times \frac{x}{3} + 3 \times 2\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 = 8 - 4x + \frac{2x^2}{3} - \frac{x^3}{27}$$

3.2 Fatoração

Técnicas de fatoração

Fatoração é um processo utilizado na matemática que consiste em representar um número ou uma expressão como produto de fatores. Ao escrever um polinômio como a multiplicação de outros polinômios, frequentemente é possível simplificar a expressão. As principais técnicas de fatoração serão exemplificadas a seguir.

Fator comum em evidência

Esse tipo de fatoração é usado quando existe um fator que se repete em todos os termos do polinômio. Esse fator, que pode conter número e letras, será colocado na frente dos parênteses. Dentro dos parênteses ficará o resultado da divisão de cada termo do polinômio pelo fator comum. Isto é,

$$ax + bx = x(a + b)$$

EXEMPLO 26

$$y^5 - 2y^4 + y^3 = y^3(y^2 - 2y + 1)$$

$$x(m + n) - y(m + n) = (m + n)(x - y)$$

$$10ax + 15bx = x(10a + 15b) = 5x(2a + 3b)$$

$$8a^4b^2 - 20a^3b^5 = a^3(8ab^2 - 20b^5) = a^3b^2(8a - 20b^3) = 4a^3b^2(2a - 5b^3)$$

Agrupamento

No polinômio que não exista um fator que se repita em todos os termos, é possível usar a fatoração por agrupamento. Para isso, deve-se identificar os termos que podem ser agrupados por fatores comuns. Nesse tipo de fatoração, os fatores comuns dos agrupamentos são colocados em evidência. Isto é,

$$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$$

Primeiramente, deve-se agrupar os temos que tem um fator comum:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$$

Depois o fator comum é colocado em evidência em cada agrupamento:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b)$$

E por fim, novamente, o fator comum é colocado em evidência:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Alguns exemplos são apresentados a seguir.

EXEMPLO 27

$$y^3 + y^2 + y + 1 = y^2(y+1) + (y+1) = (y+1)(y^2+1)$$

$$ax - 2x + 5a - 10 = x(a-2) + 5(a-2) = (a-2)(x+5)$$

$$2bc + 5c^2 - 10b - 25c = 2b(c-5) + 5c(c-5) = (c-5)(2b+5c)$$

Trinômio Quadrado Perfeito

Trinômios são polinômios com três termos. Note que os trinômios quadrados perfeitos são os resultados dos produtos notáveis apresentados anteriormente

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

É necessário reconhecer se um trinômio é ou não um quadrado perfeito. Seja o trinômio:

$$a^2 + 10ab + 25b^2$$

A raiz dos termos ao quadrado é extraída, ou seja,

$$\sqrt{a^2} = a \quad e \quad \sqrt{25 \cdot b^2} = 5b$$

esses dois resultados são multiplicados por dois,

$$2 \cdot a \cdot 5b = 10ab,$$

que é exatamente o termo do meio do trinômio. Portanto, ele é um quadrado perfeito e a sua fatoração é dada por

$$(a+5b)^2$$

EXEMPLO 28

$$y^2 - 14y + 49 = (y-7)^2 \qquad 25p^2 + 30px + 9x^2 = (5p+3x)^2$$

$$a^6 + 22a^3 + 121 = (a^3+11)^2$$

Diferença de Dois Quadrados

Para fatorar polinômios do tipo $a^2 - b^2$ o produto notável da soma pela diferença é usado. Assim, a fatoração de polinômios desse tipo será:

$$x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$$

Para fatorar, calcula-se a raiz quadrada dos dois termos. Depois, escrever o produto da soma dos valores encontrados pela diferença desses valores.

Alguns exemplos são apresentados a seguir.

EXEMPLO 29

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$$

$$\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2y^2\right) = \left(\frac{1}{2}a^2\right) - (xy)^2 - (xy)^2 = \left(\frac{1}{2}a + xy\right)\left(\frac{1}{2}a - xy\right)$$

$$(a+7)^2 - 36 = (a+7)^2 - 6^2 = [(a+7)+6][(a+7)-6] = (a+13)(a+1)$$

3.3 Exercícios

Produtos Notáveis

1. Utilizando as regras dos produtos notáveis, calcule:

a) $(x+3)^2$

b) $(a+b)^2$

c) $(5y-1)^2$

d) $(x^2-6)^2$

e) $(2x+7)^2$

f) $(9x+1)(9x-1)$

g) $(a^2-xy)^2$

h) $(3x-\frac{1}{6}y)^2$

i) $(2x^2+3xy)^2$

j) $(x^3y-xy^3)^2$

k) $(3y-5)^2$

l) $(5+8b)^2$

m) $(a^4x^2+a^2x^4)(a^4x^2-a^2x^4)$

n) $\left(2x^2-\frac{3}{5}\right)\left(2x^2+\frac{3}{5}\right)$

o) $(2x^3+3y^2)(2x^3-3y^2)$

Fatoração

2. Fatore as seguintes expressões:

a) x^2-4

b) y^2-36

c) $9x^2-16$

d) $81x^2-64$

e) y^2-25x^2

f) $4x^2-25a^2$

g) $4x^2-20x+25$

h) $16y^2-x^4$

i) $25m^2+20m+4$

j) $25x^2-\frac{10}{3}x+\frac{1}{9}$

3. Observe a fatoração seguinte:

$$a^4 - 1 = (a^2+1)(a^2-1) = (a^2+1)(a+1)(a-1)$$

Agora, decomponha num produto de três fatores.

a) $x^4 - 1$

b) $81a^4 - 1$

4. Efetue as divisões seguintes, fatorando o dividendo:

a) $\dfrac{x^2 - 14x + 49}{x - 7}$

b) $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

3.4 Respostas dos exercícios

Produtos Notáveis

1.
a) $x^2 + 6x + 9$
b) $a^2 + 2ab + b^2$
c) $25y^2 - 10y + 1$
d) $x^4 - 12x^2 + 36$
e) $4x^2 + 28x + 49$
f) $81x^2 - 1$
g) $a^4 - 2a^2xy + x^2y^2$
h) $9x^2 - xy + \frac{y^2}{36}$
i) $4x^4 + 12x^3y + 9x^2y^2$
j) $x^6y^2 - 2x^4y^4 + x^2y^6$
k) $9y^2 - 30y + 25$
l) $25 + 80b + 64b^2$
m) $a^8x^4 - a^4x^8$
n) $4x^4 - \frac{9}{25}$
o) $4x^6 - 9y^4$

Fatoração

2.
a) $(x+2)(x-2)$
b) $(y+6)(y-6)$
c) $(3x+4)(3x-4)$
d) $(9x+8)(9x-8)$
e) $(y+5x)(y-5x)$
f) $(2x+5a)(2x-5a)$
g) $(2x-5)^2$
h) $(4y+x^2)(4y-x^2)$
i) $(5m+2)^2$
j) $(5x-\frac{1}{3})^2$

3.
a) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$
b) $(9a^2+1)(3a+1)(3a-1)$

4.
a) $(x-7)$
b) $(x-4)$

4

Exponencial e Logaritmo

4.1 Entendendo a exponencial

Ilustração: Alguns técnicos estão trabalhando numa pesquisa num laboratório de PISCICULTURA e estão verificando que os peixes do aquário estão morrendo.

- Na semana da pesquisa, apareceram 3 peixes mortos na segunda-feira.
- Na terça-feira morreram 9 peixes.
- Na quarta-feira morreram 27 outros.

A seguir, é apresentada uma maneira de trabalhar dom esse tipo de problema

Resolvendo equações exponenciais

Uma equação é caracterizada por uma igualdade e pela presença de uma ou mais incógnitas. Por exemplo, $2x+5=9$ é uma equação do primeiro grau cuja solução é $x=2$, pois 2 é o único valor que x pode assumir que torna a igualdade verdadeira. Na equação exponencial, a incógnita encontra-se no expoente.

EXEMPLO 30

$$2^x = 32$$

Para resolver uma equação exponencial, a estratégia é tentar igualar as bases. Após isso, os expoentes podem ser igualados.

Sabendo que $2^5 = 32$, as bases do exemplo acima podem ser igualadas.

EXEMPLO 31

$$2^x = 2^5 \Longleftrightarrow x = 5$$

Exercício resolvido
Resolver os exemplos a seguir.

- $2^x = 64$

- $10^{3x} = 1000$
- $3^{2x} = 27$
- $8^{2x} = 128$

4.2 Entendendo o logaritmo

Logaritmo é a operação inversa da exponencial utilizada para o cálculo de equações exponenciais que não possuem soluções imediatas. Neste sentido, o logaritmo simplifica os cálculos mais complicados. Além disso, o uso do logaritmo permite diminuir o grau de dificuldade das operações, transformando: multiplicação em adição, divisão em subtração, potenciação em multiplicação e radiciação em divisão.

Para estudar logaritmo é necessário ter conhecimento sobre potenciação e as suas propriedades, pois para encontrar o valor numérico de um logaritmo é necessário desenvolver uma equação. Por exemplo, dada a equação exponencial $2^x = 4$, essa pode ser transformada em logaritmo.

EXEMPLO 32

$$2^x = 4 \iff \log_2(4) = x$$

A base 2 (cujo expoente é x) continua sendo base do logaritmo, o resultado 4 passa a ser o **logaritmando** e o x é o resultado denominado **logaritmo**.

$\log_2(4) = x$ é o mesmo que perguntar a qual número 2 deve ser elevado para obtermos 4?

Sabe-se que 2 ao quadrado (ou seja, à potência 2) é igual a 4. Assim, conclui-se que o logaritmo de 4 na base 2 é igual a 2 (ou seja, $x = 2$).

Escrevendo em forma de logaritmo e calculando o resultado, obtém-se:

$$3^x = 9 \implies \log_3(9) = x \implies x = 2$$

$\log_3(9) = 2$ Lê-se: "o logaritmo de 9 na base 3 é igual a 2"

Definição de logaritmo

Logaritmo é a operação inversa da exponencial e, com isso, a equivalência fundamental dos logaritmos pode ser enunciada:

Definição

$$\log_a(b) = x \implies a^x = b$$

Na definição anterior, tem-se as duas maneiras de mostrar a pergunta feita no início do estudo de logaritmos.

A qual expoente x deve-se elevar a base a para resultar b?

O cálculo de logaritmo depende de algumas condições especiais. A próxima seção contém as condições para um logaritmo existir.

Condições de existência do logaritmo

- O logaritmando deve ser um número positivo, isto é, $b > 0$;
- A base deve ser um número positivo diferente de 1, isto é, $a > 0$ e $a \neq 1$.

A primeira restrição já inclui o fato de que o logaritmando deve ser diferente de zero. Na segunda restrição é definido que a base deve ser um número positivo, ou seja, também não pode ser zero.

Alguns exemplos são apresentados a seguir:

EXEMPLO 33

$$\log_2(8) = x \implies 2^x = 8 \implies 2^x = 2^3 \implies x = 3$$

$$\log(100) = x \implies 10^x = 10^2 \implies x = 2$$

Quando o logaritmo não apresenta base considera-se que a base tem valor igual a 10. Além disso, quando a base de um logaritmo é igual a e ($e = 2{,}718\ldots$) ele é chamado de logaritmo Neperiano ou logaritmo Natural.

$$\ln(e) = \log_e(e)$$

Nesse caso, o logaritmo é mais usado em assuntos técnicos.

Propriedades operatórias

- Propriedade 1 (Logaritmo do produto)

$$\log(A \times B) = \log A + \log B$$

O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

EXEMPLO 34

$$\log_2(8 \times 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$$

- Propriedade 2 (Logaritmo do quociente)

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log(A) - \log(B)$$

O logaritmo do quociente é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

EXEMPLO 35

$$\log_2\left(\frac{32}{4}\right) = \log_2(32) - \log_2(4) = 5 - 2 = 3$$

- Propriedade 3 (Logaritmo da potência)

$$\log A^n = n \times \log A$$

O logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

EXEMPLO 36

$$\log 10^2 = 2 \times \log 10 = 2 \times 1 = 2$$

Outro aspecto importante no estudo dos logaritmos é a transformação de base. Por exemplo, uma calculadora científica só calcula o logaritmo de base 10 (log) ou o logaritmo neperiano (ln). Então, por exemplo, quando deseja-se calcular o $\log_3(9)$ nessas calculadoras é necessário transformar a base 3 para a base 10 ou para a base e.

Mudança de base

Para mudar a base $\log_a(b)$ para base c, é necessário aplicar a seguinte igualdade:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}.$$

Aplicando a mudança de base em $\log_9(81)$, mudando da base 9 para a base 3, obtém-se:

EXEMPLO 37

$$\log_9(81) = \frac{\log_3(81)}{\log_3(9)} = \frac{4}{2} = 2$$

4.3 Exercícios

Exponencial

1. Determine o conjunto solução para as seguintes equações exponenciais:

   a) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$

   b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = \dfrac{15}{2}$

   c) $2 \cdot 2^x = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$

d) $\dfrac{25^x + 125}{6} = 5^{x+1}$

2. Calcule o conjunto solução do seguinte sistema de equações exponenciais:

$$\begin{cases} 4^x \cdot 8^y = \frac{1}{4} \\ 9^x \cdot 27^{2y} = 3 \end{cases}$$

3. Considere uma máquina agrícola que tenha uma depreciação de 25% ao ano. Se seu valor de compra foi de R$ 80.000,00, quanto custará daqui a quatro anos?

Logaritmo

4. Resolva as seguintes equações em t, utilizando log:

a) $2^t = 5$

b) $2{,}3 = (1{,}1)^t$

c) $a = b^t$

d) $2{,}02(1{,}15)^t = 3{,}18(2{,}01)^t$

e) $Pa^t = Qb^t$

f) $P = P_0 b^t$

g) $P = P_0 a^{nt}$

h) $Pb^{0{,}3k} = Pa^{nt}$

5. Simplifique as expressões, utilizando as propriedades dos logaritmos:

a) $\log(a^2) + \log(b) - \log(a) - \log(b^2)$

b) $\log(10^{x+3})$

c) $10^{\log(a^2)}$

d) $10^{2\log(b)}$

e) $10^{-\log(a)}t$

f) $10^{-\frac{\log(t)}{10}}$

6. **Meia-vida** - Em geral, se uma substância tem uma meia-vida de unidades de tempo (anos, horas, etc.), a quantidade Q da substância depois de t unidades de tempo (a mesma de h), considerando Q_0 a quantidade inicial, é

$$Q = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$

Em um método de marcação, utiliza-se como indicador o isótopo do potássio K42, cuja meia-vida é de 12,5 h. Se houver 10,32 g inicialmente, em quantas horas essa substância atingirá 1 g?

7. A partir do exercício 3 sobre Exponencial, qual o tempo em anos, em que o valor da máquina agrícola irá atingir a metade do valor da compra?

4.4 Respostas dos exercícios

Exponencial

1. a) $S = \{5\}$

   b) $S = \{-1\}$

c) $S = \{-\dfrac{1}{12}\}$

d) $S = \{1{,}2\}$

2. A solução da equação é o par $(x,y) = \{(-\frac{5}{2}, 1)\}$
3. Após 4 anos, a máquina custará R$ 25.312,50.

Logaritmo

4. a) $t = 2{,}32$ b) $t = 8{,}74$

c) $t = \dfrac{\log(a)}{\log(b)}$ d) $t = -0{,}81$

e) $t = \dfrac{\log\left(\frac{Q}{P}\right)}{\log\left(\frac{a}{b}\right)}$ f) $t = \dfrac{\log\left(\frac{P}{P_0}\right)}{\log(b)}$

g) $t = \dfrac{\log\left(\frac{P}{P_0}\right)}{n\log(a)}$ h) $t = \dfrac{0{,}3k\log(b)}{n\log(a)}$

5. a) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$ b) $x + 3$

c) a^2 d) b^2

e) $\dfrac{t}{a}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[10]{x}}$

6. A substância atingirá 1g após 42,09 horas.
7. A máquina custará R$ 40000,00, ou seja, metade do seu valor original de compra, após 2,41 anos.

Referências

Link: `http://proedu.rnp.br/bitstream/handle/123456789/585/Aula_11.pdf?sequence=11&isAllowed=y`

M. N. P. Silva. Exercícios sobre equação exponencial. URL: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/ exercicios-matematica/exercicios-sobre-equacao-exponencial.htm, 2022.

R. d. F. SVIERCOSKI. Matemática aplicada às ciências agrárias: análise de dados e modelos. Minas Gerais: Editora UFV, 2008.

5

Equações e Inequações do 1º Grau

5.1 Equação do 1° grau

Definição: Uma equação linear em x pode ser escrita da seguinte forma:

Definição

$$ax + b = 0,$$

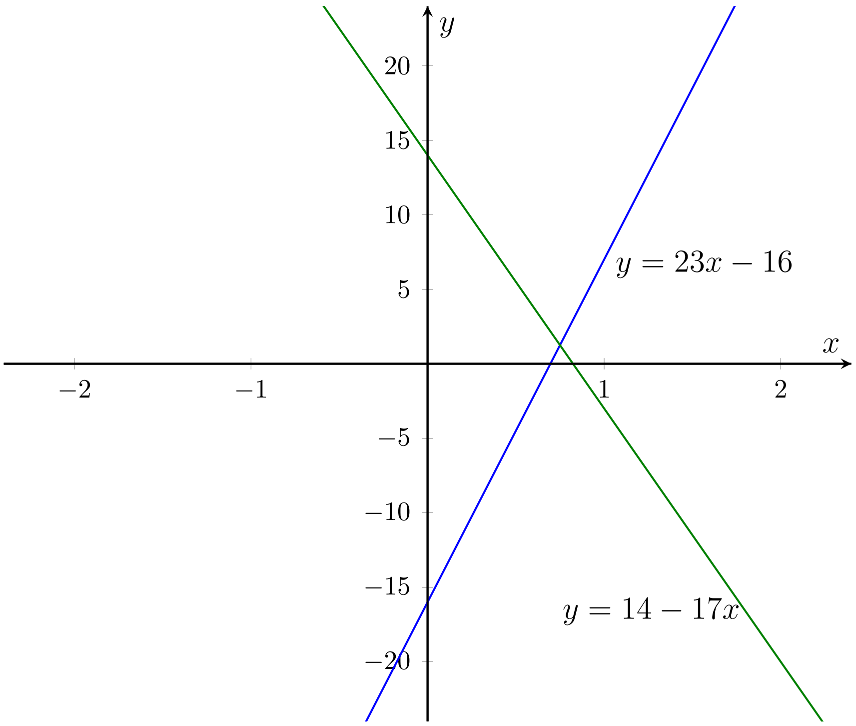
em que a, b $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

O objetivo de uma equação do 1° grau é encontrar o valor que satisfaz a igualdade.

