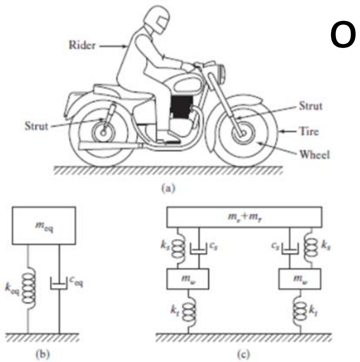
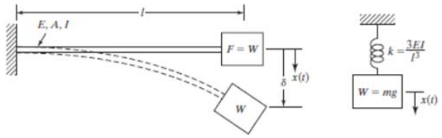
PNV3411
Dinâmica de Sistemas I

Prof. Helio Mitio Morishita
Aula 20_A 01/07/2021

EXEMPLOS DE SISTEMAS DEFINIDOS

Sistemas definidos: sistemas que apresentam um ou mais pontos fixos





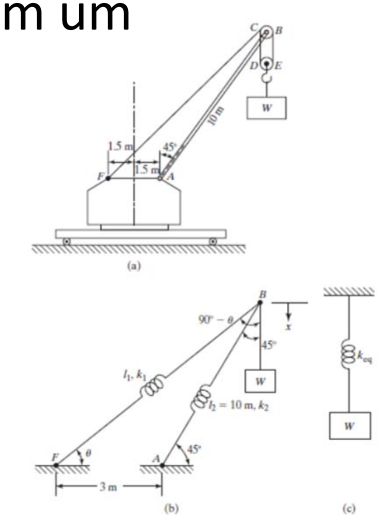


FIGURE 1.32 Crane lifting a load.

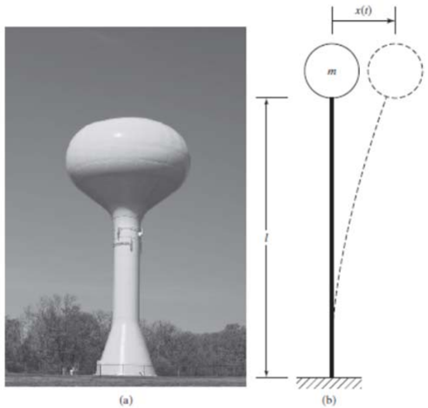


FIGURE 2.10 Elevated tank. (Andrea Izzotti/Fotolia.)

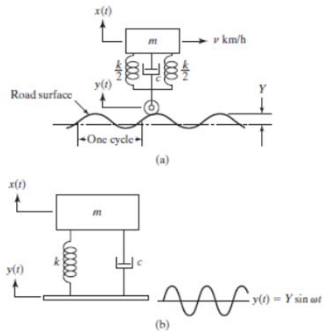


FIGURE 3.18 Vehicle moving over a rough road.

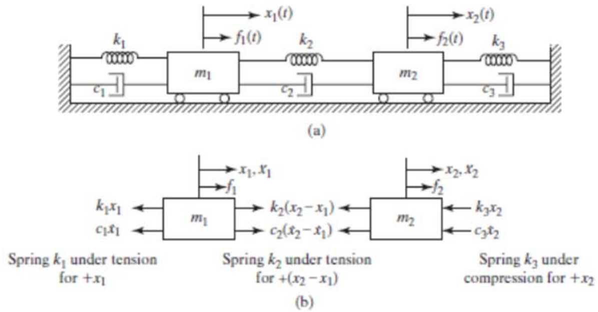
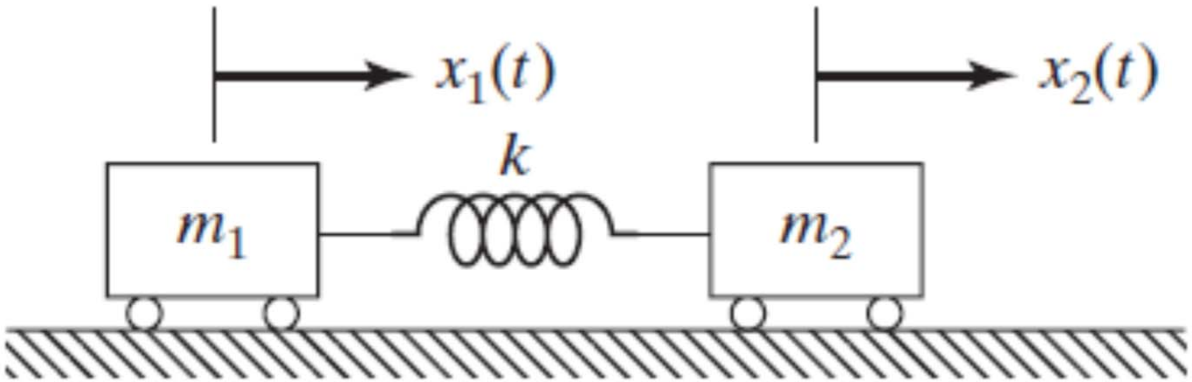


