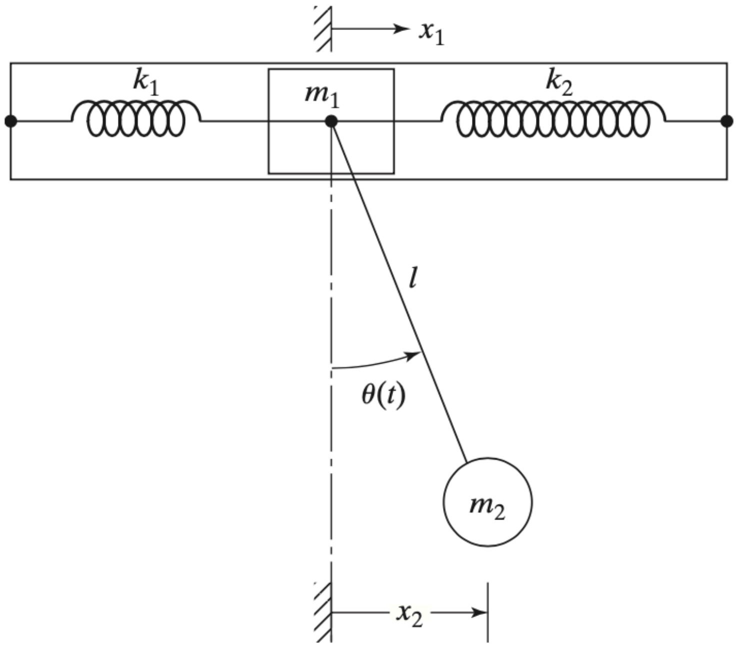
Dinâmica de Sistemas Navais e Oceânicos

PNV3314 Dinâmica de Sistemas

Aula 22

Exercícios

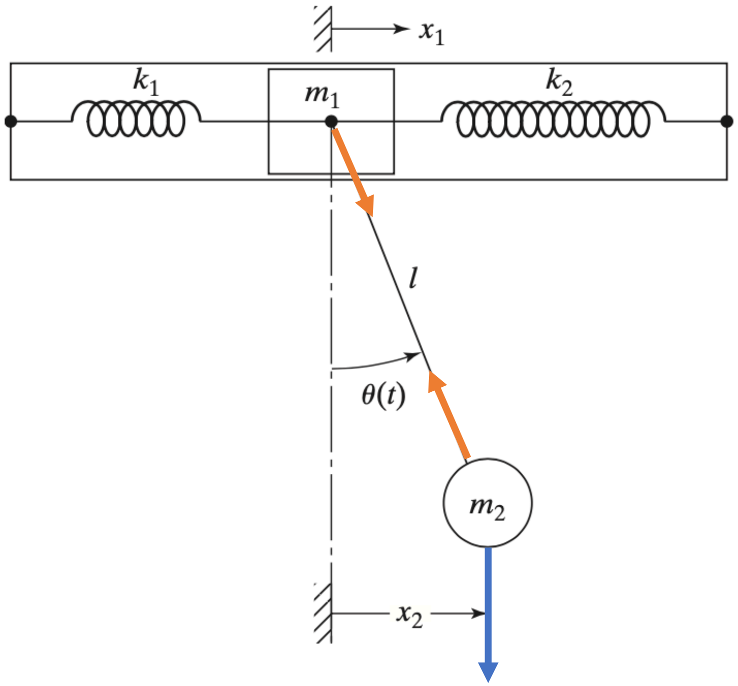
Exercício 1



No sistema ao lado:

a) Determine as equações do movimento em termos de x_1 e θ.
b) Determine as equações do movimento em termos de x_1 e x_2.
c) Determine as frequências naturais.

Exercício 1



a) equações do movimento em termos de x_1 e θ.