Exercícios Resolvidos

1. Resolver a equação em $\mathbb{R}$.

   (a) $23x - 16 = 14 - 17x$
   Fazendo:
   $y = 23x - 16$
   $y = 14 - 17x$



Em seguida, faz-se:

$$23x - 16 = 14 - 17x$$

Soma-se $17x$ e 16 de ambos os lados da igualdade

$$23x - 16 + 17x + 16 = 14 - 17x + 17x + 16$$

$$40x = 30$$

Divide-se ambos os lados da igualdade por 40

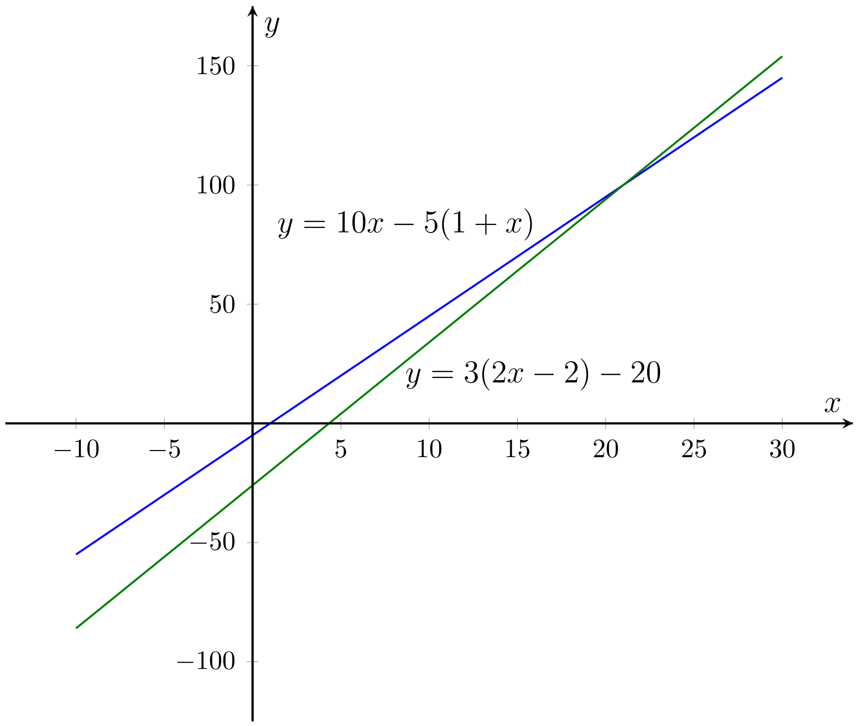
$$\frac{40x}{40} = \frac{30}{40}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Assim, o conjunto solução do problema é

$$S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$$

(b) $10y - 5(1 + y) = 3(2y - 2) - 20$
Fazendo:
$y = 10x - 5(1 + x)$
$y = 3(2x - 2) - 20$



Em seguida, faz-se:

$$10y - 5(1 + y) = 3(2y - 2) - 20$$

Aplicando a distributiva

$$10y - 5 - 5y = 6y - 6 - 20$$

Soma-se $-6y$ e 5 de ambos os lados da igualdade

$$5y - 5 - 6y + 5 = 6y - 26 - 6y + 5$$

$$-y = -21$$

$$\cdot(-1) - y = \cdot(-1) - 21$$

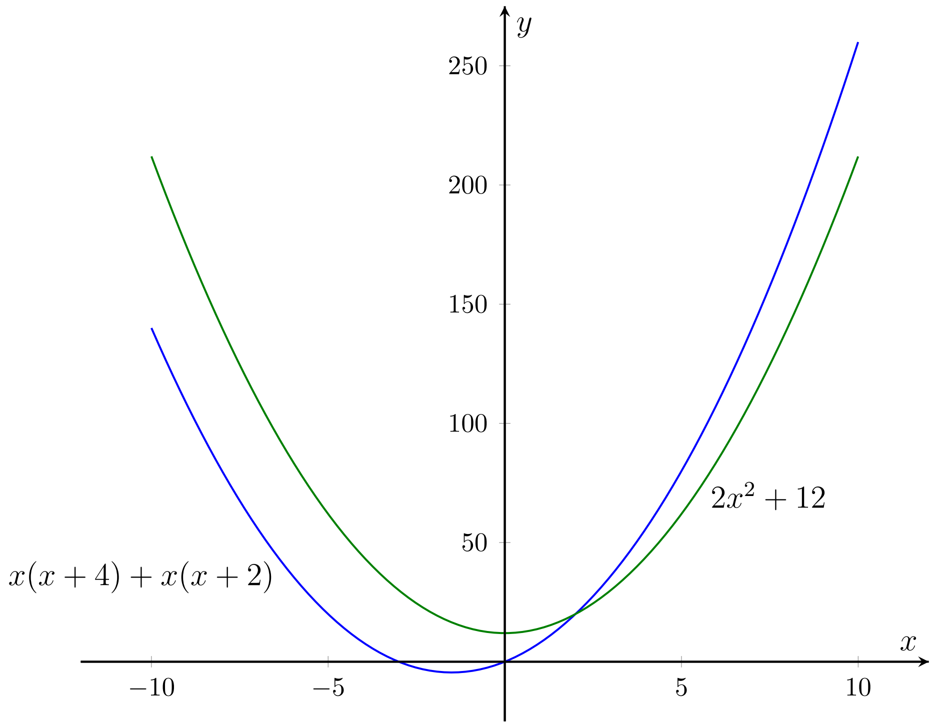
$$y = 21$$

$$S = \{21\}$$

(c) $x(x + 4) + x(x + 2) = 2x^2 + 12$ Fazendo a distributiva, obtém-se:

$$2x^2 + 6x = 2x^2 + 12$$

Plotando os gráficos das equações do 2ºgrau, obtém-se:



Soma-se $2x^2$ de ambos os lados da igualdade

$$2x^2 + 6x - 2x^2 = 2x^2 + 12 - 2x^2$$

$$6x = 12$$

Divide-se ambos os lados da igualdade por 6

$$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

Assim, o conjunto solução do problema é

$$S = \{2\}$$

(d) $\dfrac{x-5}{10} + \dfrac{1-2x}{5} = \dfrac{3-x}{4}$

Encontrando o MMC dos denominadores(10, 5), obtém-se:

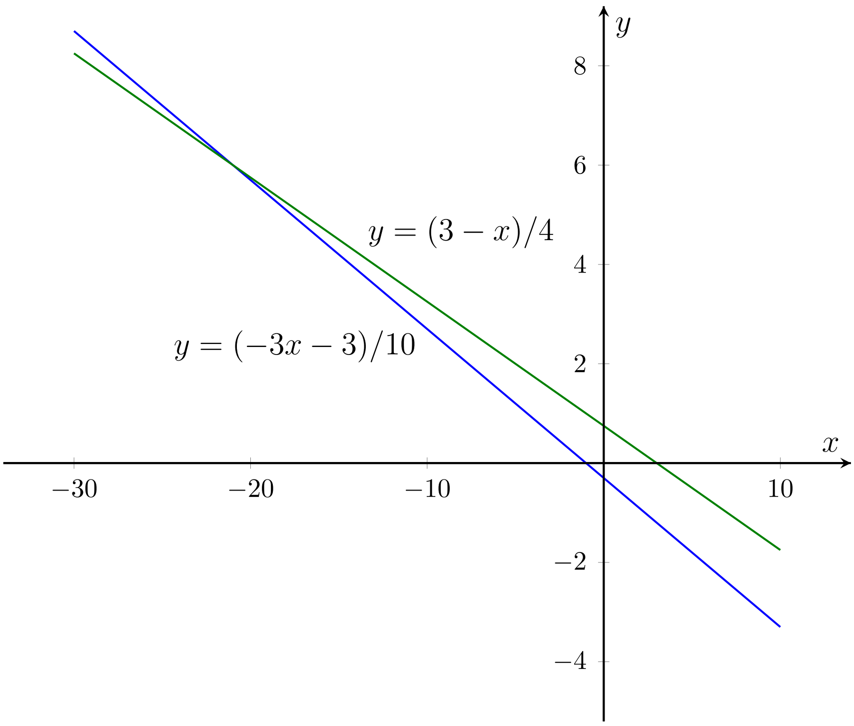
$$\frac{1 \cdot (x-5) + 2 \cdot (1-2x)}{10} = \frac{3-x}{4}$$

Aplicando a distributiva, obtém-se:

$$\frac{x - 5 + 2 - 4x}{10} = \frac{3-x}{4}$$

$$\frac{-3x-3}{10} = \frac{3-x}{4}$$

Plotando o gráfico, obtém-se:



$$\frac{-3x-3}{10} \cdot (10) \cdot (4) = \frac{3-x}{4} \cdot (10) \cdot (4)$$

$$4(-3x-3) = 10(3-x)$$

Aplicando a distributiva, obtém-se:

$$-12x - 12 = 30 - 10x$$

Soma-se $10x$ e 12 de ambos os lados da igualdade

$$-12x - 12 + 10x + 12 = 30 - 10x + 10x + 12$$

$$-2x = 42$$

Divide-se ambos os lados da igualdade por -2

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{42}{-2}$$

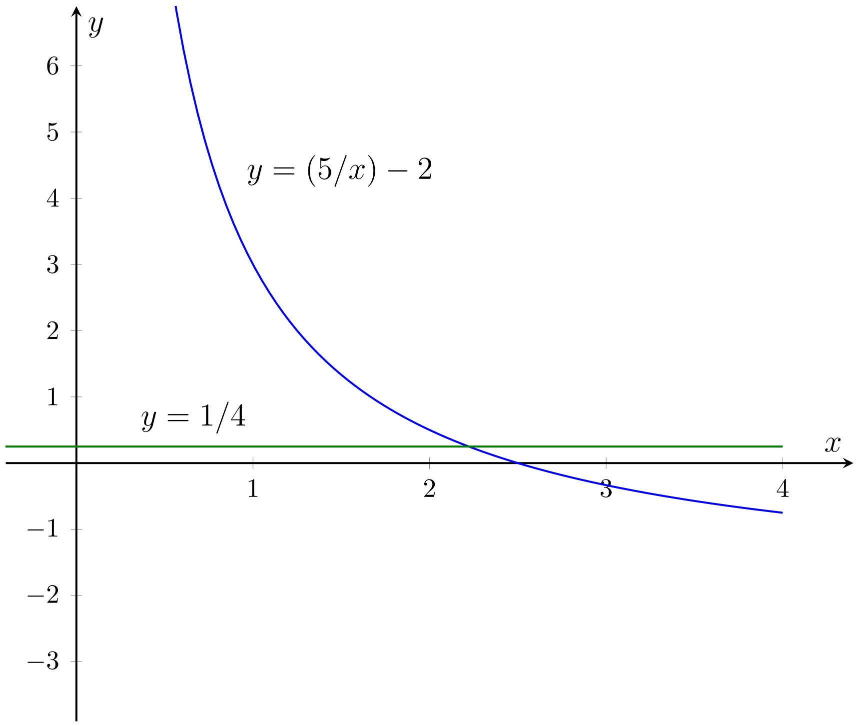
$$x = -21$$

Assim, o conjunto solução do problema é

$$S = \{-21\}$$

(e) $\dfrac{5}{x} - 2 = \dfrac{1}{4}$

Observa-se que $x = 0$ não é possível
Plotando o gráfico, temos:



Soma-se 2 de ambos os lados da igualdade

$$\frac{5}{x} - 2 + 2 = \frac{1}{4} + 2$$

$$\frac{5}{x} = \frac{9}{4}$$

Desde que $x \neq 0$, multiplica-se ambos os lados da igualdade por x

$$\frac{5}{x} \cdot (x) = \frac{9}{4} \cdot (x)$$

$$5 = \frac{9}{4}\, x$$

em seguida, multiplica-se os dois lados da igualdade pelo inverso de $\frac{9}{4}$, ou seja, por $\frac{4}{9}$

$$5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{9}{4}\, x \cdot \left(\frac{4}{9}\right)$$

$$x = \frac{20}{9}$$

Assim, o conjunto solução do problema é

$$S = \left\{\frac{20}{9}\right\}$$

2. Encontre a_1 e a_2 que satisfazem a equação.
$\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{a_1}{x-2} + \dfrac{a_2}{x-3}$

   Fazendo o MMC em os denominadores, $(x-2)(x-3)$, temos

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{a_1(x-3) + a_2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{a_1x - 3a_1 + a_2x - 2a_2}{x^2-5x+6}$$
$$2x - 1 = (a_1 + a_2)x - (3a_1 + 2a_2)$$

Assim, temos que resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \ \ (i) \\ 3a_1 + 2a_2 = 1 \ \ (ii) \end{cases}$$

De (i) temos $a_1 = 2 - a_2$, que substituindo em (ii) fica:

$$3(2 - a_2) + 2a_2 = 1 \Longrightarrow 6 - 3a_2 + 2a_2 = 1$$
$$\text{em (i)} \Longrightarrow 6 - a_2 = 1 \Longrightarrow a_2 = 5$$

Logo, voltando $a_1 = 2 - a_2 = 2 - 5 \Longrightarrow a_1 = -3$
Portanto, a igualdade é satisfeita quando $a_1 = -3$ e $a_2 = 5$

$$\boxed{\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{-3}{x-2} + \frac{5}{x-3}}$$

5.2 Inequação do 1°grau

Notação

- $<$: menor que;
- $>$: maior que;
- $\leq$: menor que ou igual a;
- $\geq$: maior que ou igual a.

Definição: Uma inequação linear em x pode ser escrita das seguintes formas:

Definição

$$ax + b < 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \leq 0, \quad ax + b \geq 0,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Propriedades: Sejam u,v,w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas, e c uma constante real.

- **Transitiva**.
  Se $u < v$ e $v < w$, então $u < w$.

- **Aditiva**.

  (i) Se $u < v$, então $u + w < v + w$.

(ii) Se $u < v$ e $w < z$, então $u + w < v + z$.

- **Multiplicativa**.

(i) Se $u < v$ e $c > 0$, então $uc < vc$.

(ii) Se $u < v$ e $c < 0$, então $uv > vc$.

Exercícios resolvidos

1. Resolva as inequações do primeiro grau:

(a) $2x - 8 > 0$
Com o objetivo de isolar a variável x, soma-se 8 nos dois lados da desigualdade

$$2x - 8 + 8 > 0 + 8$$

$$2x > 8$$

Em seguida, divide-se ambos lados por 2

$$\frac{2x}{2} > \frac{8}{2}$$

$$x > 4$$

Assim, o conjunto solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} = (+4, +\infty) =]+4, +\infty[$$

(b) $3 + 7x < 8x + 9$
Com o objetivo de isolar a variável x, subtrai-se $8x$ e 3 nos dois lados da desigualdade

$$3 + 7x - 8x - 3 < 8x + 9 - 8x - 3$$

$$-x < 6$$

Em seguida, multiplica-se ambos lados por -1

$$-x \ \cdot (-1) \ > \ 6 \ \cdot (-1)$$

$$x > -6$$

Assim, o conjunto solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -6\} = (-6, +\infty) =]-6, +\infty[$$

(c) $\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{3}{4}$

Com o objetivo de isolar a variável x, multiplica-se ambos lados da desigualdade por 5

$$\frac{x}{5}\,(\cdot\, 5) \leq \frac{3}{4}\,(\cdot\, 5)$$

$$x \leq \frac{15}{4}$$

Assim, o conjunto solução é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{15}{4}\right\} = \left(-\infty, \frac{15}{4}\right] = \left]-\infty, \frac{15}{4}\right]$$

(d) $2x - 5 < \dfrac{1}{3} + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1-x}{3}$

Com o objetivo de isolar a variável x, subtrai-se $\dfrac{1}{3}$ e soma-se $\dfrac{x}{3}$ e 5 nos dois lados da desigualdade

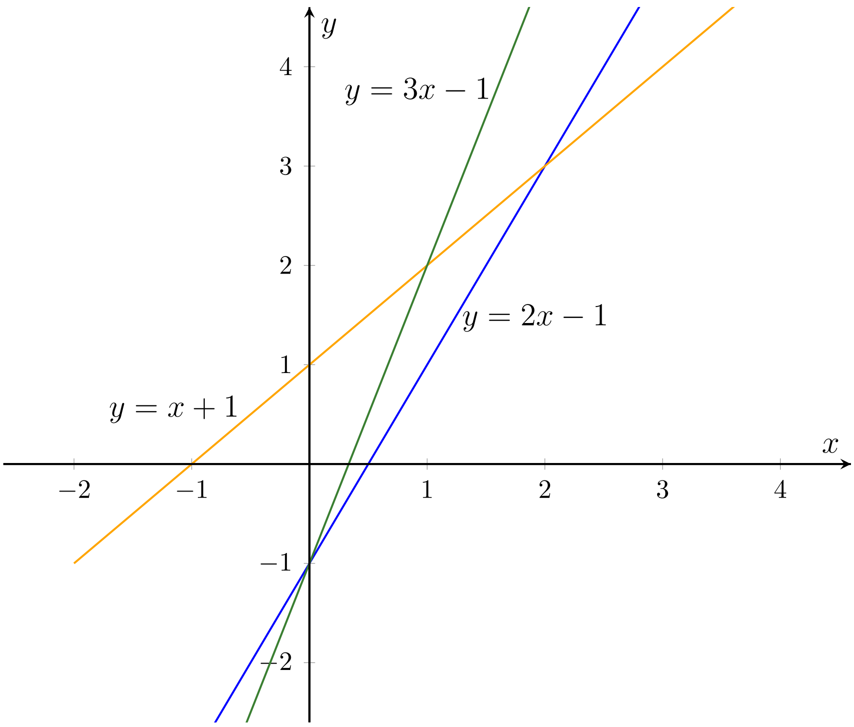
$$\begin{aligned} 2x - \frac{3x}{4} &< \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} + 5 \\ \frac{8x - 3x}{4} + \frac{x}{3} &< \frac{2+15}{3} \\ \frac{15x + 4x}{12} &< \frac{17}{3} \\ \frac{19x}{4} &< 17 \\ x &< \frac{4}{19} \cdot 17 \\ x &< \frac{68}{19} \end{aligned}$$

Assim, o conjunto solução é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{68}{19} \right\}$$

(e) $2x - 1 \ \leq \ x + 1 < 3x - 1$ (Desigualdade dupla)

Resolução:
Considerando $x \in \mathbb{R}$, os gráficos das três expressões são:



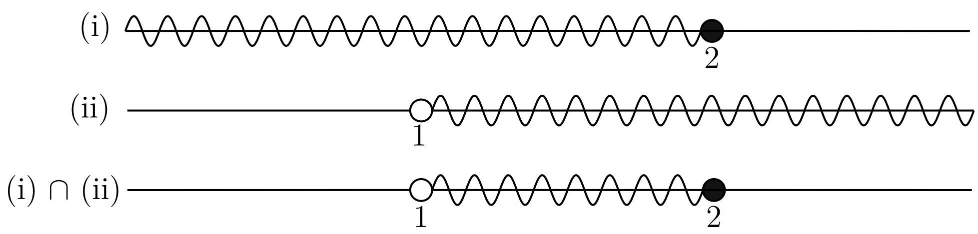
Adotando duas desigualdade, obtém-se:

$$\begin{cases} 2x - 1 \ \leq \ x + 1 & \text{(i)} \\ x + 1 < 3x - 1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

De (i), tem-se:
$2x - 1 \ \leq \ x + 1 \Longrightarrow x \leq 2$

De (ii), tem-se:
$x + 1 < 3x - 1 \Longrightarrow -2x < -2 \Longrightarrow x > 1$

Analisando os intervalos das desigualdades, tem-se:



Logo, $S = (1, 2]$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$.