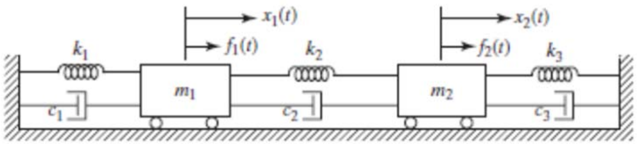
FIGURE 5.5 A two-degree-of-freedom spring-mass-damper system.

Estes sistemas apresentam frequências naturais diferentes de zero.

SISTEMAS SEMIDEFINIDOS
(irrestritos ou degenerados)



Sistema semidefinido: uma das frequências naturais é zero

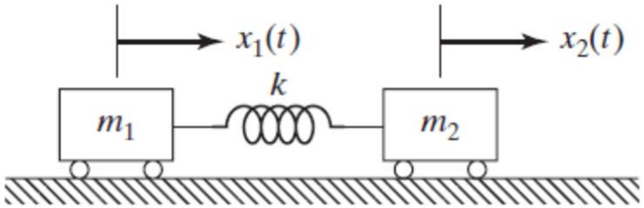


(a)

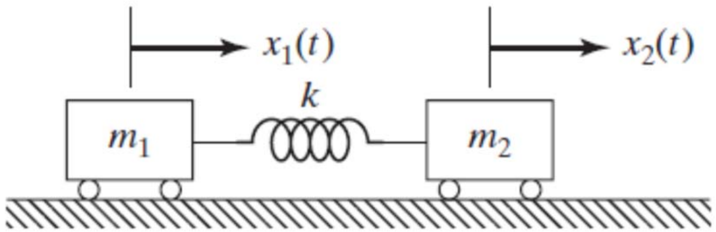
Sistema definido

Ver secção 5.7 Semidefinite Systems do livro do RAO

SISTEMAS SEMIDEFINIDOS
(irrestritos ou degenerados)



Exemplo: Reboque de um navio



Equação do movimento

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

Para oscilação livre pode-se admitir que

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \phi_j), \qquad j = 1, 2$$

$$(-m_1\omega^2 + k)X_1 - kX_2 = 0$$
$$-kX_1 + (-m_2\omega^2 + k)X_2 = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k & -k \\ -k & (-m_2\omega^2 + k) \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para haver soluções não triviais deveremos ter $|D| = 0$

$$\omega^2[m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0$$

As frequências naturais são

$$\omega_1 = 0 \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

$\omega_1 = 0$ → Não há movimento relativo entre as massas → Sistema semidefinido

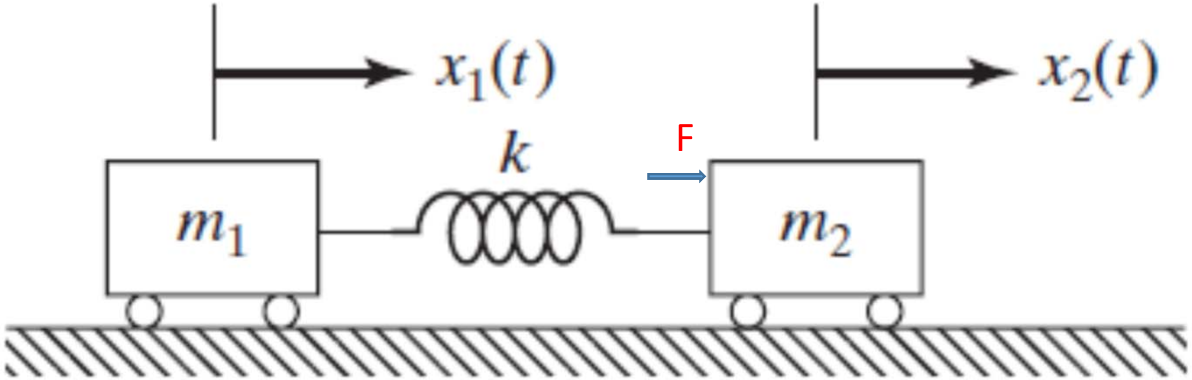
Substituindo ω_2 em uma das equações abaixo