Para a translação do pistão

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - T\sin\theta = 0$$

Para a rotação do pêndulo (como referência a posição de equilíbrio)

$$m_2 l^2\ddot{\theta} - m_2 g l\sin\theta = 0$$

Para θ pequeno, assumimos $\sin\theta = \theta$ e

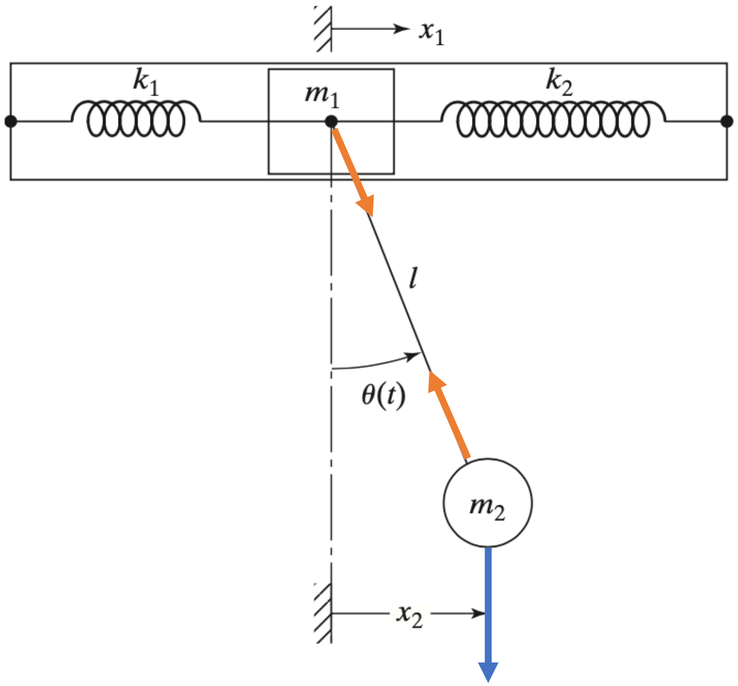
$$T = m_2 g\cos\theta \approx m_2 g$$

Que resulta em

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - m_2 g\theta = 0$$

$$m_2 l^2\ddot{\theta} - m_2 g l\theta = 0$$

Exercício 1



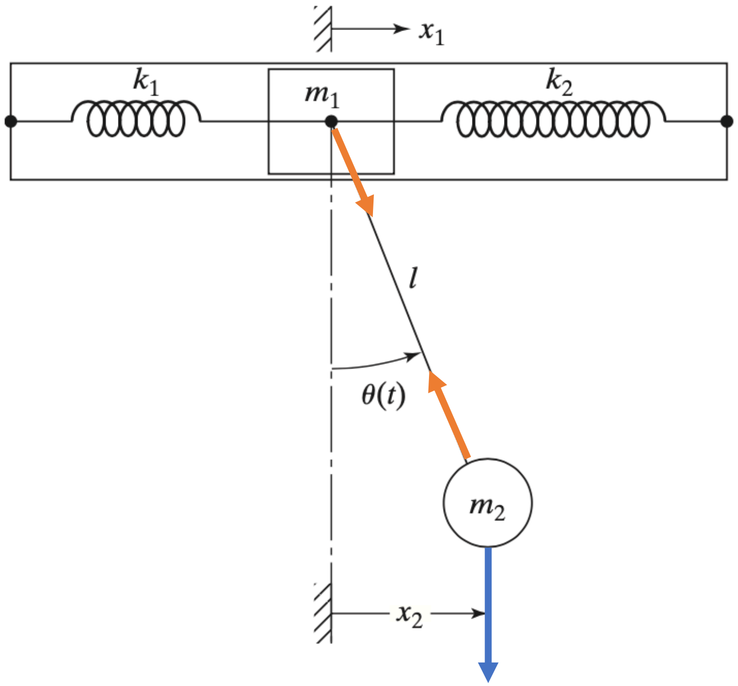
$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - m_2 g\theta = 0$$

$$m_2 l^2\ddot{\theta} - m_2 g l\theta = 0$$

Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -m_2 g \\ 0 & -m_2 g l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 1



b) Usando x_1 e x_2...

Pensando na translação das duas massas...