(f) $\begin{cases} 3x - 1 > 5x + 2 \\ 4x + 3 < 7x - 11 \end{cases}$ (Sistema de inequações)

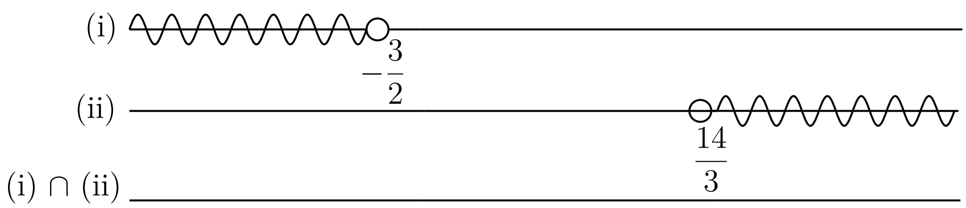
Resolução:
Considera-se $x \in \mathbb{R}$.
Primeiro, nomeia-se as desigualdades:

$$\begin{cases} 3x - 1 > 5x + 2 & \text{(i)} \\ 4x + 3 < 7x - 11 & \text{(ii)} \end{cases}$$

De (i) tem-se:
$3x - 1 > 5x + 2 \Longrightarrow -2x > 3 \Longrightarrow x < -\dfrac{3}{2}$

De (ii) tem-se:
$4x + 3 < 7x - 11 \Longrightarrow -3x < -14 \Longrightarrow x > \dfrac{14}{3}$

Analisando os intervalos das desigualdades, tem-se



Deste modo, $S = \emptyset$.

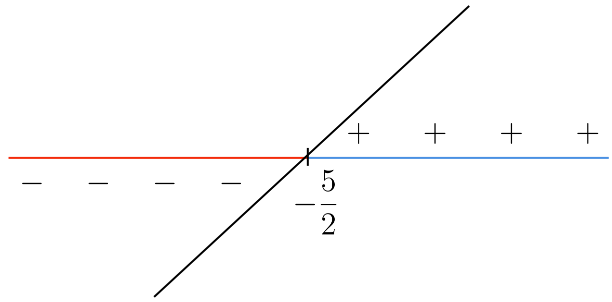
(g) $(2x + 5)(-3x + 7) < 0$ (Inequação produto)

Em primeiro lugar, faz-se um estudo do sinal de cada termo. Sendo o primeiro termo (i) igual a $2x + 5$ e o segundo termo (ii) igual a $(-3x + 7)$.

A análise de (i):

$$2x + 5 = 0 \Longrightarrow 2x = -5 \Longrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

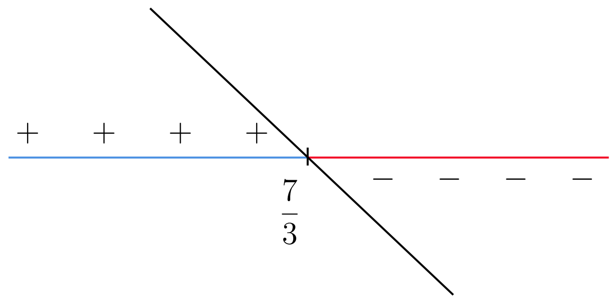
Na reta real tem-se:



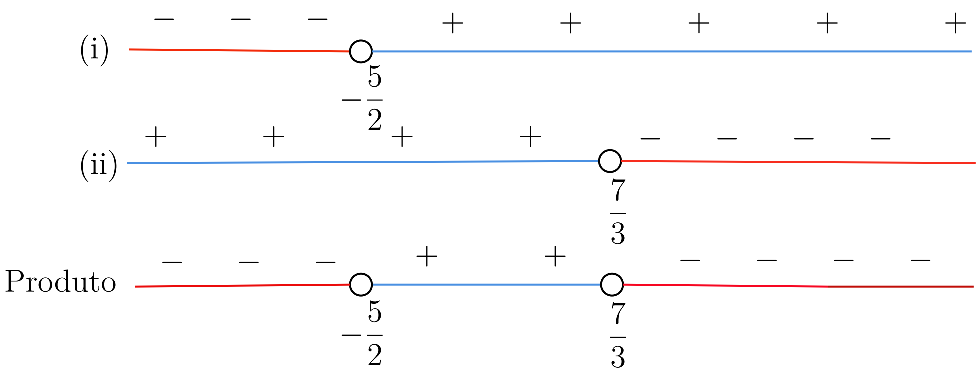
A análise de (ii):

$$-3x + 7 = 0 \Longrightarrow 3x = 7 \Longrightarrow x = \frac{7}{3}$$

Na reta real tem-se:



Analisando os dois termos juntos tem-se



A solução está no intervalo em que o produto é menor do que zero.

$$S = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right) \text{ ou } S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > \frac{7}{3}\right\}$$

(h) $\dfrac{-4x - 6}{5x - 10} \geq 0$ (Inequação quociente)

É necessário verificar a condição de existência da inequação.

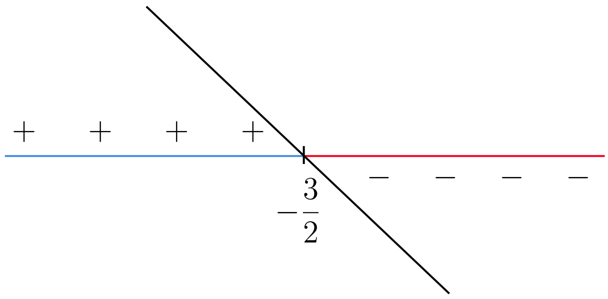
$$5x - 10 \neq 0 \Longrightarrow 5x \neq 10 \Longrightarrow x \neq 2$$

Em seguida, faz-se um estudo do sinal de cada termo. Sendo o primeiro termo (i) igual a $-4x-6$ e o segundo termo (ii) igual a $5x-10$.

A análise de (i):

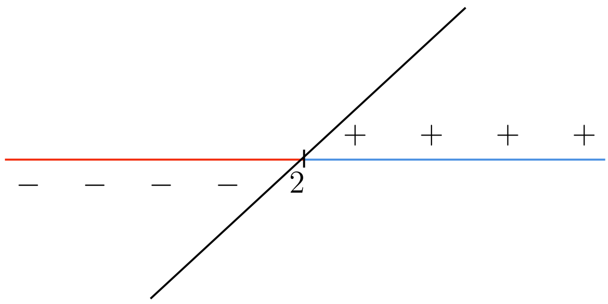
$$-4x-6=0 \Longrightarrow -4x=6 \Longrightarrow x=-\frac{6}{4} \Longrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

Na reta real tem-se:

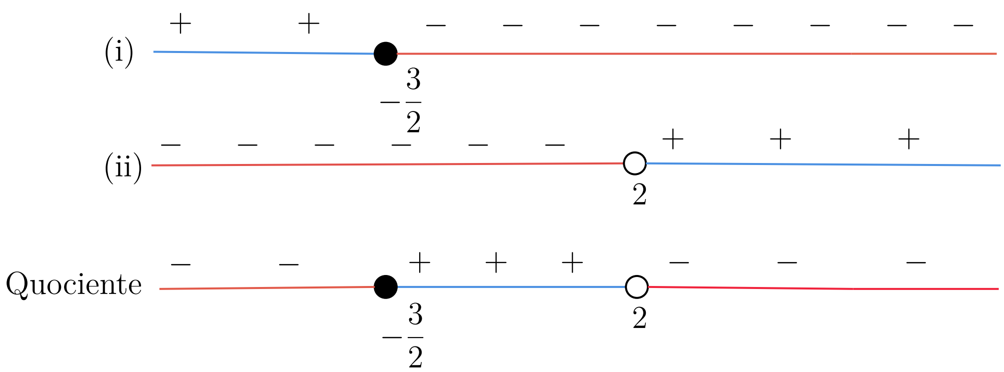


A análise de (ii):

$$5x-10=0 \Longrightarrow 5x=10 \Longrightarrow x=2$$



Analisando os dois termos juntos tem-se



A solução está no intervalo em que o quociente é maior do que zero.

$S=\left[-\frac{3}{2},2\right)$ ou $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{3}{2}\leq x<2\right\}$

(i) $\dfrac{x}{x+2} \geq \dfrac{x-1}{x+1}$

É necessário verificar as condições de existência da inequação.

$$x \neq -2 \text{ e } x \neq -1$$

Posteriormente, é feita a manipulação necessária da inequação.

$$\Longrightarrow \frac{x}{x+2} \geq \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x+1} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{x(x+1)-(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2+x-(x^2-x+2x-2)}{(x+2)(x+1)} \geq 0$$

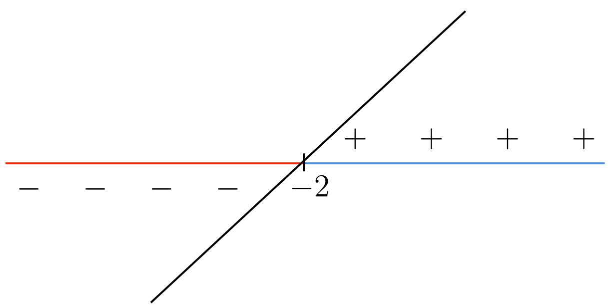
$$\Longrightarrow \frac{x^2+x-x^2-x+2}{(x+2)(x+1)} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{(x+2)(x+1)} \geq 0$$

Em seguida, faz-se um estudo do sinal de cada termo do denominador. Sendo o primeiro termo (i) igual a $x+2$ e o segundo termo (ii) igual a $x+1$.

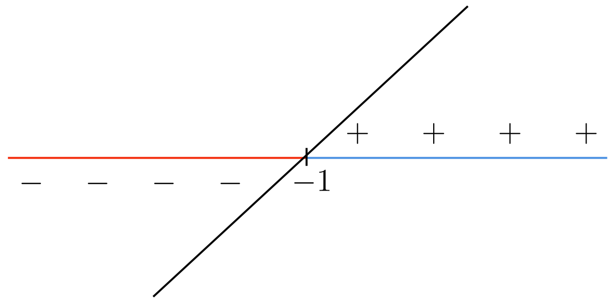
A análise de (i):

$$x+2=0 \Longrightarrow x=-2$$

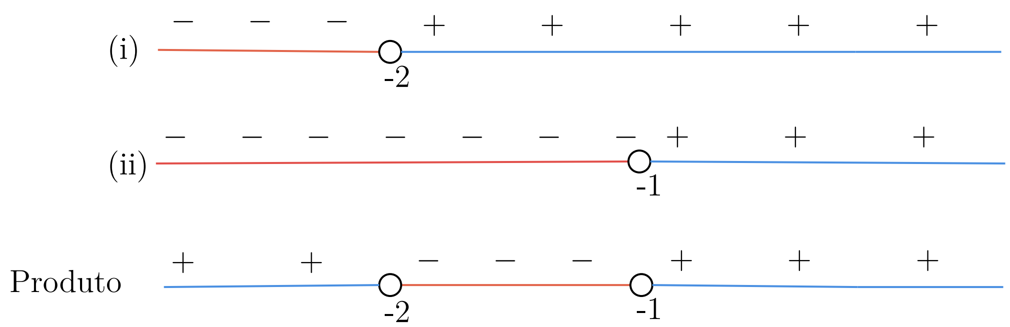


A análise de (ii):

$$x+1=0 \Longrightarrow x=-1$$



Analisando os dois termos juntos tem-se



A solução está no intervalo em que o produto dos termos (i) e (ii) é maior do que zero.

$$S = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$$

6

Equações e Inequações do 2º Grau

6.1 Equação do 2° Grau

Definição: Uma equação linear em x pode ser escrita da seguinte forma:

Definição

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Equação completa ou incompleta

Completa se todos os coeficientes (a, b, c) forem diferentes de 0 (zero);

Incompleta se um dos coeficientes, b ou c, forem iguais a 0 (zero) e $a \neq 0$.

EXEMPLO 38

$x^2 + 2x - 3 = 0 \longrightarrow a = 1, b = 2; c = -3$ (equação completa);

$-x^2 + 4x - 3 = 0 \longrightarrow a = -1, b = 4; c = -3$ (equação completa);

$2x^2 + x = 0 \longrightarrow a = 2, b = 1; c = 0$ (equação incompleta);

$x^2 + 3 = 0 \longrightarrow a = 1, b = 0; c = 3$ (equação incompleta);

$x^2 = 0 \longrightarrow a = 1, b = 0; c = 0$ (equação incompleta).

Resolução das equações O objetivo de uma equação do 2° grau é encontrar os valores de x que satisfazem a igualdade. Pela fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas.
Se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais.
Se $\Delta < 0$, não existe raiz real.

Exercício resolvido
Resolva $x^2 + x - 6 = 0$
Seja $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$
Calculando o valor de Δ

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 1 + 24$$

$$\Delta = 25$$

Como o valor de Δ é maior que 0 (zero) sabemos que a equação $x^2 + x - 6 = 0$ possui duas raízes reais e distintas. Assim,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

O sinal $\pm$ na fórmula indica que devemos fazer as duas operações matemáticas (soma e subtração), sendo x_1 o resultado obtido com a operação da soma (+) e x_2 o resultado obtido com a operação da subtração (-).
Assim, em x_1 tem-se:

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = 2$$

E em x_2 tem-se:

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-6}{2}$$

$$x_2 = -3$$

O método de Bhaskara resolve todas as equações de 2º grau, porém há outras formas de resolvê-las caso verifique que a equação se enquadre em um dos casos seguintes

1º Caso: Equações incompletas do tipo $ax^2 - c = 0$ (ou seja, $b = 0$). Para resolver esse tipo de equação basta isolar a variável x:

$$ax^2 - c = 0$$

$$ax^2 = c$$

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

EXEMPLO 39

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

2º Caso Equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ (ou seja, $c = 0$). Para esse caso de equação, será usada a fatoração e a incógnita x é colocada em evidência, obtendo:

$$x(ax + b) = 0$$

Daí obtém-se

$$x = 0 \ \text{ ou } \ ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{a}$$

Então as raízes da equação são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

EXEMPLO 40

$$x^2 - 5x = 0$$

Fatorando, obtém-se:

$$x(x - 5) = 0$$

Para resultar em zero um dos fatores tem que ser zero. Deste modo:

$$x_1 = 0 \ \text{ ou } \ x - 5 = 0 \longrightarrow x_2 = 5$$

3º Caso Equações incompletas do tipo $ax^2 = 0$ (ou seja, $b = 0$ e $c = 0$). Nesse caso, as etapas são as seguintes:

$$ax^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{0}{a}$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Como $+0$ e -0 indicam o mesmo número pode-se afirmar que esse tipo de equação tem sempre duas raízes iguais a zero.

4º Caso Nas equações completas podemos utilizar o método das relações de **Soma e produto** entre as raízes da equação (**relação de Girard**).

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

EXEMPLO 41

$$x^2 - 5x + 6$$

Pela relação da Soma

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$$

Na relação do Produto, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(6)}{1} = 6$$

Em seguida, devemos perguntar: "quais dois números cuja soma a soma é igual a 5 e o produto é igual a 6?"
A solução é $S = \{2, 3\}$

6.2 Inequação do 2º Grau

Definição: A inequação é uma desigualdade, logo em vez de um sinal de igual na sentença matemática utiliza-se sinais como:

Tabela 6.1: Símbolos de uma inequação.

Símbolo	Significado
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor que ou igual a
$\geq$	Maior que ou igual a

Assim, uma inequação é escrita na forma: $ax^2+bx+c \, \square \, 0$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Por exemplo, na desigualdade $x^2 + 6x + 9 > 0$, tem se:

Tabela 6.2: Termos da inequação.

Nome	Termo
Incógnita	x (o maior expoente de x é igual a 2)
1º membro	$x^2 + 6x + 9$
2º membro	0

Observação: Resolver a inequação é encontrar todos os valores reais de x que tornem a desigualdade verdadeira e escrever o conjunto solução.
Exercícios resolvidos.
Resolva as inequações:

a) $y = x^2 - 2x - 8 < 0$
Resolução:
Seja $a = 1, b = -2, c = -8$:
Encontrando o valor de Δ

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)$$

$$\Delta = 4 + 32$$

$$\Delta = 36 > 0 \longrightarrow (x_1 \neq x_2)$$

Calculando os valores das raízes

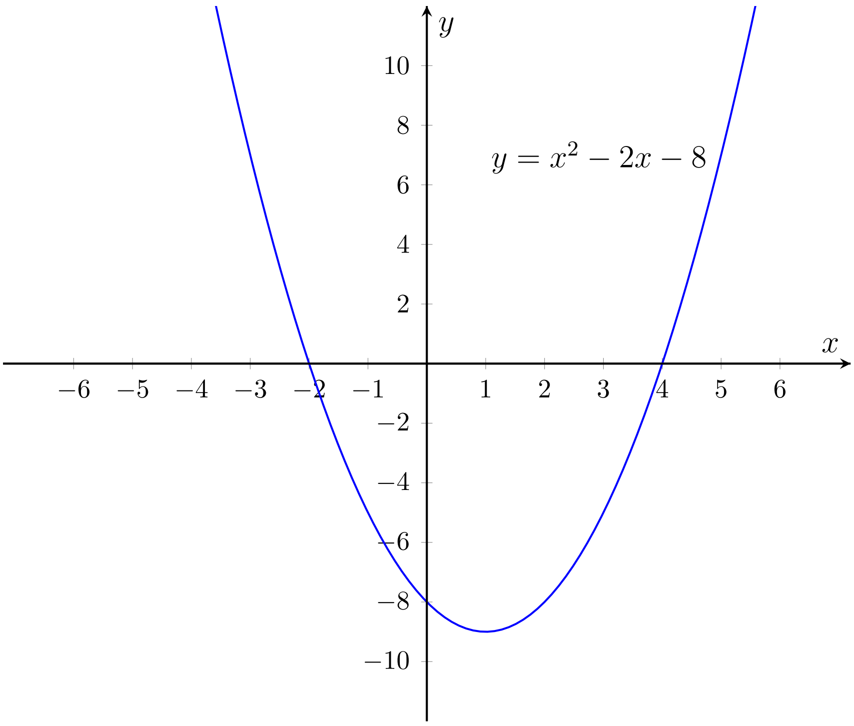
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$



Assim, o conjunto solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

b) $-x^2 - 3x - 2 \leq 0$
Resolução:
Seja $a = -1, b = -3, c = -2$:
Encontrando o valor de Δ

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1 > 0 \longrightarrow (x_1 \neq x_2)$$