$$(-m_1\omega^2 + k)X_1 - kX_2 = 0$$
$$-kX_1 + (-m_2\omega^2 + k)X_2 = 0$$

Tem-se

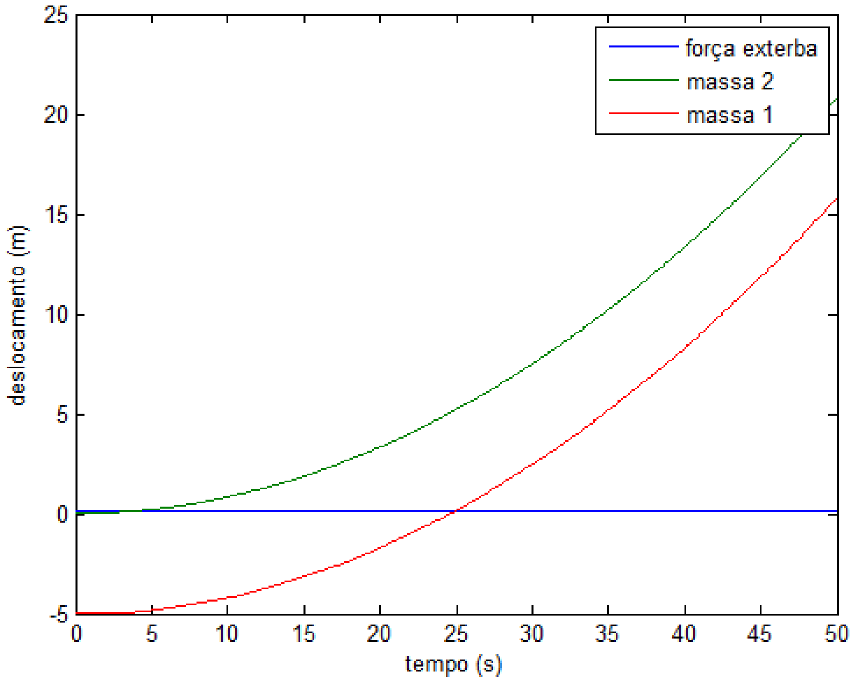
$$X_1 = -\frac{m_2}{m_1}X_2$$

Exemplo: reboque de um navio



$$F = \sin \omega t + 0.1$$

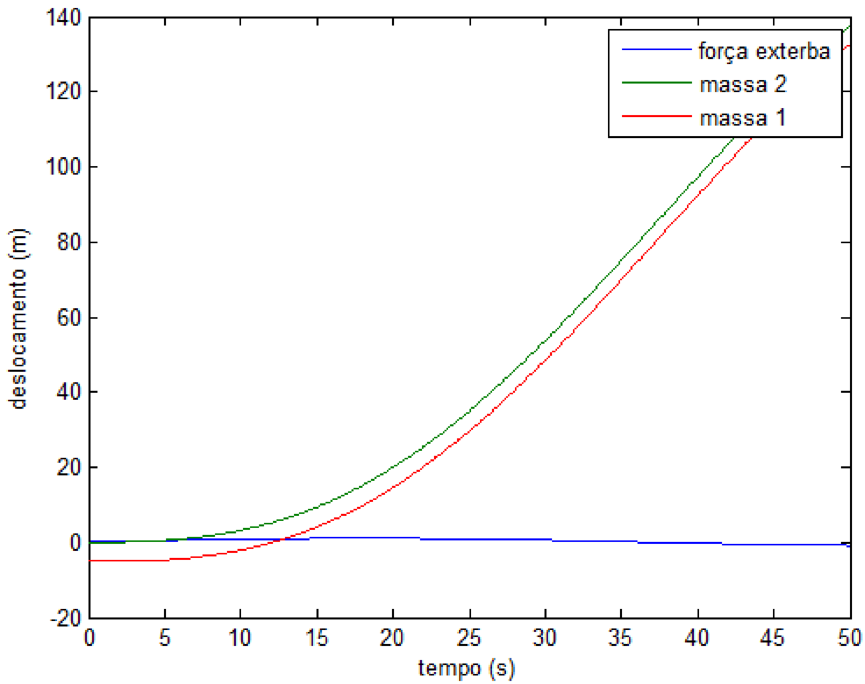
$\omega = 0$



$F = \sin \omega t + 0.1$

No caso de F constante não se observa nenhum problema.