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - T\sin\theta = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + T\sin\theta = 0$$

Para pequenos ângulos, podemos usar

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{x_2 - x_1}{l}$$

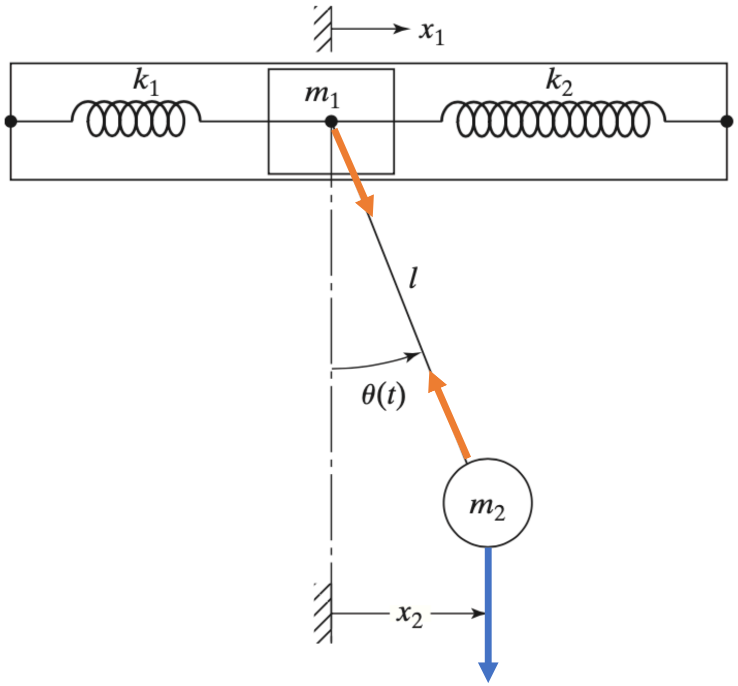
$$T = m_2 g\cos\theta \approx m_2 g$$

Produzindo...

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - m_2 g\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + m_2 g\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) = 0$$

Exercício 1



$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - m_2 g\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) = 0$$

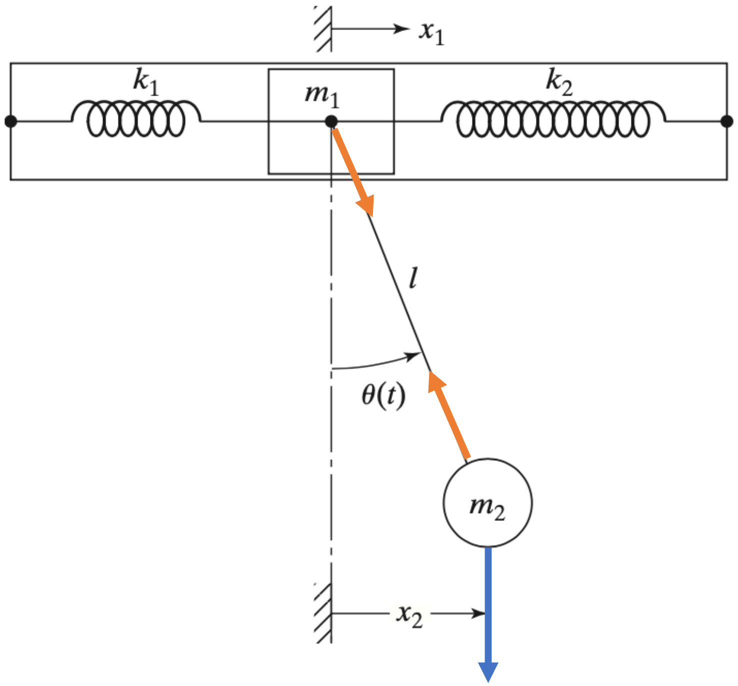
$$m_2\ddot{x}_2 + m_2 g\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) = 0$$

Ou na forma matricial...