Calculando os valores das raízes

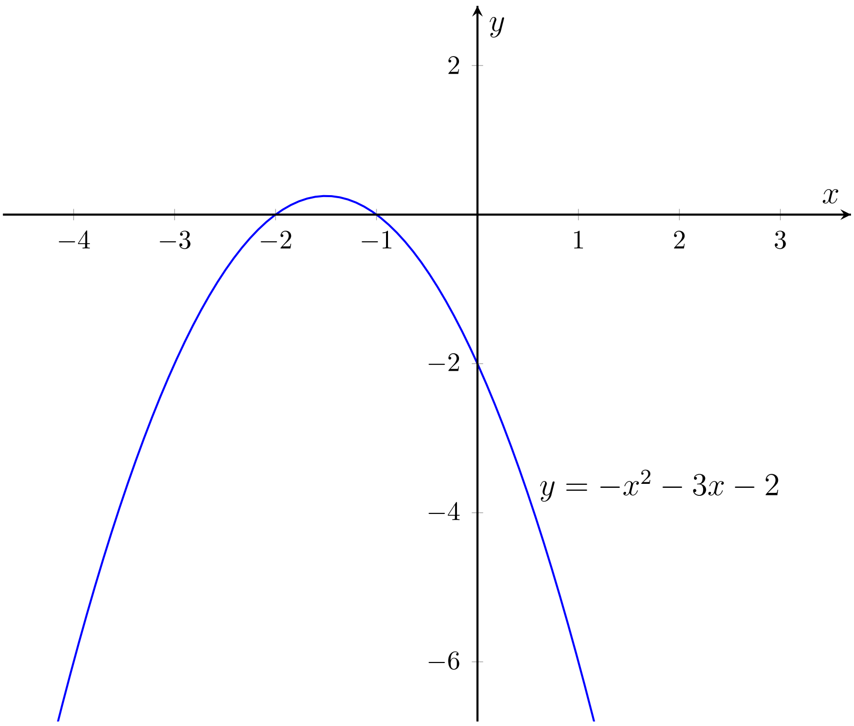
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = -\frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = -\frac{3+1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_2 = -\frac{3-1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$



Assim, o conjunto solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1\}$

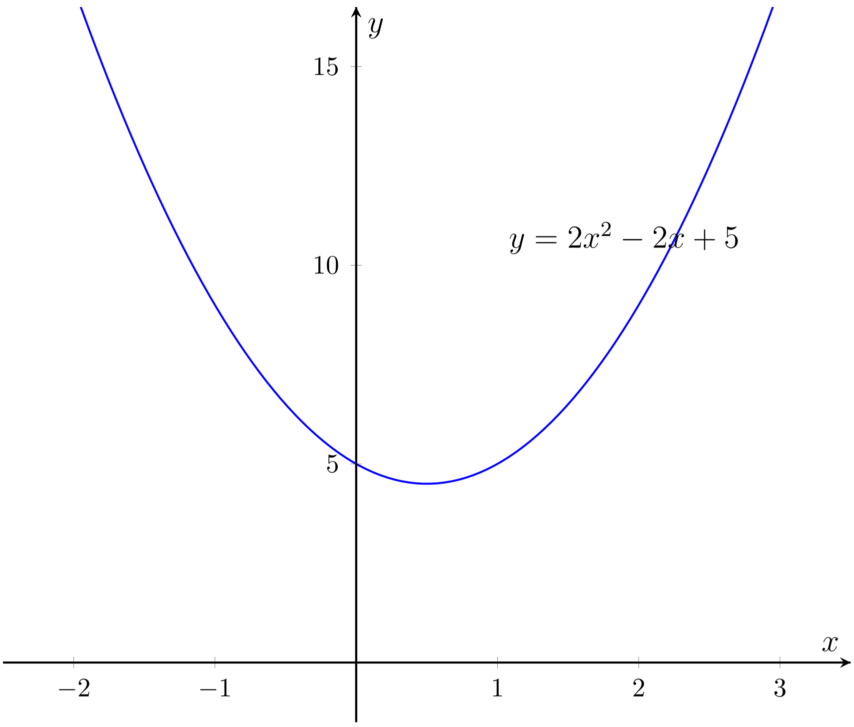
c) $2x^2 - 2x + 5 > 0$
Resolução:
Seja $a = 2, b = -2, c = 5$:
Encontrando o valor de Δ

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\Delta = 4 - 40$$

$$\Delta = -36 < 0 \longrightarrow (x_1 \text{ e } x_2 \notin \mathbb{R})$$



Assim, o conjunto solução é: $S = \mathbb{R}$

Sistemas de Inequações do 2º Grau
Existem sistemas de inequações que aparecem duas ou mais inequações do segundo grau.

A resolução deve ser feita da seguinte forma:

- Resolver cada inequação separadamente;
- Fazer a intersecção das soluções usando as retas dos intervalos;
- Dar a solução.

Exercício resolvido

Encontre o conjunto solução do seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \geq 0 & \text{Inequação (I)} \\ 3x - 6 > 0 & \text{Inequação (II)} \end{cases}$$

Resolvendo separadamente a inequação (I), temos:
$x^2 - 6x + 9 \geq 0$
Seja $a = 1, b = -6, c = 9$:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

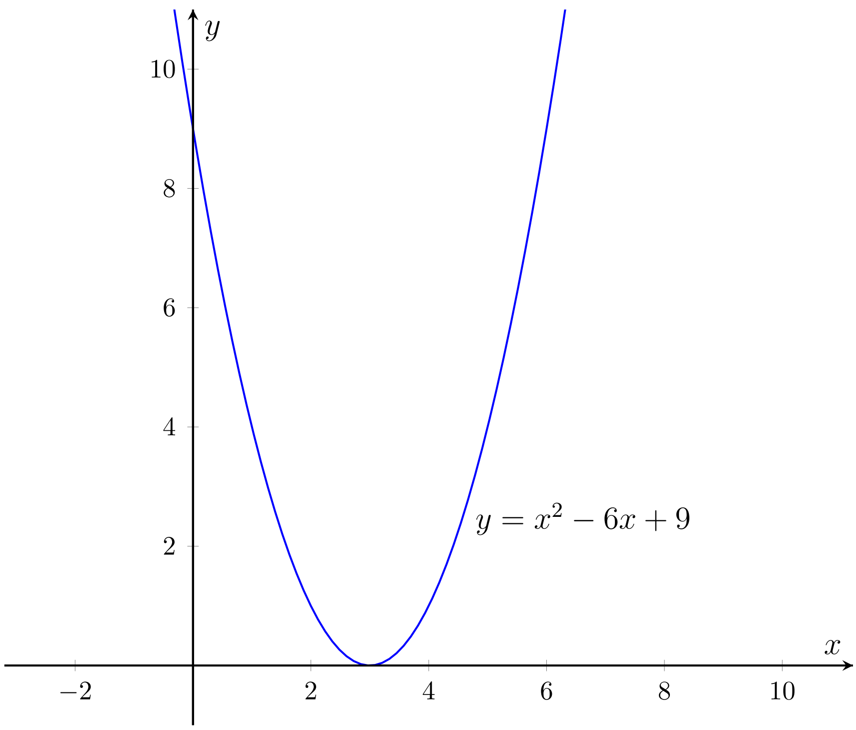
$$\Delta = 0 \longrightarrow (x_1 = x_2)$$

Calculando os valores das raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} \longrightarrow x_1 = x_2 = 3$$



O conjunto solução da Inequação (I) é: $S_1 = \mathbb{R}$

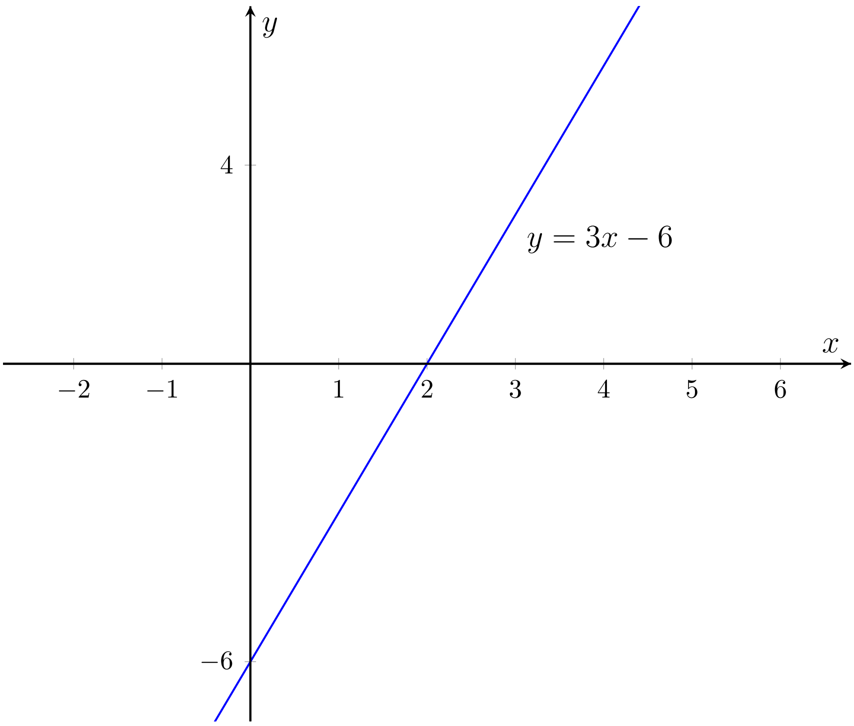
Resolvendo separadamente a inequação (II), temos:

$$3x - 6 > 0$$

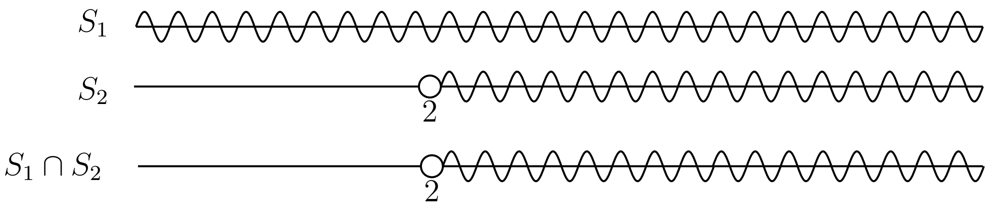
$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$



O conjunto solução da Inequação (II) é: $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.



Inequações Simultâneas

Uma inequação do 2º grau é simultânea quando aparecer duas desigualdades numa só sentença. Sua resolução deve ser feita da mesma maneira que em sistemas de inequações do 2º grau.

Exercício resolvido.

Encontre o conjunto solução da seguinte inequação:

$$3 < x^2 - 2x + 8 \leq 8$$

Decompondo em um sistema de inequações, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 8 \leq 8 \\ x^2 - 2x + 8 > 3 \end{cases}$$

Em seguida, são feitas algumas manipulações necessárias para facilitar a análise e obtemos o sistema abaixo

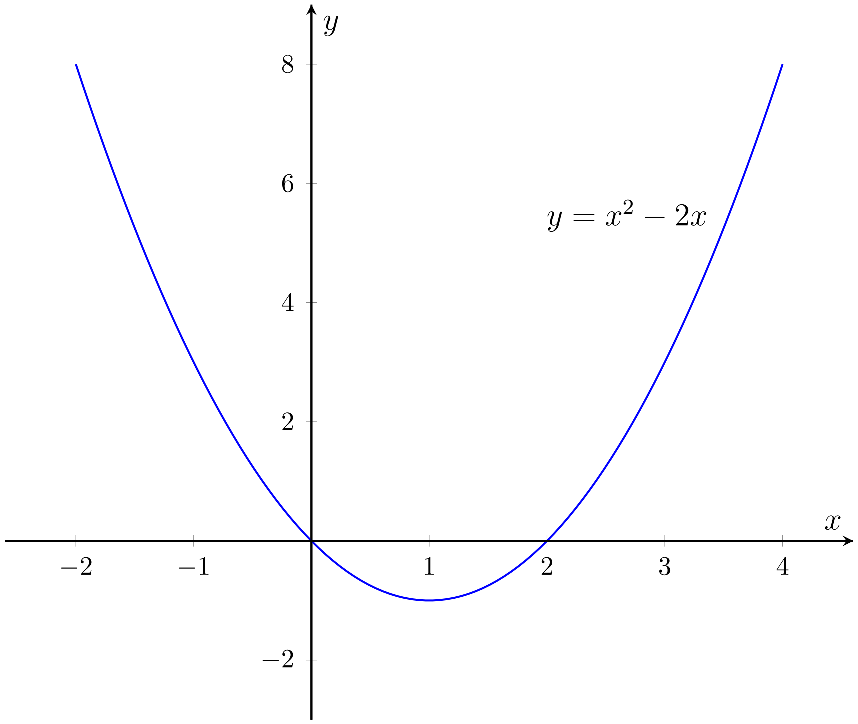
$$\begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 & \text{Inequação (I)} \\ x^2 - 2x + 5 > 0 & \text{Inequação (II)} \end{cases}$$

Resolvendo separadamente a inequação (I), temos:
$x^2 - 2x \leq 0$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(x-2) = 0$$

$$\text{Assim, } x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$

$$\text{Então, temos: } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2$$



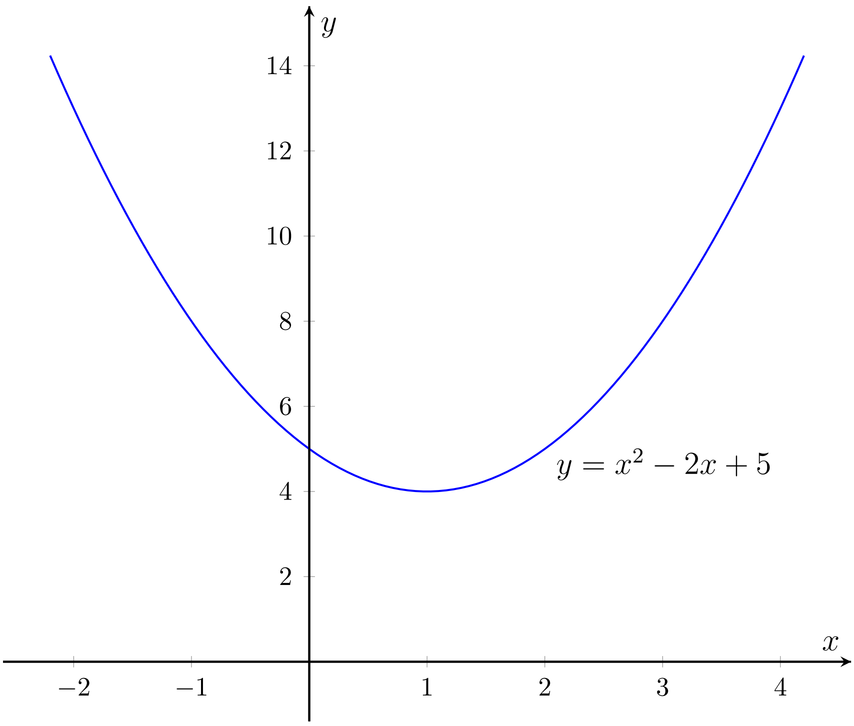
O conjunto solução da Inequação I é: $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

Resolvendo separadamente a inequação (II), temos:
$x^2 - 2x + 5 > 0$
Seja $a = 1, b = -2, c = 5$:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

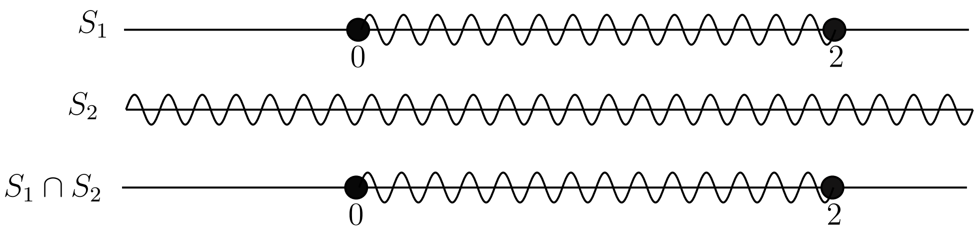
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta = -16 < 0 \longrightarrow (x_1 \text{ e } x_2 \notin \mathbb{R})$$



O conjunto solução da Inequação I é: $S_2 = \mathbb{R}$.

Assim:



Portanto, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$.

Inequação Produto e Inequação Quociente

Algumas inequações apresentam produtos de expressões, enquanto que algumas apresentam o quociente de expressões.

Nestes casos, deve-se:

- Fazer a análise de sinais de todas as expressões.
- Determinar a solução pela intersecção do estudo de sinais das expressões.

Uma observação importante na resolução da inequação quociente é que a expressão apresentada no denominador não pode ser igual a zero.