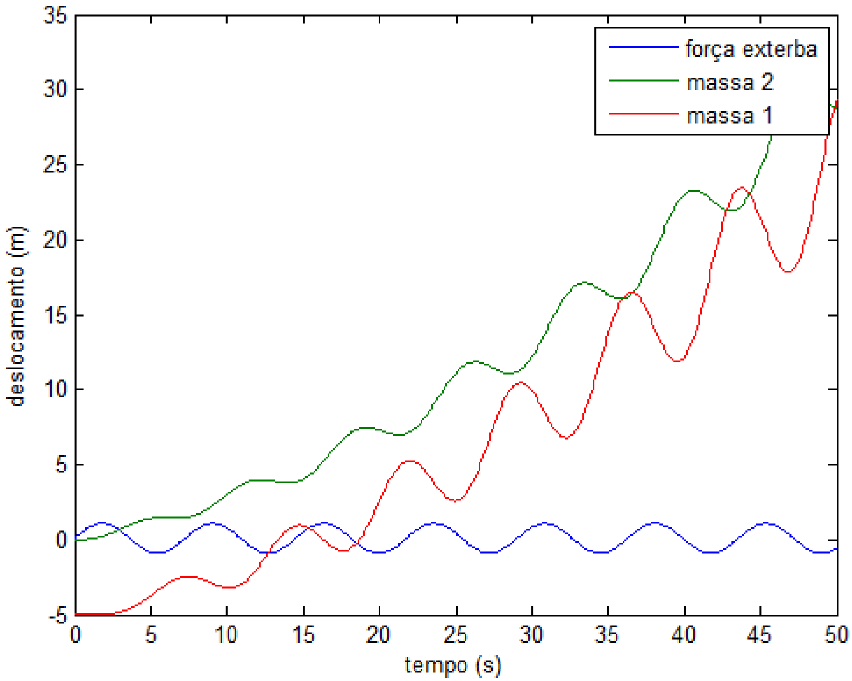
$\omega \ll \omega_0$



$$F = \sin \omega t + 0.1$$

Para a força *F* contendo uma variação harmônica com frequência bem menor do que a frequência natural do sistema não se observa nenhum problema.

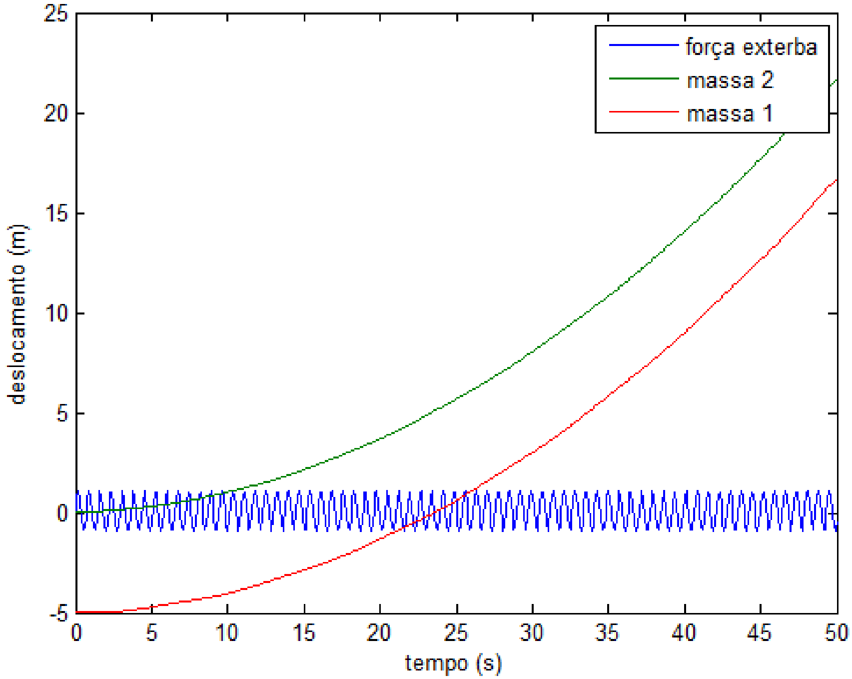
$$\omega \approx \omega_0$$



$$F = \sin \omega t + 0.1$$

Para a força *F* contendo uma variação harmônica com frequência próxima à frequência natural do sistema pode haver colisão entre os dois corpos.

$\omega \gg \omega_0$



$F = \sin \omega t + 0.1$

Para a força *F* contendo uma variação harmônica com frequência bem maior do que a frequência natural do sistema não se observa nenhum problema.