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \frac{m_2 g}{l} & -\frac{m_2 g}{l} \\ -\frac{m_2 g}{l} & \frac{m_2 g}{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 1

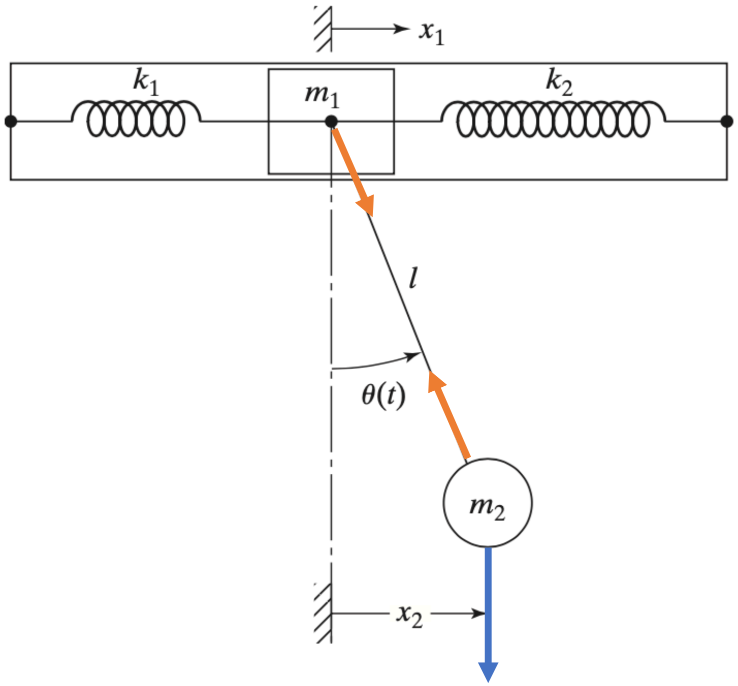
Compare as duas representações...



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -m_2 g \\ 0 & -m_2 g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \dfrac{m_2 g}{l} & -\dfrac{m_2 g}{l} \\ -\dfrac{m_2 g}{l} & \dfrac{m_2 g}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 1



c) Para determinar as frequências naturais

Assumindo solução harmônica

$$x_1 = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2 = X_2 \cos(\omega t + \phi)$$

As equações para x_1 e x_2

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - m_2 g \left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) = 0$$

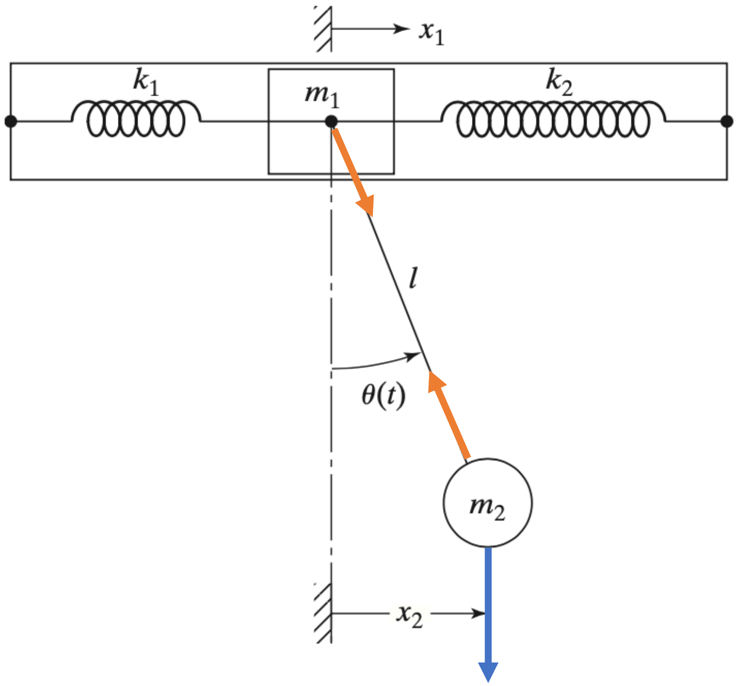
$$m_2 \ddot{x}_2 + m_2 g \left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) = 0$$

Se tornam...