Exercícios resolvidos

1. Determinar o conjunto solução da inequação produto $(x^2 - 7x + 10)(6x + 12) \geq 0$.

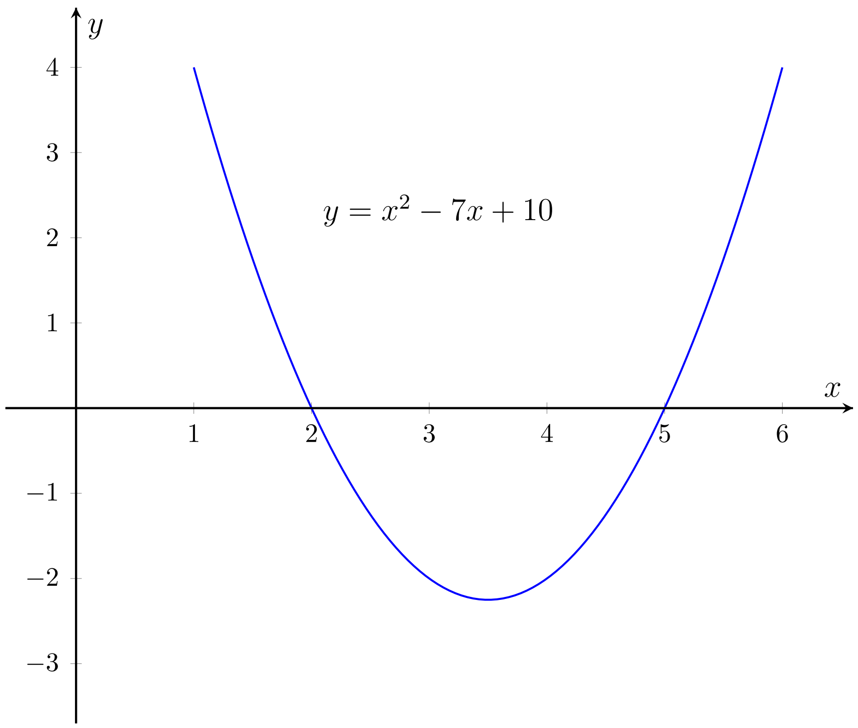
Resolução:

Igualando a primeira expressão à zero e resolvendo, temos:
$x^2 - 7x + 10 = 0$
Seja $a = 1, b = -7, c = 10$:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$$
$$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0 \longrightarrow (x_1 \neq x_2)$$

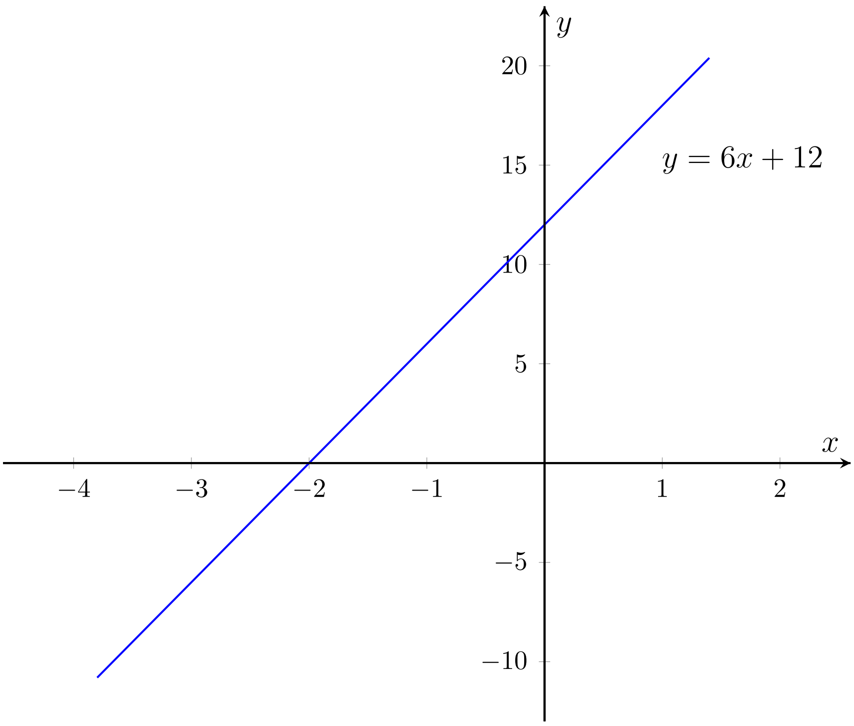
Calculando os valores das raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{7 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$
$$x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

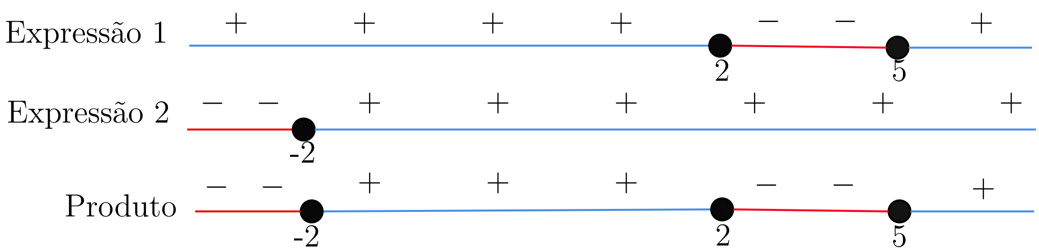


Igualando a segunda expressão à zero e resolvendo, temos:

$$6x + 12 = 0$$
$$6x = -12$$
$$x = \frac{-12}{6} = -2$$



Estudando os sinais das soluções, temos:



Portanto, o conjunto solução final da Inequação produto é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$$

2. Determinar o conjunto solução da inequação quociente $\dfrac{-x^2 + 4x - 3}{-x + 2} \geq 0$

Resolução:

Igualando a expressão do numerador à zero, temos:
$-x^2 + 4x - 3 = 0$
Seja $a = -1, b = 4, c = -3$:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \longrightarrow (x_1 \neq x_2)$$

Calculando os valores das raízes

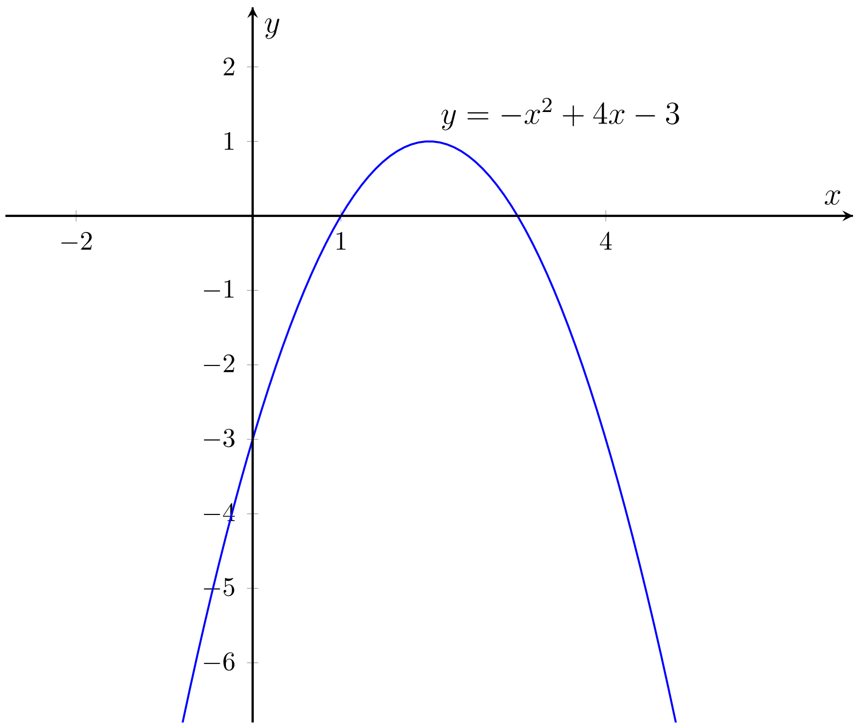
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

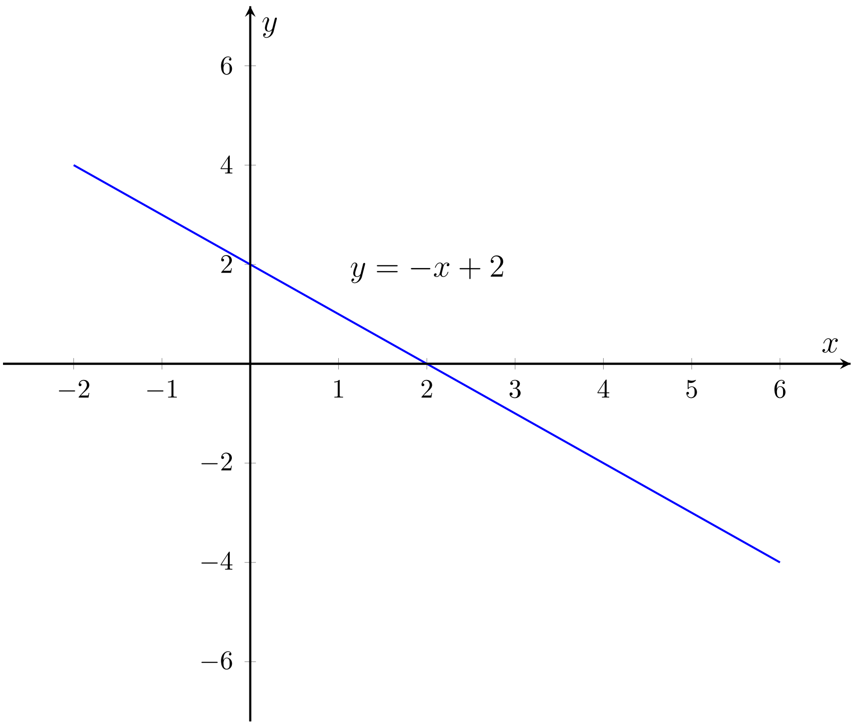


Igualando a expressão do denominador à zero, temos:

$$-x + 2 = 0$$

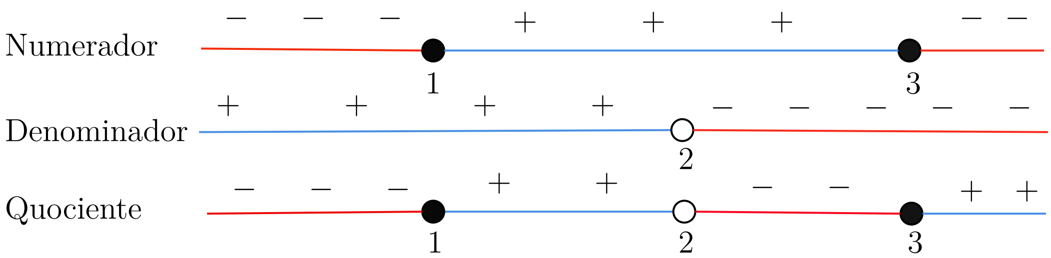
$$-x = -2$$

$$x = 2$$



Deve-se lembrar que a condição de existência da inequação é que $x \neq 2$.

Estudando os sinais das soluções, temos:



Portanto, o conjunto solução final da Inequação produto é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \text{ ou } x \geq 3\}$$

62

7

Equações Modulares

7.1 Módulo de um número real

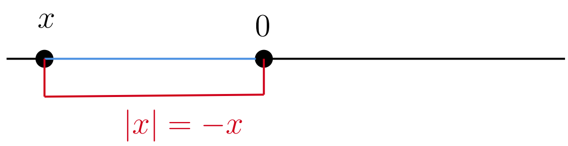
Definição: Seja x um número real. O módulo de x, denotado por $|x|$, é definido como:

Definição: Módulo de número real

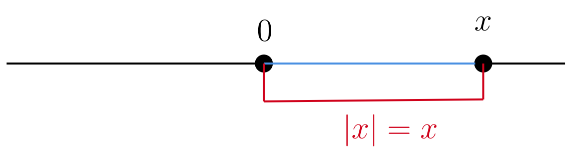
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Em uma representação geométrica, tem-se que:

Se $x \leq 0$ então:



Se $x \geq 0$ então:



Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 42

$|5| = 5$ $\quad$ $|-5| = 5$ $\quad$ $|0| = 0$ $\quad$ $|-0{,}2| = 0{,}2$ $\quad$ $|\sqrt{8}| = \sqrt{8}$

$|-\pi| = \pi$

Exercícios resolvidos.
Resolvendo as equações a baixo:

a) $|2x+1| = 5$

O primeiro passo para resolver a equação é descobrir em quais intervalos a expressão dentro do módulo tem valor positivo ou negativo.

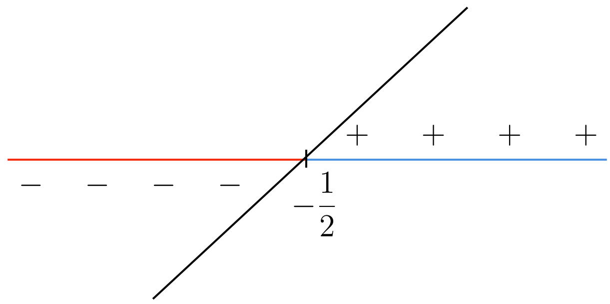
Para isso, é preciso encontrar a raiz (igualar a expressão a zero e isolar o x) e esboçar um gráfico:

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Como é uma equação do primeiro grau, e o número que acompanha o x é positivo (+2), o gráfico é uma reta crescente:



Ou seja, quando $x < -\frac{1}{2}$, o valor de $2x+1$ dentro do módulo é menor que zero, e quando $x \geq -\frac{1}{2}$, o valor de $2x+1$ dentro do módulo é maior ou igual a zero. Utilizando a definição de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Para $x < -\frac{1}{2}$:

$$|2x+1| = -(2x+1) = -2x - 1$$

Então:

$$|2x+1| = 5$$

$$-2x - 1 = 5$$

$$x = \frac{6}{(-2)}$$

$$x = -3$$

O -3 pertence ao intervalo que estamos analisando, pois $-3 < -1/2$, então $x = -3$ faz parte da solução.

Para $x \geq -\frac{1}{2}$:

$$|2x+1| = 2x + 1$$

Então:

$$|2x+1| = 5$$
$$2x+1 = 5$$
$$x = \frac{4}{(2)}$$
$$x = 2$$

O 2 faz parte do intervalo que estamos analisando, porque $2 \geq -1/2$, então $x = 2$ também faz parte da solução. Logo $S = \{-3{,}2\}$.

b) $|9x+2| = -3$

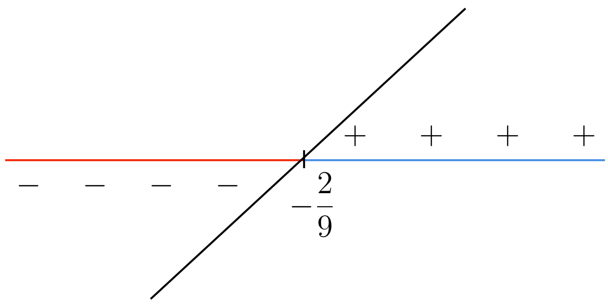
O primeiro passo para resolver a equação é descobrir em quais intervalos a expressão dentro do módulo tem valor positivo ou negativo.

$$|9x+2| = -3 \ \text{(inequação)} \quad \longrightarrow \quad 9x+2 = y \ \text{(equação)}$$

Para isso, é preciso encontrar a raiz (igualar a expressão a zero e isolar o x) e esboçar um gráfico:

$$9x+2 = 0$$
$$9x = -2$$
$$x = -\frac{2}{9}$$

Como é uma equação do primeiro grau, e o número que multiplica o x é positivo (+9), o gráfico é uma reta crescente:



Ou seja, quando $x < -\frac{2}{9}$, o valor de $9x+2$ dentro do módulo é menor que zero, e quando $x \geq -\frac{2}{9}$, o valor de $9x+2$ dentro do módulo é maior que ou igual a zero. Utilizando a definição de módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Para $x < -\frac{2}{9}$:

$$|9x+2| = -(9x+2) = -9x-2$$

Então:

$$|9x+2| = -3$$
$$-9x-2 = -3$$
$$x = \frac{-1}{-9}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

O $\frac{1}{9}$ não pertence ao intervalo que estamos analisando, porque $\frac{1}{9} > -\frac{2}{9}$. Assim $\frac{1}{9}$ também não faz parte da solução.

Para $x \geq -\frac{2}{9}$:

$$|9x + 2| = 9x + 2$$

Então:

$$|9x + 2| = -3$$

$$9x + 2 = -3$$

$$9x = -5$$

$$x = -\frac{5}{9}$$

O $-\frac{5}{9}$ não pertence ao intervalo que estamos analisando, porque $-5/9 < -2/9$. Assim, $-\frac{5}{9}$ também não faz parte da solução. Logo, $S = \emptyset$.

Proposições

Quaisquer que sejam os números reais a, b, x, tem-se:

1. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade Triangular)
4. Se $a > 0$, $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$
5. $|x| = \sqrt{x^2}$
6. $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$
7. $|a - b| \leq |a - x| + |x - b|$

Corolário 1
Dado um número real positivo a, qualquer que seja o número real x, temos:

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$$

Corolário 2
Dados $a, b, x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$$

Exemplo 43

$$|x| < 3$$

Como $3 > 0$, usa-se a Proposição 4:

Se $a > 0$, $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$

Assim: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

Exemplo 44

$$|2x - 5| < 3$$

Como $3 > 0$, usa-se a Proposição 4:

$$\text{Se } a > 0,\ |x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$$

Assim: $-3 < 2x - 5 < 3$

Duas inequações são definidas para facilitar a análise $\begin{cases} 2x - 5 < 3 \\ 2x - 5 > -3 \end{cases}$

Resolvendo-as tem-se:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &> -3 \\ 2x &> -3 + 5 \\ 2x &> 2 \\ x &> \frac{2}{2} \\ x &> 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x - 5 &< 3 \\ 2x &< 3 + 5 \\ 2x &< 8 \\ x &< 8/2 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

EXEMPLO 45

$$|6-2x| \geq 7$$

Usa-se o Corolário 1:

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$$

Assim: $6-2x \geq 7$ ou $6-2x \leq -7$

Duas inequações são definidas para facilitar a análise $\begin{cases} 6-2x \geq 7 \\ 6-2x \leq -7 \end{cases}$

Resolvendo-as tem-se:

$$\begin{aligned} 6-2x &\geq 7 \\ -2x &\geq 7-6 \\ -2x &\geq 1 \\ x &\leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6-2x &\leq -7 \\ -2x &\leq -7-6 \\ -2x &\leq -13 \\ 2x &\geq 13 \\ x &\geq \frac{2}{13} \end{aligned}$$

Logo $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{13} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

EXEMPLO 46

$$|x| > 4$$

Usa-se o Corolário 1:

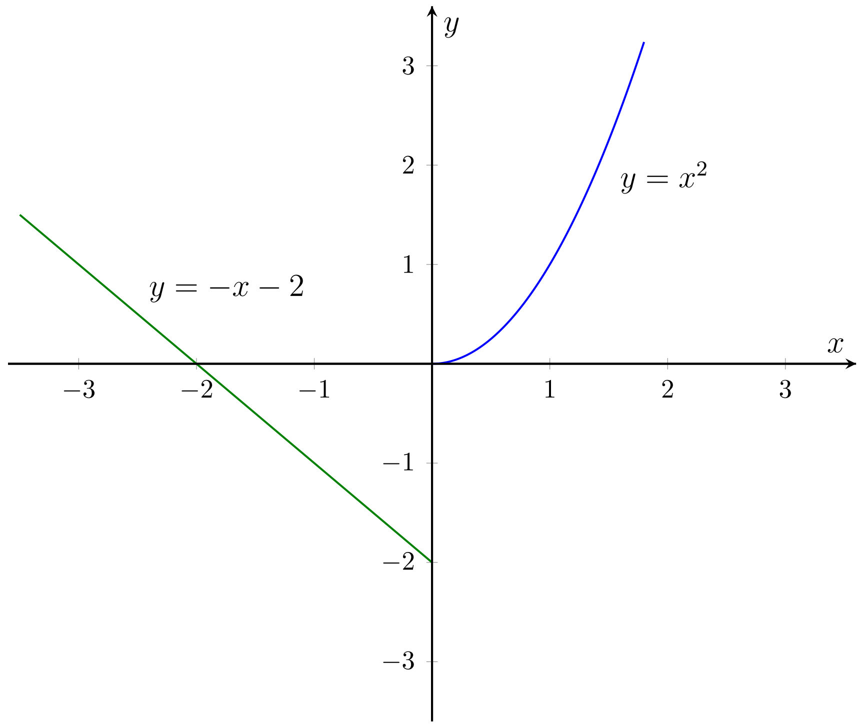
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$$

Assim: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } x < -4\}$

7.2 Função modular

Seja a função $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. O domínio dessa função é dada pelos números reais não negativos. Ao desenhar seus gráfico tem-se apenas um pedaço da parábola.
Agora considere a função $h : \mathbb{R}^*_- \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -x-2$. O domínio dessa função é formado pelos reais negativos. Ao desenhar o gráfico, tem-se apenas uma parte da reta.
As duas funções podem ser reunidas em uma única função da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x-2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Seja $g(x)$ uma função real. Define-se a função modular como sendo a função:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = |g(x)|$$