ABSORVEDOR DE VIBRAÇÃO

Ver secção 9.11 Vibration
Absorbers do livro do RAO

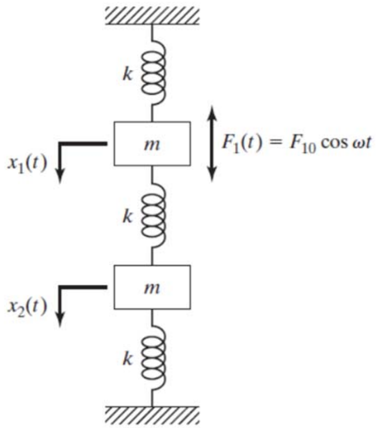


FIGURE 5.15 A two-mass system subjected to harmonic force.

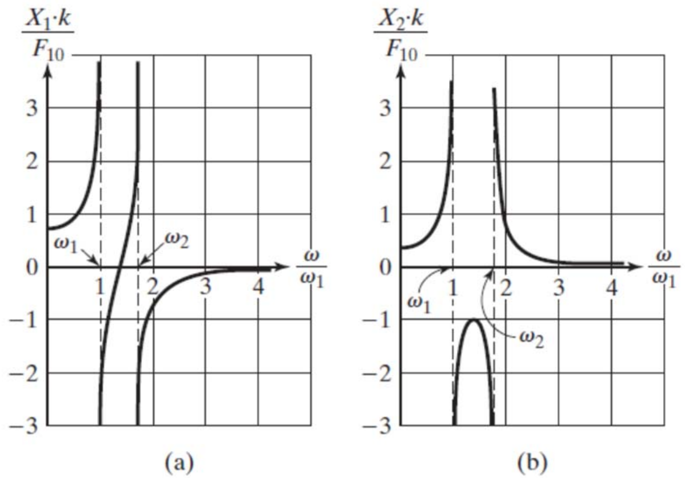


FIGURE 5.16 Frequency-response curves of Example 5.8.

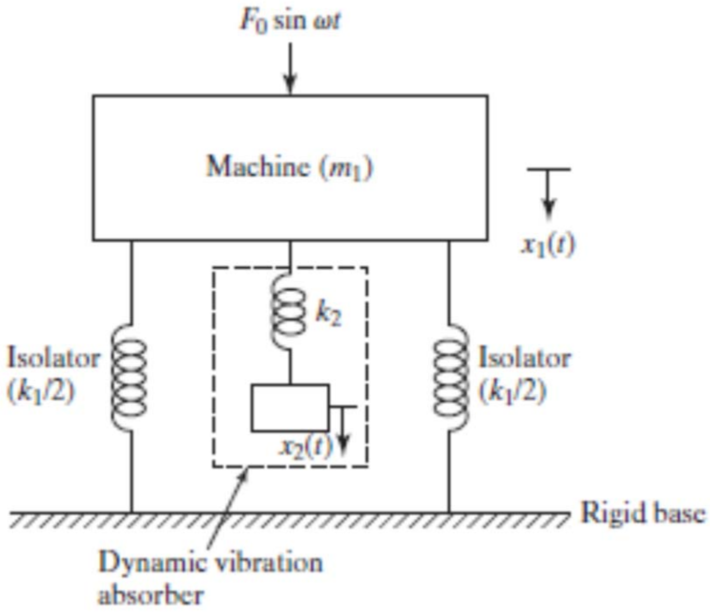


FIGURE 9.34 Undamped dynamic vibration absorber.

Frequência de operação:

$$\omega^2 \simeq \omega_1^2 = k_1/m_1,$$

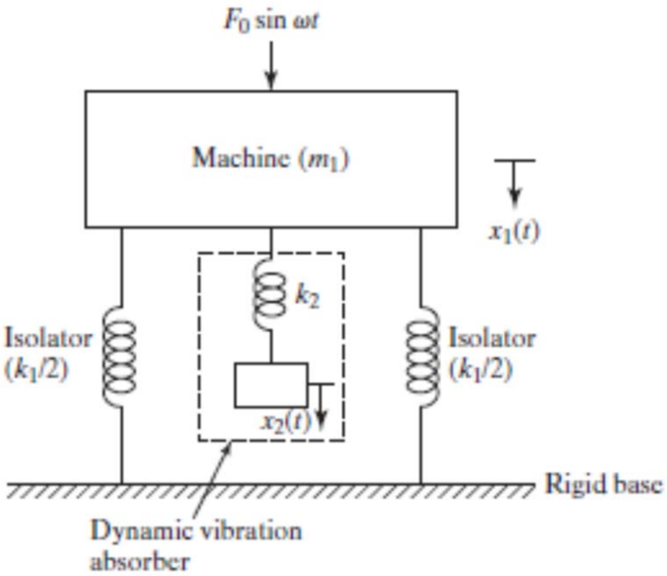


FIGURE 9.34 Undamped dynamic vibration absorber.