Observa-se que pela definição de módulo de um número real, tal número pode ser substituído por uma função definida por duas sentenças, da seguinte forma:

Definição: Função modular

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se} \quad g(x) \geq 0 \\ -g(x), & \text{se} \quad g(x) < 0 \end{cases}$$

Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 47

$f(x) = |x|$ $\quad$ $f(x) = |-x|$ $\quad$ $f(x) = |x^2 - 3x|$ $\quad$ $f(x) = |x + 3|$

$f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ $\quad$ $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$

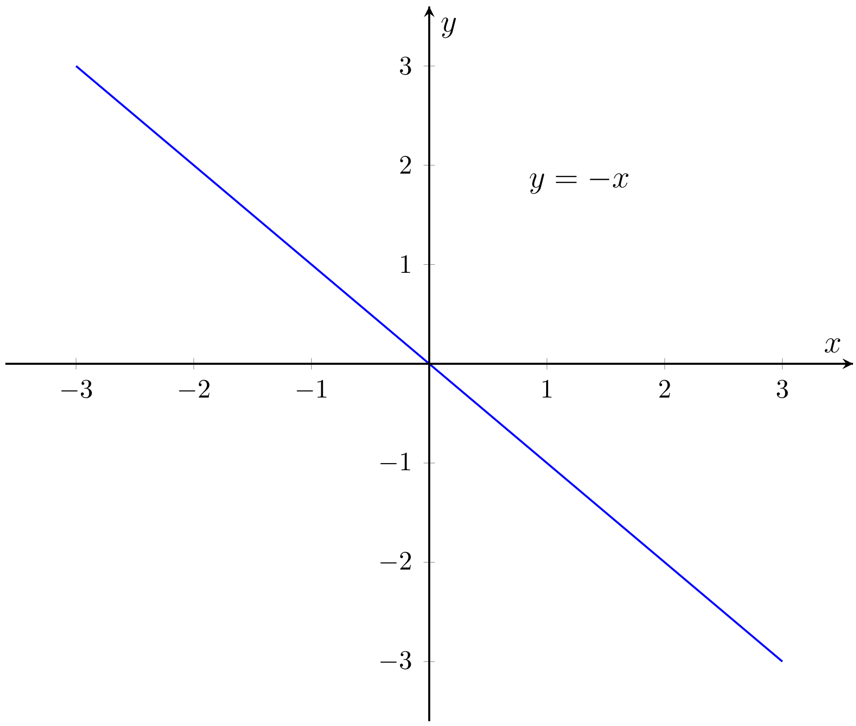
Gráficos de função modular

1. Esboçar o gráfico da função $f(x) = |-x|$.

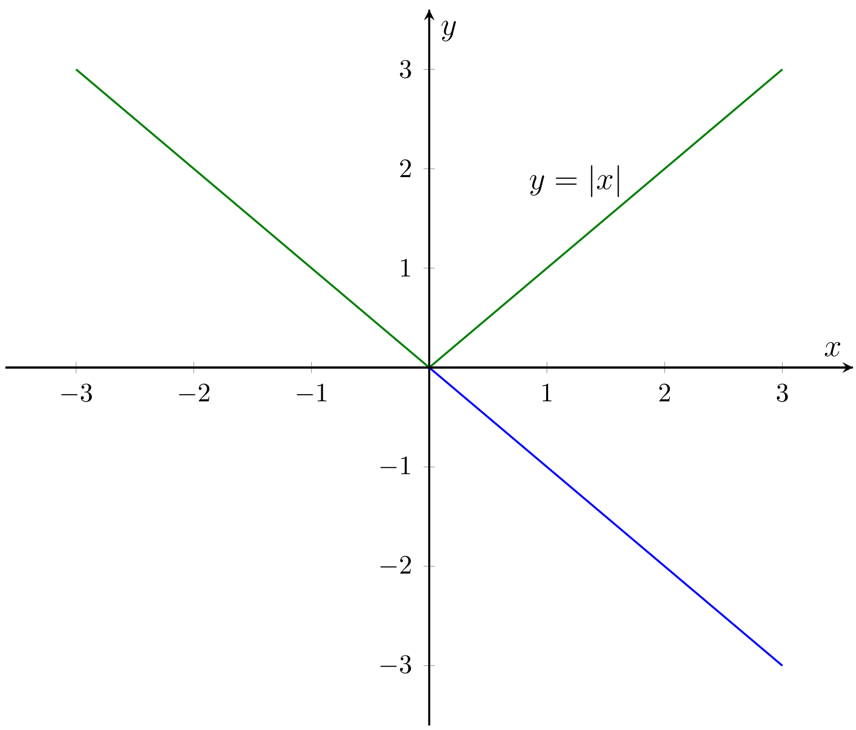
Para construir um gráfico de uma função modular, primeiramente, analisa-se o gráfico da função sem o módulo na sua lei de formação:

$$f(x) = |-x|$$

Faz-se, então, a construção do gráfico de $f(x) = -x$

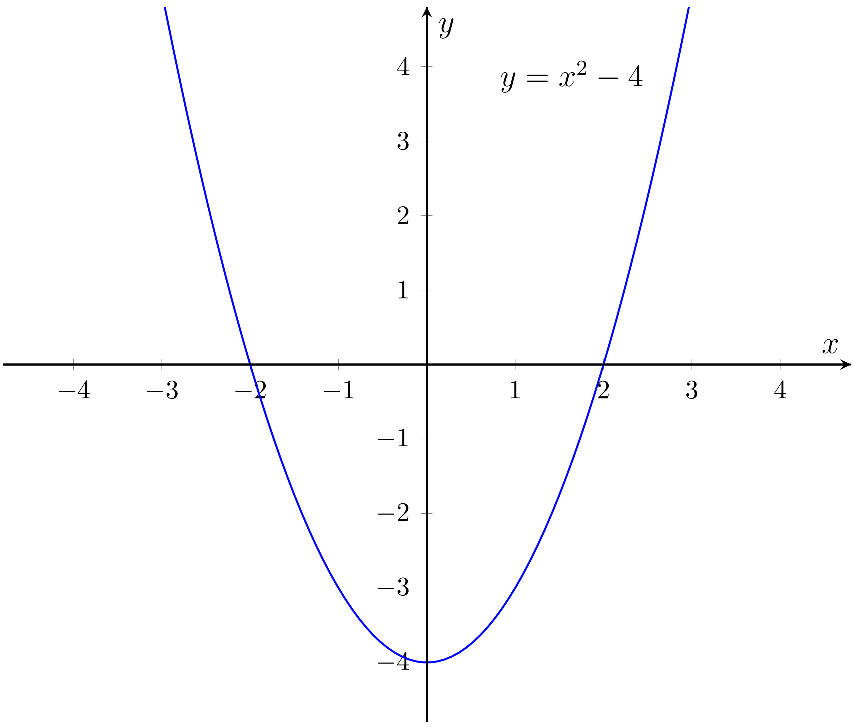


O módulo presente na lei de função faz com que a parte do gráfico que se localiza abaixo do eixo x "reflita" no momento em que toca o eixo x. Assim, a representação do gráfico de $f(x) = |-x|$ está em verde a seguir:

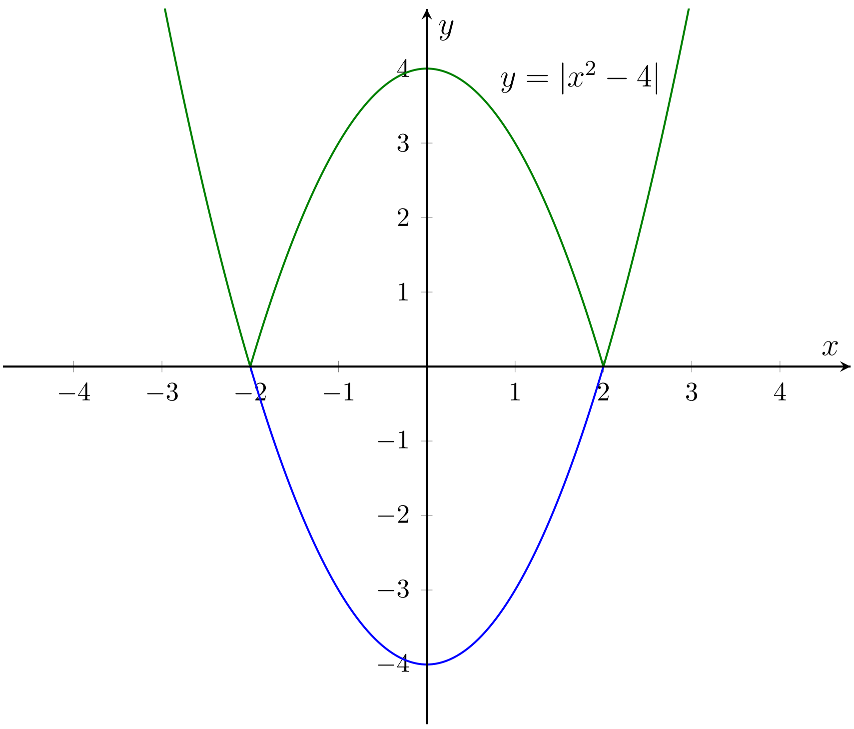


2. Esboçar o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4|$.

Primeiramente, faz-se o gráfico de $g(x) = x^2 - 4$



Assim, o gráfico de $f(x)$ é dado em verde a seguir:



7.3 Exercícios

1. (FUVEST) Seja $f(x) = |2x^2 - 1|, x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x para os quais $f(x) < 1$

2. Construa os gráficos das seguintes funções modulares:

a) $f(x) = |x^2 + 4x|$

b) $f(x) = |4 - x^2|$

c) $f(x) = |2x - 1|$

d) $f(x) = |x - 1|$

e) $f(x) = |2x + 3|$

3. Resolva a seguinte equação em $\mathbb{R} : |x - 2| = 2x + 1$

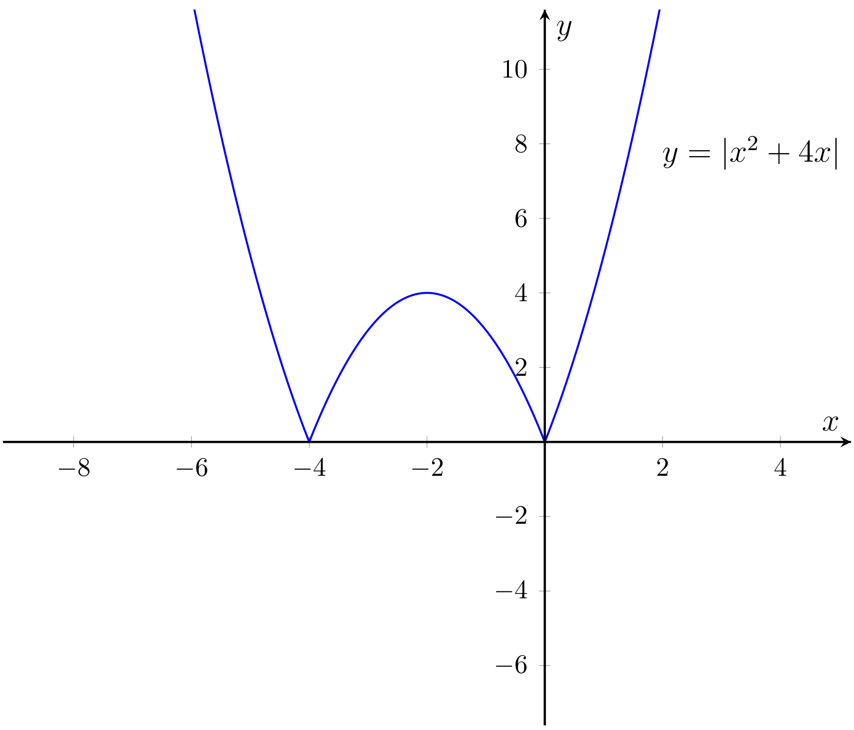
4. Resolva a seguinte inequação em $\mathbb{R} : |x - 1| \leq 3x - 7$

7.4 Respostas dos exercícios

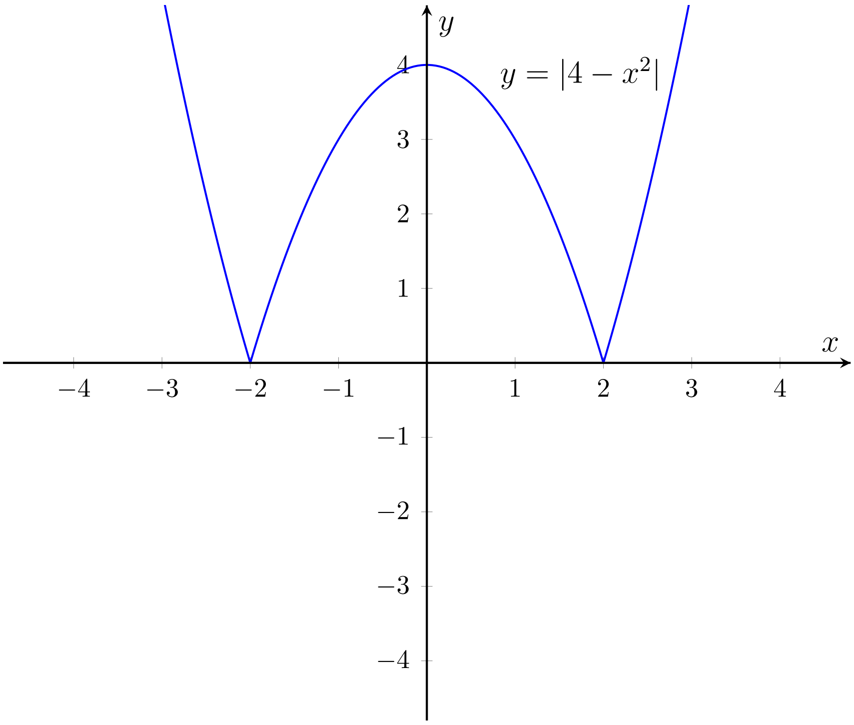
1. $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } o < x < 1\}$.

2. Construa os gráficos das seguintes funções modulares:

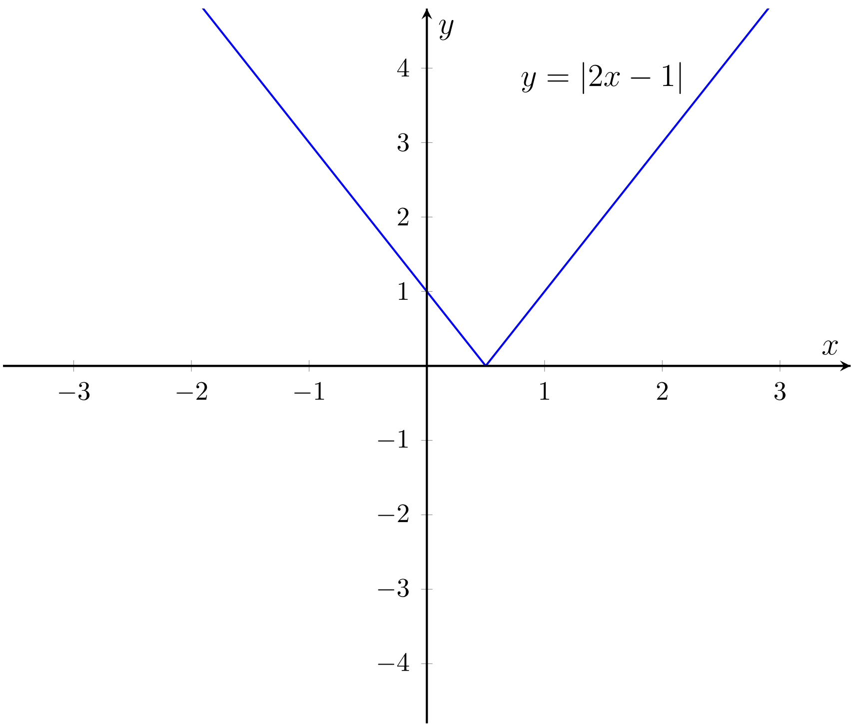
a)



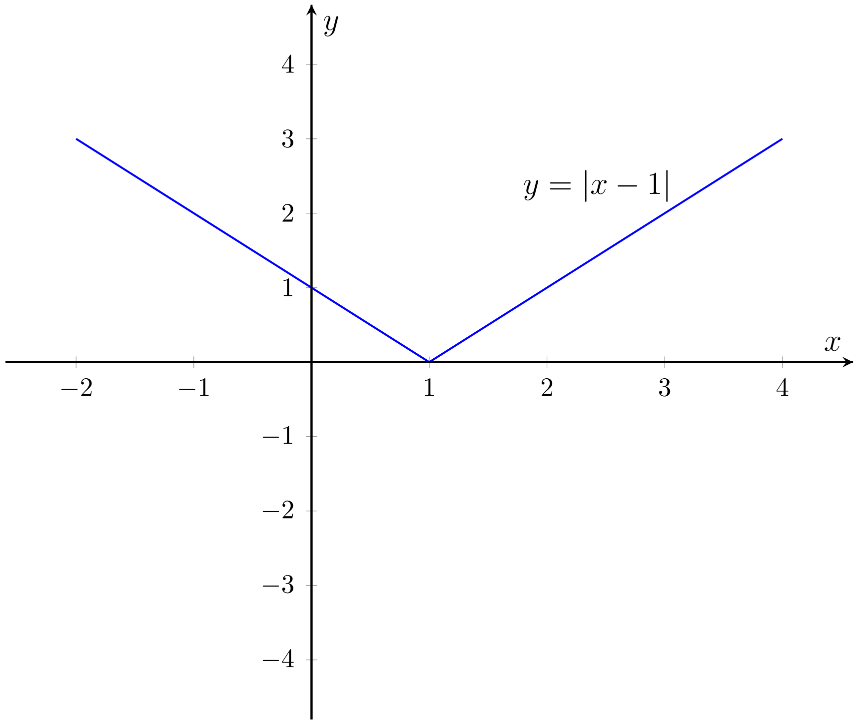
b)



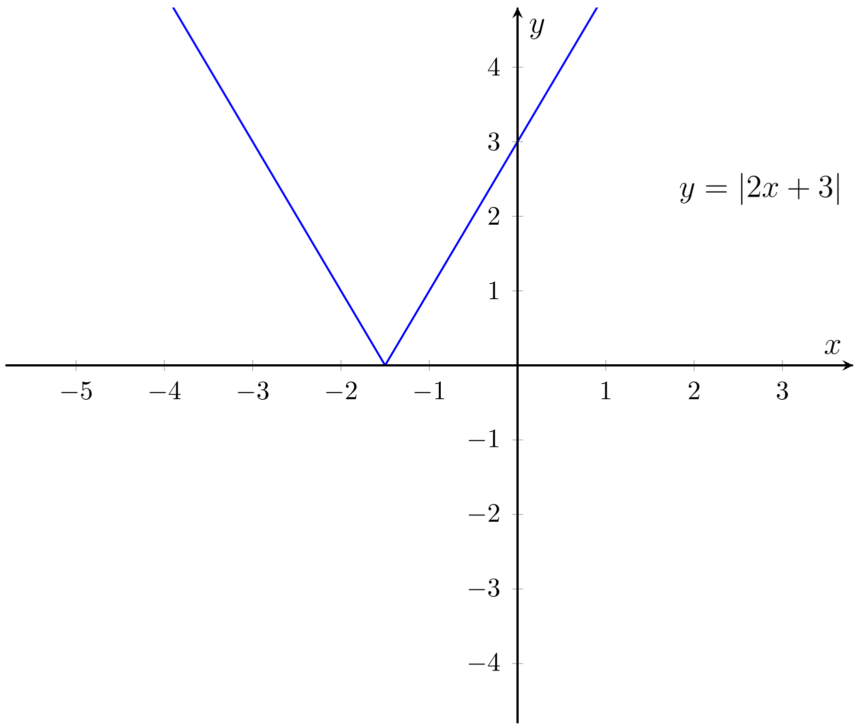
c)



d)



e)



3. $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

4. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

8 Trigonometria

8.1 Conceitos básicos

A trigonometria teve origem com o estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo. Posteriormente, o estudo foi estendido para outros "ambientes", como a circunferência trigonométrica. Com isso, as funções trigonométricas foram amplamente estudadas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Este material aborda os conceitos básicos de trigonometria, as funções trigonométricas e suas relações e transformações.