Equacionamento

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \sin \omega t$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Hipótese:

$$x_j(t) = X_j \sin \omega t, \qquad j = 1, 2$$

Solução

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

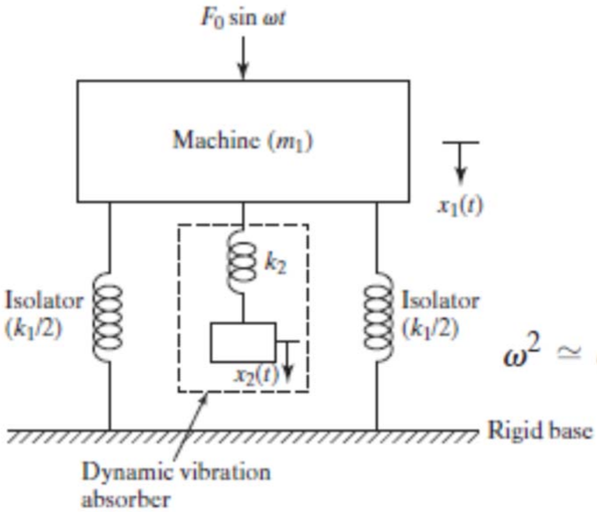


FIGURE 9.34 Undamped dynamic vibration absorber.

$$\omega^2 \simeq \omega_1^2 = k_1/m_1,$$

Requisto: $X_1 = 0$

$$X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

Se o absorvedor for projetado tal que:

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1}$$

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1}, \qquad \omega_1 = \left(\frac{k_1}{m_1}\right)^{1/2}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2}$$

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

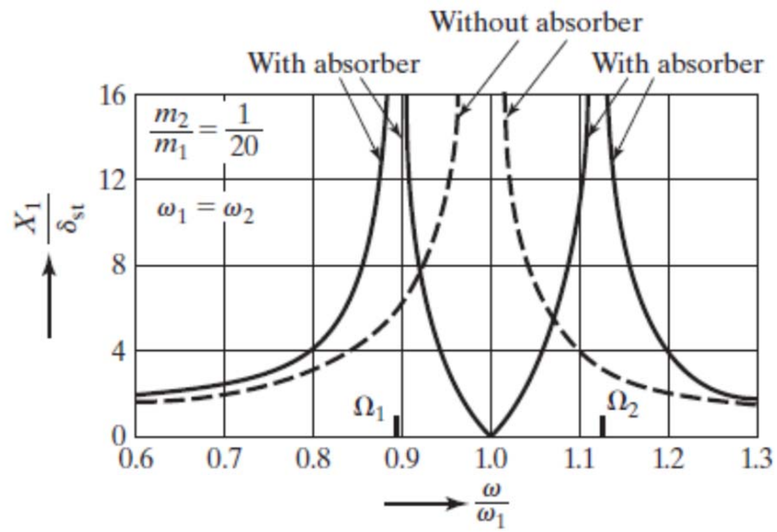


FIGURE 9.35 Effect of undamped vibration absorber on the response of machine.

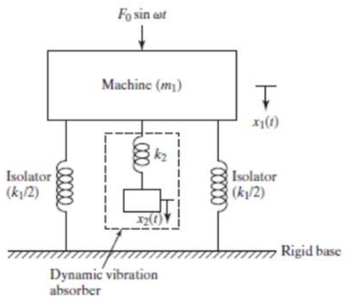


FIGURE 9.34 Undamped dynamic vibration absorber.

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

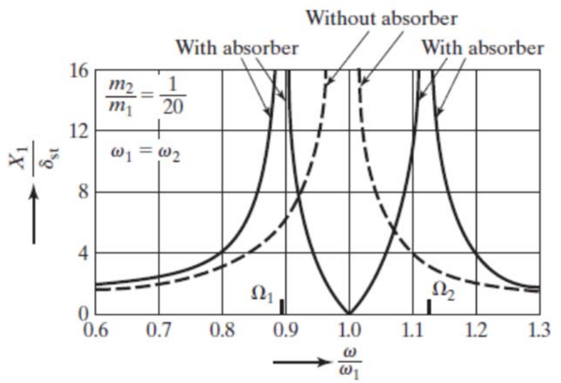


FIGURE 9.35 Effect of undamped vibration absorber on the response of machine.

Para $\omega = \omega_1$ tem-se $X_1 = 0$ $\Rightarrow$ $X_2 = -\frac{k_1}{k_2}\delta_{st} = -\frac{F_0}{k_2}$

Ou seja, a força imposta pela mola auxiliar tem sentido contrário à força imposta F_0 forçando X_1 para zero.

A Fig. 9.35 mostra que ao instalar um absorvedor de vibração introduz-se duas frequências de ressonância, Ω_1 e Ω_2

Através do denominador da expressão de X_1 pode-se obter que:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\Omega_2}{\omega_2}\right)^2 \end{array}\right\} = \frac{\left\{\left[1 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right] \mp \left\{\left[1 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2 - 4\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right\}^{1/2}\right\}}{2\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}$$

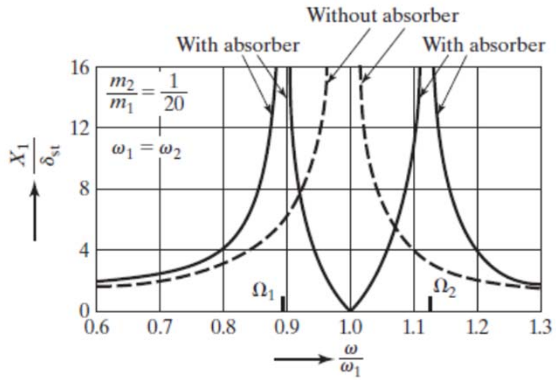


FIGURE 9.35 Effect of undamped vibration absorber on the response of machine.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2\\[2ex]\left(\dfrac{\Omega_2}{\omega_2}\right)^2\end{array}\right\} = \frac{\left\{\left[1 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right] \mp \left\{\left[1 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2 - 4\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right\}^{1/2}\right\}}{2\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}$$