Hoje em dia a trigonometria não se limita estudar somente os triângulos. Encontramos aplicações da trigonometria em eletricidade, mecânica, acústica, música, engenharias e muitos outros campos de atividades.

8.1.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Se um triângulo possuir um de seus ângulos internos reto, então ele é chamado de triângulo retângulo. Na Figura 8.1, o triângulo ABC (ΔABC) é um triângulo retângulo com ângulo reto $\hat{A}$ e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

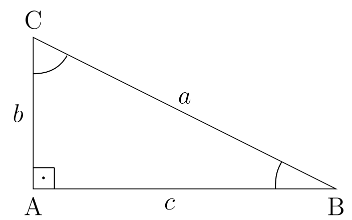


Figura 8.1: triângulo retângulo (ΔABC)

- O lado BC do ΔABC é chamado de hipotenusa e mede a
- O lado AC do ΔABC é chamado de cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$ mede b. Este mesmo lado é chamado de cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$
- O lado AB do ΔABC é chamado de cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$ e mede c. Este mesmo lado é chamado de cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

Tem-se, por definição, que:

Definição de seno

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\text{medida do cateto oposto à } \hat{B}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a} \tag{8.1}$$

Definição de cosseno

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{medida do cateto adjacente à } \hat{B}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a} \tag{8.2}$$

Definição de cosseno

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{\text{medida do cateto oposto à } \hat{B}}{\text{medida do cateto adjacente à } \hat{B}} = \frac{b}{c} \tag{8.3}$$

Três ângulos muito utilizados em problemas matemáticos envolvendo triângulos retângulos são os ângulos de 30°, 45° e 60°. Eles são chamados de ângulos notáveis. A partir do triângulo ABC e do quadrado ABCD ilustrados na Figura 8.2, é possível calcular o valor de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

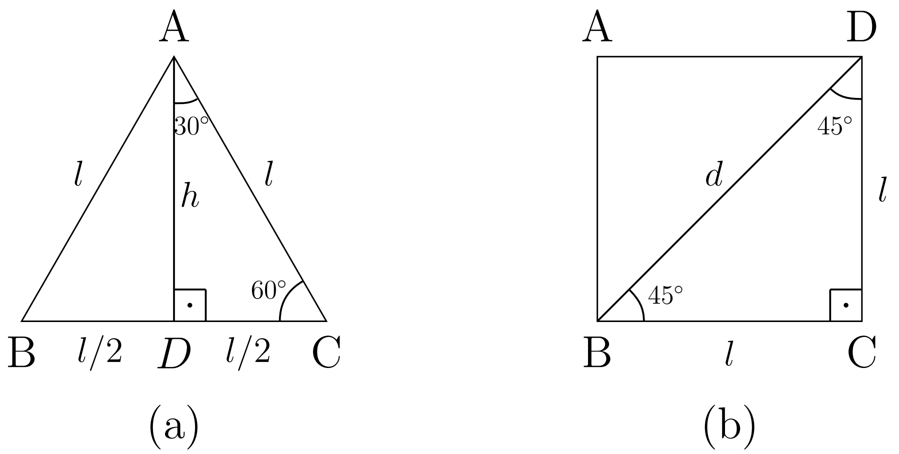


Figura 8.2: triângulo (a) e quadrado (b) utilizados para calcular o valor de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60° (ângulos notáveis).

É possível calcular o seno de 30° utilizando a fórmula do seno apresentada na equação 8.1:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

Antes de calcular o cosseno e a tangente de 30°, é necessário calcular a altura h do ΔABC. Para isso, usa-se o teorema de Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Em seguida, é possível calcular o cosseno e a tangente de 30° através das equações 8.2 e 8.3, respectivamente:

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{3}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Procedimento análogo pode ser realizado para calcular os valores de seno, cosseno e tangente de 45°, considerando o quadrado ABCD, e 60°, considerando o triângulo ABC. A Tabela 8.1 apresenta os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

Tabela 8.1: Valores de seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis.

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

8.1.2 Lei dos senos e lei dos cossenos

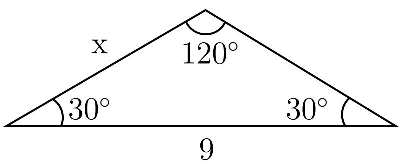
A lei dos senos e a lei dos cossenos são resultados importantes da trigonometria para estabelecer relações que auxiliam no cálculo dos ângulos e dos lados de triângulos quaisquer (triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos).

Lei dos senos: Em qualquer triângulo ABC (triângulo retângulo ou não), as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Exercício Resolvido

Em um triângulo isósceles, tem-se a base medindo 9 cm e o ângulo oposto a base medindo 120°. Calcule a medida dos lados congruentes do triângulo.



Pela lei dos senos, temo:

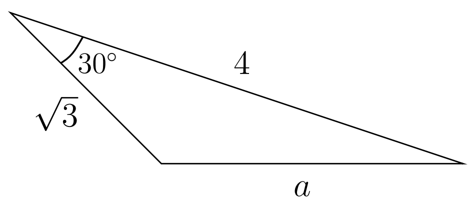
$$\frac{9}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}\text{cm}$$

Lei dos cossenos: Em qualquer triângulo ABC (triângulo retângulo ou não), o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Exercício resolvido

Determine a medida de a no triângulo ilustrado na figura a seguir.



Resolução:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} = 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° = 16 + 3 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{7}$$

8.1.3 Arcos e ângulos

Algumas definições para o estudo de trigonometria na circunferência são fornecidas a seguir.

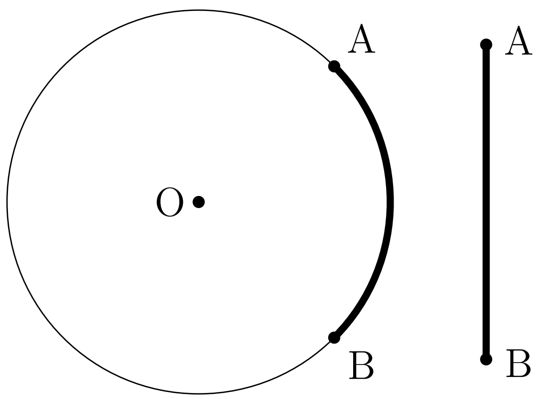


Figura 8.3: O arco $\widehat{AB}$ e comprimento desse arco dado pela medida algébrica do segmento $\overline{AB}$.

Arco geométrico: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os.

Comprimento de um arco: é o comprimento do segmento de reta que se obtém ao "desentortar" (ou retificar) o arco. Conhecendo o raio da circunferência e a medida em graus do arco, o comprimento do arco pode ser calculado através de uma regra de três simples:

$$\begin{array}{rcl} \text{Graus} & & \text{Comprimento do arco} \\ 360 & \text{——} & 2\pi r \\ \alpha & \text{——} & x \end{array}$$

Nesse caso, o comprimento x é expresso na mesma unidade do raio da circunferência. Em uma circunferência de raio $r = 1$, a regra de três acima é simplificada da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \text{Graus} & & \text{Comprimento do arco} \\ 180 & \text{——} & \pi \\ \alpha & \text{——} & x \end{array}$$

Medida em radianos: Observe na Figura 8.4 que os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{EF}$ têm a mesma medida em graus, porém têm comprimentos diferentes. Utilizando a regra de três acima, tem-se que:

$$x_1 = \frac{\pi r_1}{6} \quad x_2 = \frac{\pi r_2}{6} \quad x_3 = \frac{\pi r_3}{6}$$

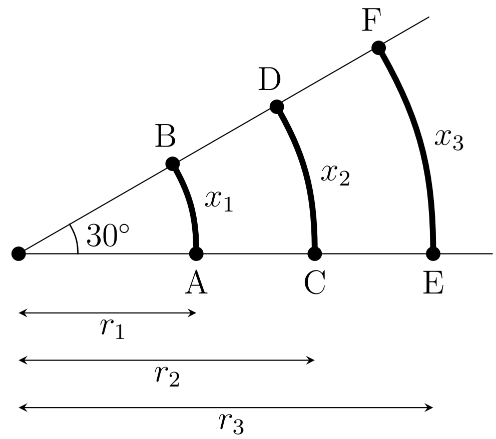


Figura 8.4: Arco com raios diferentes.

Note que $\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \frac{x_3}{r_3} = \frac{\pi}{6}$. A razão entre o comprimento do arco e o raio, que nesse exemplo é $\frac{\pi}{6}$, é a **medida em radianos** do arco (e também do ângulo central).

8.1.4 Circunferência trigonométrica

Passa-se a utilizar a circunferência unitária (ou circunferência trigonométrica), uma circunferência com raio igual a 1 unidade de comprimento associada a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais rOs, conforme a Figura 8.5 (a). Os pontos A,B,C e D, intersecções da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados, dividem a circunferência em quatro partes congruentes denominadas **quadrantes**.

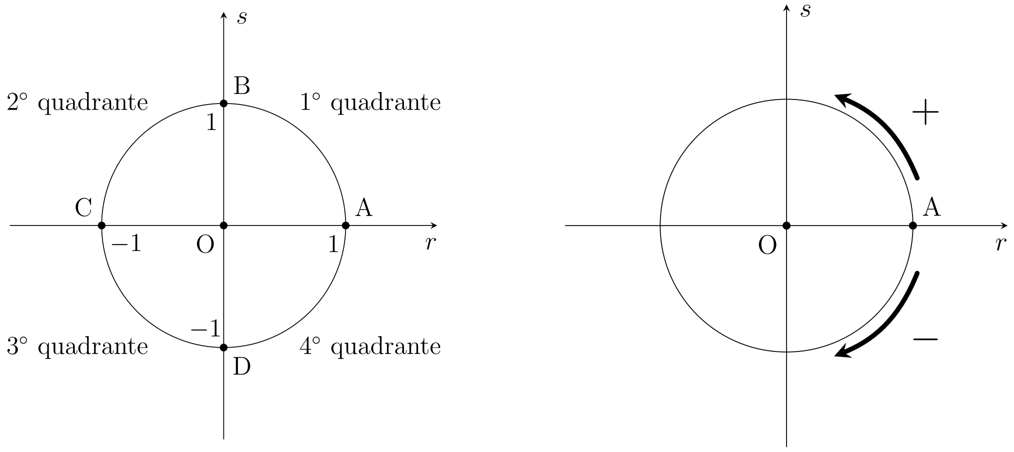


Figura 8.5: Circunferência trigonométrica e seus quadrantes (a); sentidos da circunferência trigonométrica (b).

Podemos associar a cada número real x um ponto da circunferência trigonométrica. Ao número $x = 0$, associamos o ponto A. Se $x \neq 0$, associamos a x o ponto final P do seguinte percurso de comprimento igual a $|x|$ realizado sobre a circunferência partindo de A, de acordo com a Figura 8.5 (b):

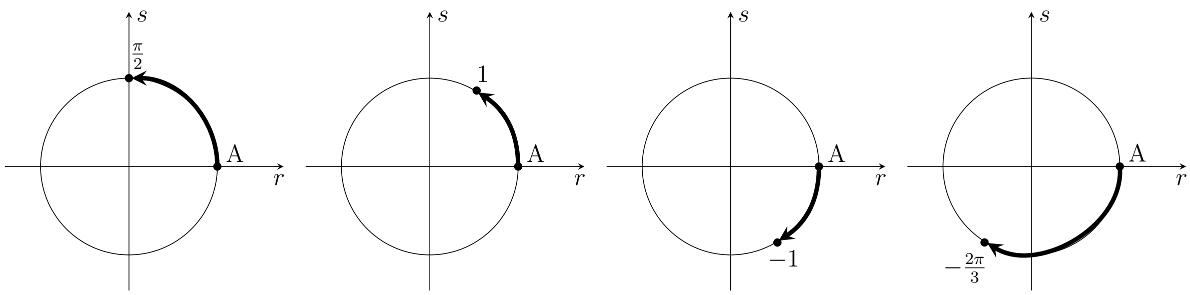
- Se $x > 0$, percorremos a circunferência trigonométrica no sentido anti-horário;
- Se $x < 0$, percorremos a circunferência trigonométrica no sentido horário.

O ponto P associado à x é denominado **imagem de** x na circunferência trigonométrica e o arco $\overset{\frown}{AP}$ tem x rad.

Exercício Resolvido: Marcar na circunferência trigonométrica a imagem do número x em cada caso:

a) $x = \dfrac{\pi}{2}$ b) $x = 1$ c) $x = -1$ d) $x = -\dfrac{2\pi}{3}$

Resolução:



Se o ponto da circunferência, final do arco iniciado em (1,0), é o mesmo para dois arcos diferentes, então chamamos estes arcos de **arcos côngruos** (ou congruentes). Observe que todos os arcos côngruos diferem si de um múltiplo de 2π rad (ou 360°), que é o comprimento de cada volta. Dessa forma, os arcos $(x + k \cdot 2\pi)$ rad (ou $\alpha + k \cdot 360°$), para $k \in \mathbb{Z}$, são côngruos.

Exercício Resolvido: Dentre os arcos abaixo, identifique os côngruos:

a) 30° e 330° b) $\dfrac{\pi}{3}$rad e $\dfrac{31\pi}{3}$rad

Resolução:

a) Encontrar $k \in \mathbb{Z}$, tal que $30 + k \cdot 360° = 330° \Rightarrow k = \frac{5}{6} \notin Z \Rightarrow 30°$ e $330°$ não são côngruos.

b) Encontrar $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{31\pi}{3} \Rightarrow k = 5 \in Z \Rightarrow \frac{\pi}{3}$rad e $\frac{31\pi}{3}$rad são côngruos.

8.1.5 Seno e cosseno na circunferência trigonométrica

Dado $x \in \mathbb{R}$ com imagem de x na circunferência trigonométrica sendo um ponto com coordenadas (a,b), definimos:

Definição: Seno e cosseno

$$\cos x = a \text{ e } \operatorname{sen} x = b$$

Dessa forma, passa-se a chamar o eixo das abscissas de **eixo dos cossenos** e o eixo das ordenadas de **eixo dos senos**, conforme a Figura 8.6.

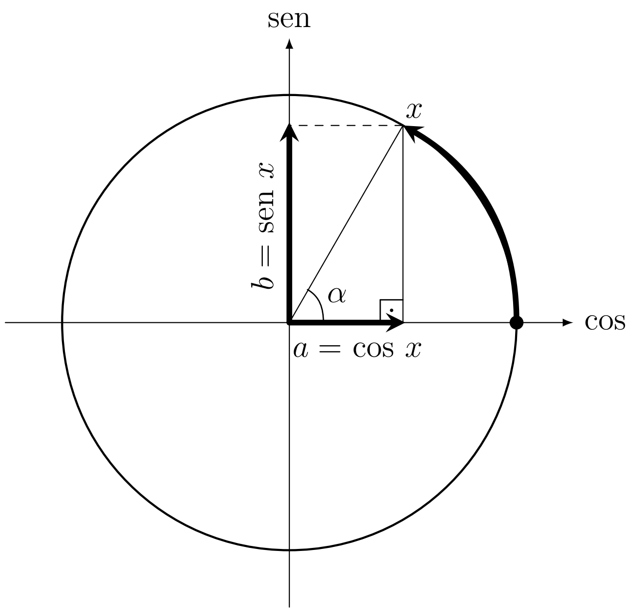


Figura 8.6: Circunferência trigonométrica e sua relação com seno e cosseno de um número real x.

Nota-se que as definições de seno e cosseno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo são coerentes com as definições na circunferência trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{1} = b = \operatorname{sen} x$$

$$\cos \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{a}{1} = a = \cos x$$

Os valores de seno e cosseno das medidas de arcos dadas em graus são iguais aos valores de seno e cosseno dos números reais que se obtêm transformando essas medidas em radianos.

Além disso, utilizando propriedades de simetria em relação aos eixos coordenados, obtém-se os arcos e seus correspondentes valores de seno e cosseno, conforme a circunferência trigonométrica apresentada na Figura 8.7.