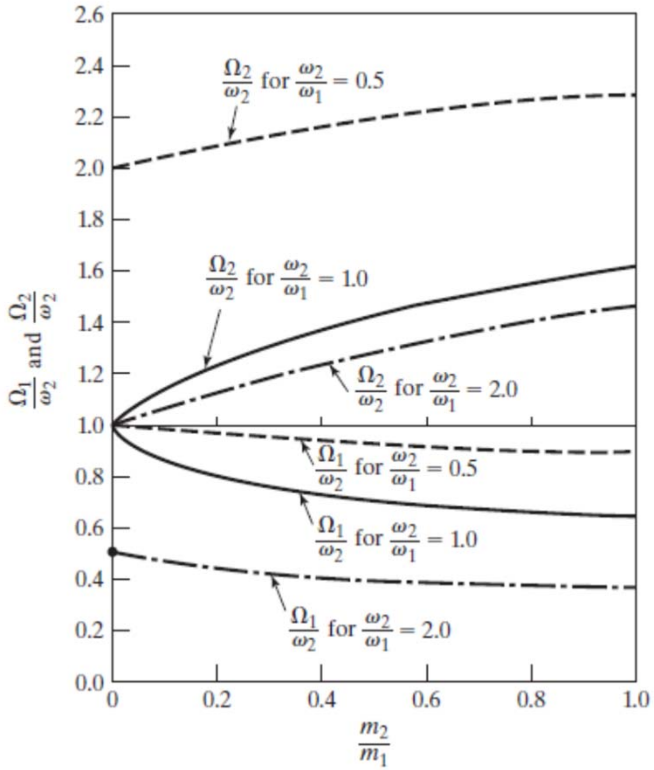
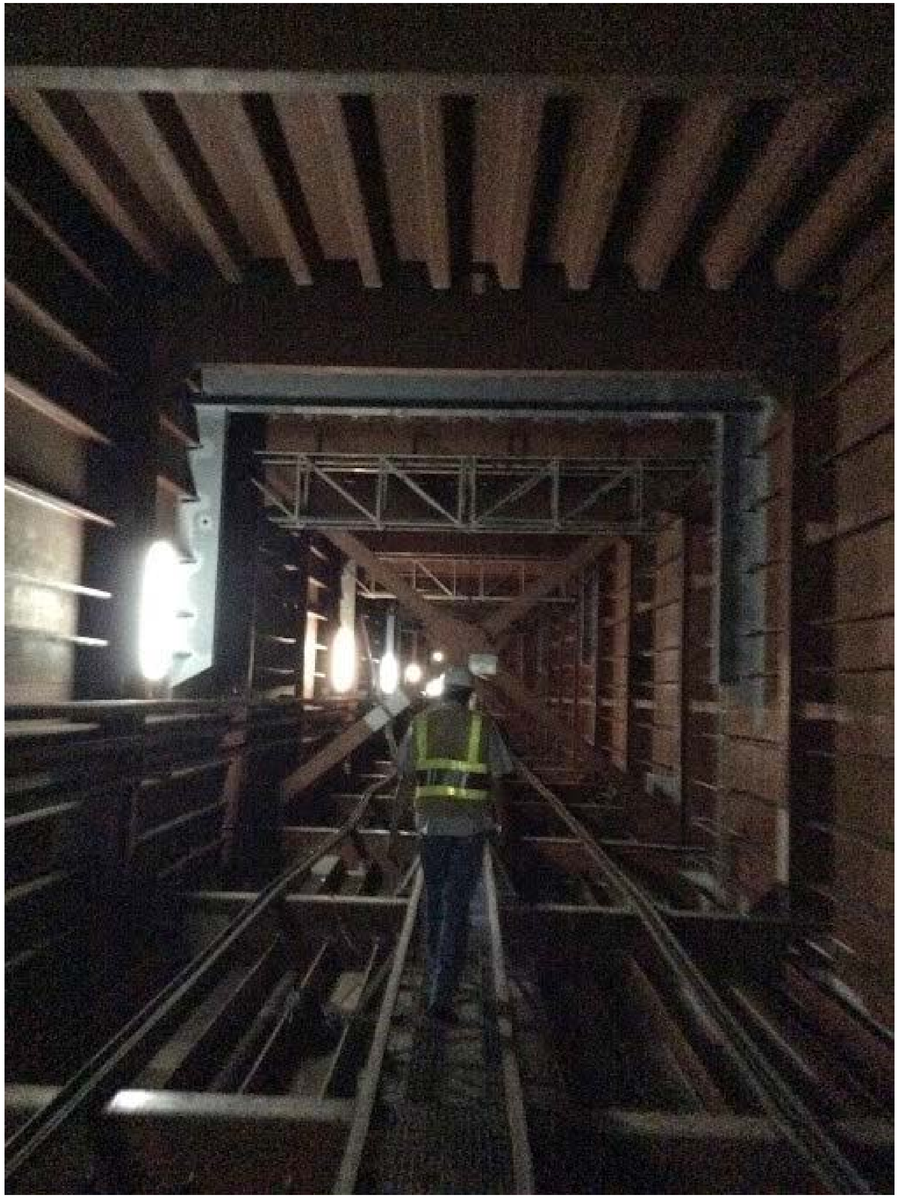


FIGURE 9.36 Variations of Ω_1 and Ω_2 given by Eq. (9.146).

Exemplo de absorvedor de vibração

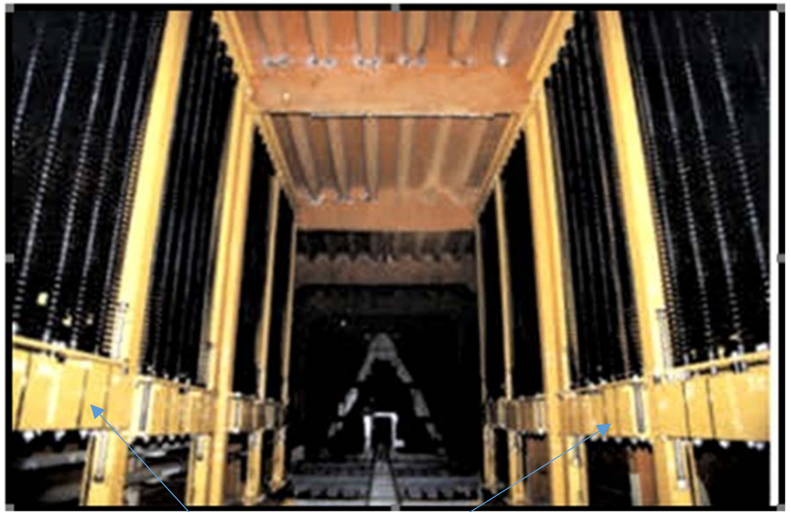
Ver a vibração da Ponte Rio-Niterói no link abaixo:

https://www.youtube.com/watch?v=ehL1xtzc-C8



Estrutura da viga
caixão da ponte
Rio-Niterói

https://www.youtube.com/watch?v=ehL1xtzc-C8



Absorvedores de vibração