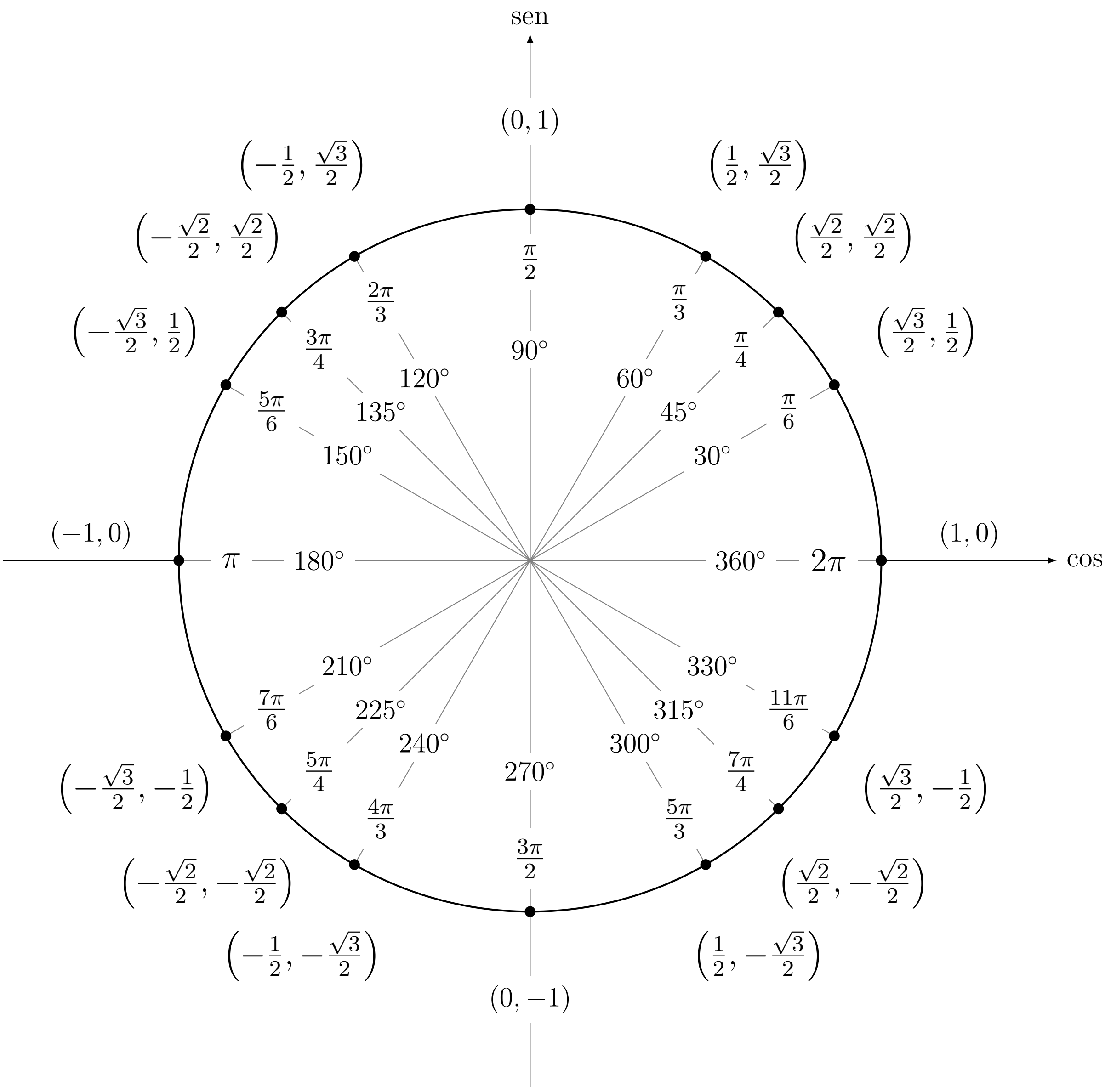


Figura 8.7: Circunferência trigonométrica com os principais arcos (em graus e em radianos) e seus correspondentes valores de seno e cosseno apresentados em pares de coordenadas.

Nota-se que dois arcos côngruos possuem senos iguais e cossenos iguais. Em outras palavras, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

Exercício resolvido

Calcule o valor da expressão

$$\frac{\cos\dfrac{7\pi}{6} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}}{\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\dfrac{19\pi}{3}}$$

Resolução:

$$\frac{\cos\dfrac{7\pi}{6} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}}{\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\dfrac{19\pi}{3}} = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}} = \frac{-2\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$$

Tangente na circunferência trigonométrica

Pelo ponto A, origem da circunferência trigonométrica, a reta t paralela ao eixo dos senos é traçada e orientada no mesmo sentido dele. Dado um número real x com imagem no ponto P da circunferência trigonométrica, tal que a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intercepta o eixo das tangentes no ponto T, define-se $\operatorname{tg} x$ a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$, que será positiva quando T estiver "acima" de A, e negativa quando T estiver "abaixo" de A. Dessa forma, passa-se a chamar a reta t de **eixo das tangentes**, conforme a Figura 8.8.

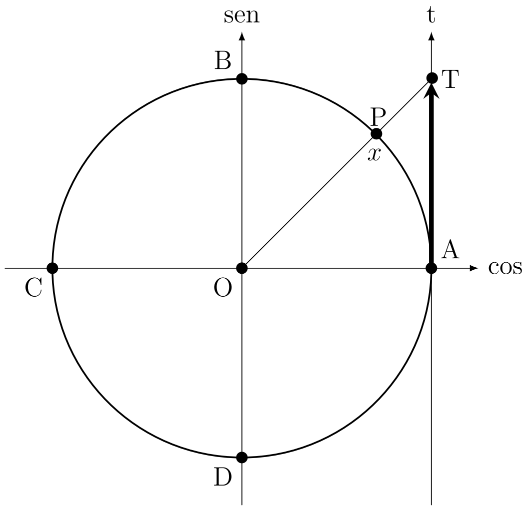


Figura 8.8: Circunferência trigonométrica com o eixo das tangentes.

Observe que, quando $P = B$ ou $P = D$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes e, portanto, não existe o ponto T. Nesse caso, não existe $\operatorname{tg} x$. Então,

$$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \exists \operatorname{tg} x$$

8.2 Funções trigonométricas

A seguir, os conceitos visto até aqui serão formalizados sob o ponto de vista de funções matemáticas.

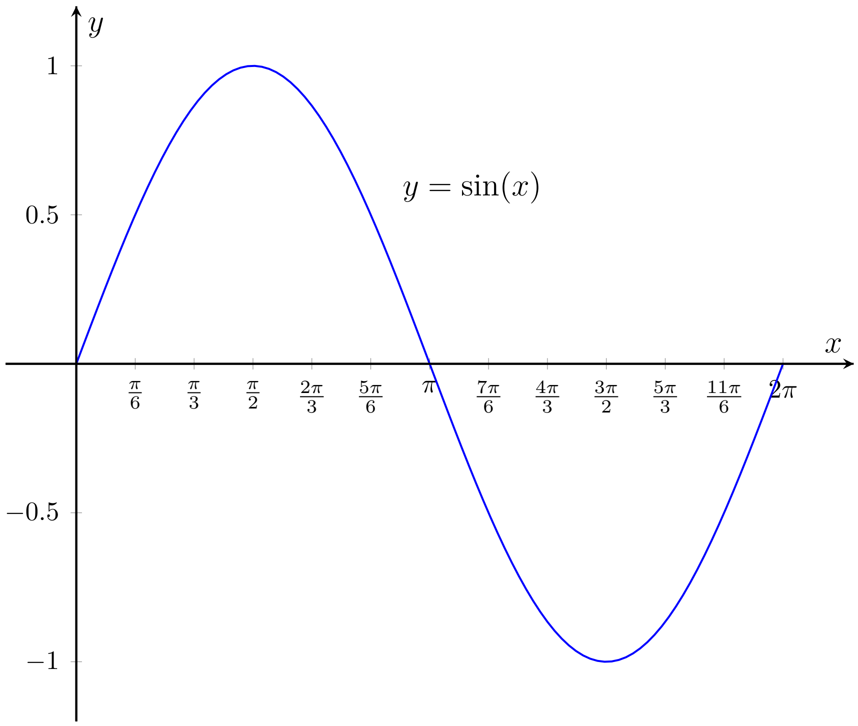
8.2.1 Estudo da função seno

Dado um número real x, associa-se a ele o valor do seno de um arco de x radianos. Assim, define-se a função seno como a função real de variável real que associa a cada número real x o valor real $\operatorname{sen} x$, ou seja,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \operatorname{sen} x \end{array}$$

A partir de valores de x da primeira volta positiva na circunferência trigonométrica (esses valores foram apresentados anteriormente na Figura 8.7), constrói-se o gráfico da função seno apresentado abaixo.

Gráfico da função seno para $x \in [0,2\pi]$.



Nota-se que a função seno é definida no conjunto dos números reais. Assim, a curva pode ser estendida para valores de x menores do que 0 e maiores do que 2π.

Observações sobre a função seno:

- O domínio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $D(f) = \mathbb{R}$, pois para qualquer valor real de x existe um e, somente um, valor para $\operatorname{sen} x$.
- O conjunto imagem de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é o intervalo $[-1,1]$.
- A função seno não é sobrejetiva, pois sua imagem não é igual ao contradomínio, isto é, $Im(f) = [-1,1] \neq \mathbb{R} = CD(f)$.
- A função seno não é injetiva, pois, para valores diferentes de x, temos o mesmo $f(x)$.
- A função seno é uma função ímpar, isto é, qualquer que seja $x \in D(f) = \mathbb{R}$, tem-se que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$.

- A função seno é periódica com período igual à 2π, isto é, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{R}ex \in \mathbb{R}$.

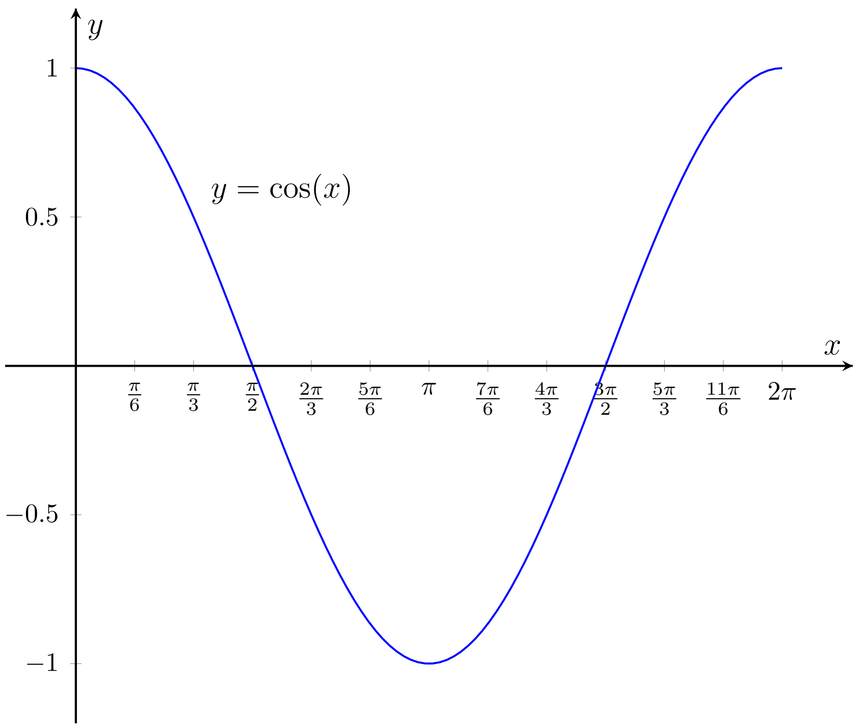
8.2.2 Estudo da função cosseno

Dado um número real x, associa-se a ele o valor do cosseno de um arco de x radianos. Assim, a função cosseno é definida como a função real de variável real que associa a cada número real x o valor real $\cos x$, ou seja,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

A partir de valores de x da primeira volta positiva na circunferência trigonométrica (esses valores foram apresentados anteriormente na Figura 8.7), constrói-se o gráfico da função cosseno apresentado abaixo.

Gráfico da função cosseno para $x \in [0,2\pi]$.



Similarmente à função seno, a curva da função cosseno pode ser estendida para valores de x menores do que 0 e maiores do que 2π.

Observações sobre a função cosseno:

- O domínio e a imagem da função cosseno são os mesmos da função seno.
- Assim como a função seno, a função cosseno não é nem sobrejetiva nem injetiva.
- A função cosseno é uma função par, isto é, qualquer que seja $x \in \mathrm{D}(f)$, temos que $\cos x = \cos(-x)$.
- A função cosseno é periódica com período igual à 2π.

8.2.3 Estudo da função tangente

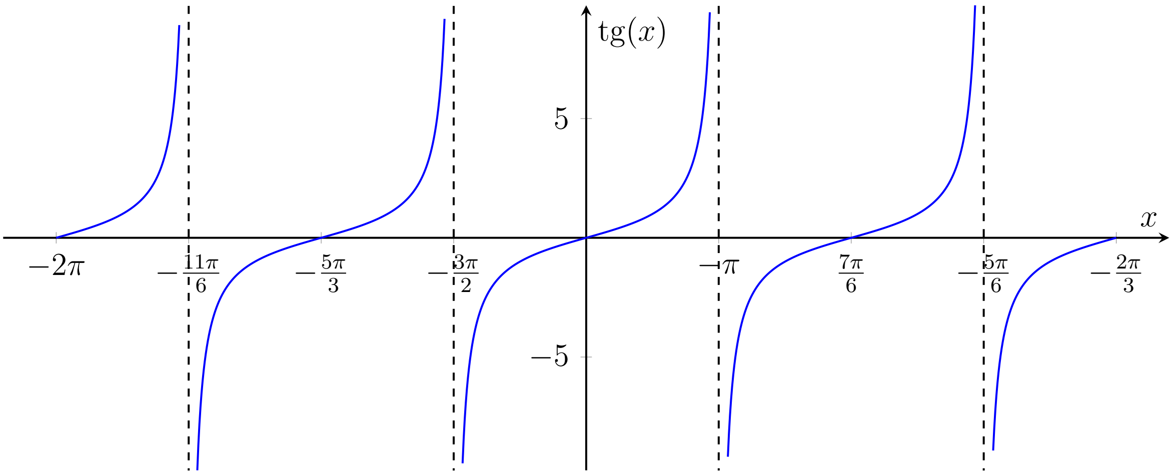
Define-se função tangente como a função real de variável real que associa a cada número x o valor $\operatorname{tg} x$, desde que x não seja $\frac{\pi}{2}$ nem $\frac{3\pi}{2}$ e nenhum de seus respectivos arcos côngruos, isto é,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \operatorname{tg} x \end{array}$$

em que $\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z} \right\}$

A partir de valores de x da primeira volta positiva na circunferência trigonométrica (esses valores foram apresentados anteriormente na Figura 8.7), constrói-se o gráfico da função tangente apresentado abaixo.

Gráfico da função tangente para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.



Nota-se que à medida que x tende aos valores $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e seus respectivos arcos côngruos, o gráfico da tangente tende ao infinito (positivo ou negativo). A curva da função tangente pode ser estendida para valores de x menores do que 0 e maiores do que 2π.

Observações sobre a função tangente:

- A função tangente tem $\mathrm{D}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z} \right\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- A função tangente não é injetiva, mas é sobrejetiva.
- A função tangente é função ímpar, isto é, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x), \forall x \in \mathrm{D}(f)$.
- A função tangente é periódica com período igual à π, isto é, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathrm{D}(f)$.

8.3 Relações e transformações trigonométricas

As relações e transformações trigonométricas são apresentadas a seguir.

Relações trigonométricas

Relações principais:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \forall x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \forall x \neq k\pi$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \forall x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

$\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}, \forall x \neq k\pi$

Relações decorrentes:

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}, \forall x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \forall x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

$\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x, \forall x \neq k\pi$

Soma de diferença de arcos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \cos b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 + tga \cdot \operatorname{tg} b}$$

Divisão de arcos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Multiplicação de arcos

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Transformação em produtos

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \operatorname{sen} q = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

EXEMPLO 48

Seja $\operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Calcule $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$.

Resolução:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos x = \begin{cases} \frac{-\sqrt{21}}{5} \\ \frac{+\sqrt{21}}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ e } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

EXEMPLO 49

Calcule valor da expressão $\operatorname{sen} 105° - \cos 75°$

Resolução:

$$\Rightarrow 105° = 60° + 45° \text{ e } 75° = 30° + 45°$$

$$\operatorname{sen} 105° - \cos 75° = \operatorname{sen}(60° + 45°) - \cos(30° + 45°) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \left[\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right] =$$

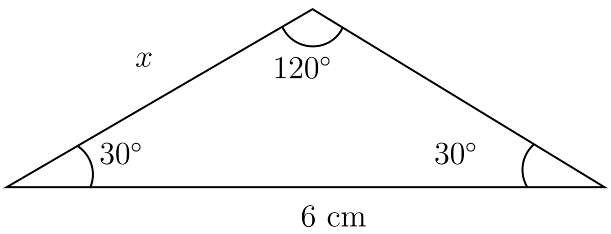
$$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

8.4 Exercícios

1. Calcular seno, cosseno e tangente dos ângulos de 45° e 60°, conferindo os resultados com os valores da Tabela de ângulos notáveis.

2. Esboce a circunferência trigonométrica, indicando os principais arcos em radiano e seus correspondentes valores de seno e cosseno.

3. O triângulo isósceles é um tipo de triângulo que possui dois lados iguais e, consequentemente, dois ângulos iguais formados com a base. Observe a figura abaixo e determine a medida dos lados congruentes deste triângulo.



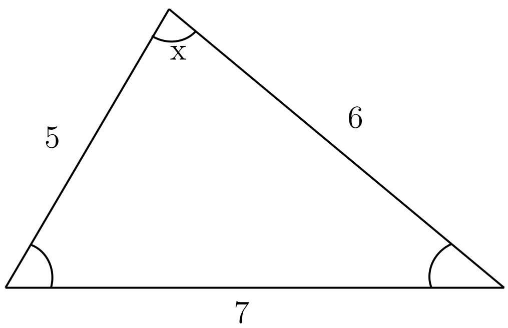
4. Determine os possíveis valores de m para que exista x em cada caso:

   (a) $\operatorname{sen} x = 3m + 8$

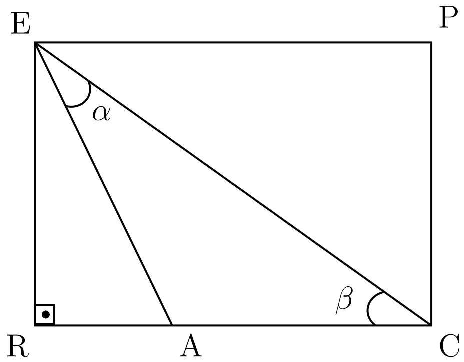
   (b) $\cos x = m^2 + m + 1$

5. Dado $\operatorname{sen} x = -\dfrac{2}{3}$, quais são os possíveis valores de $\cos x$?

6. Calcule o valor do cosseno do ângulo x.



7. No retângulo EPCR da figura a seguir, PC = 6 cm, RA = 3 cm e AC = 5 cm.



   O valor de $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ é

   (a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

   (b) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

   (c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(d) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

8. Expresse em radianos:

   (a) $200°$

   (b) $9°$

   (c) $20°$

   (d) $240°$

9. Dê as expressões gerais dos arcos côngruos a:

   (a) $2000°$

   (b) $1700°$

10. Calcule as expressões:

   (a) $\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{4} - \cos 2\pi$

   (b) $2\cos\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{7\pi}{4}$

   (c) $3\cos\dfrac{\pi}{2} - 2\cos\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\cos\pi$

8.5 Respostas dos exercícios

1. $\text{sen}\,45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\,45° = 1$;

   $\text{sen}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\,60° = \dfrac{1}{2}$; $\text{sen}\,60° = \sqrt{3}$.

2. Figura 8.7

3. $3\sqrt{3}$cm.

4. (a) $-3 < m \leq -\dfrac{7}{3}$

   (b) $-1 < m \leq 0$

5. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

6. $\cos x = \dfrac{1}{5}$

7. Alternativa a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

8. (a) $\dfrac{10\pi}{9}$

(b) $\dfrac{\pi}{20}$

(c) $\dfrac{\pi}{9}$

(d) $\dfrac{4\pi}{3}$

9. (a) $200^\circ + 360^\circ \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

   (b) $260^\circ + 360^\circ \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

10. (a) $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

    (b) $\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

    (c) $\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$