$$\left(-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) + \frac{m_2 g}{l}\right) X_1 - \frac{m_2 g}{l} X_2 = 0$$

$$-\frac{m_2 g}{l} X_1 + \left(-m_2\omega^2 + \frac{m_2 g}{l}\right) X_2 = 0$$

Exercício 1



$$\left(-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) + \frac{m_2 g}{l}\right) X_1 - \frac{m_2 g}{l} X_2 = 0$$

$$-\frac{m_2 g}{l} X_1 + \left(-m_2\omega^2 + \frac{m_2 g}{l}\right) X_2 = 0$$

Pare resolver este sistema fazemos det=0

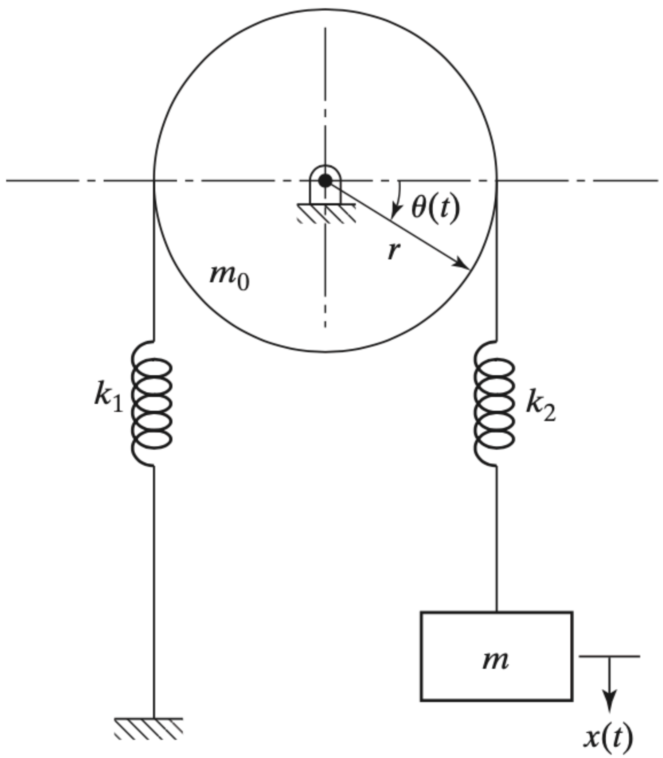
$$\begin{vmatrix} \left(-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) + \frac{m_2 g}{l}\right) & -\frac{m_2 g}{l} \\ -\frac{m_2 g}{l} & \left(-m_2\omega^2 + \frac{m_2 g}{l}\right) \end{vmatrix} = 0$$

E encontramos as duas raízes da equação característica, as frequências naturais ω_1 e ω_2.

Simulação

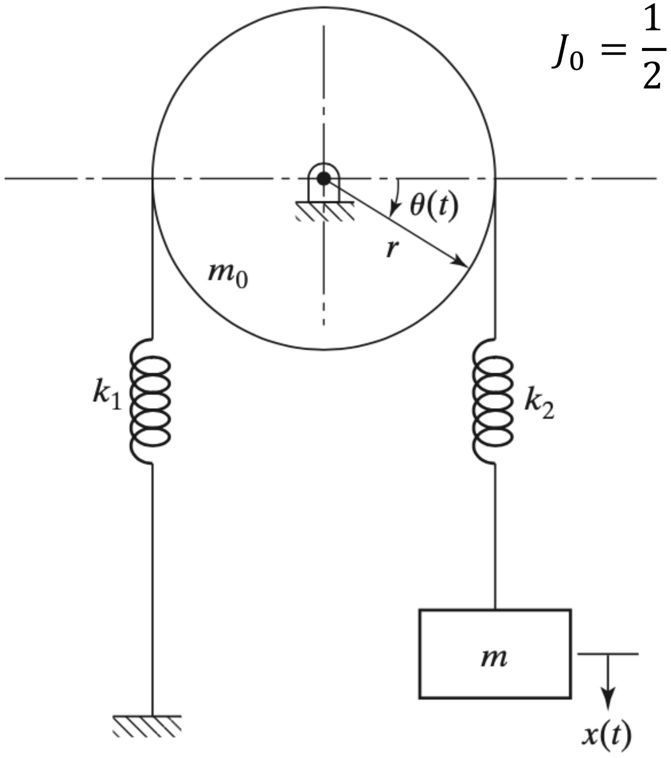
- https://www.myphysicslab.com/pendulum/cart-pendulum-en.html

Exercício 2



Determine as frequências naturais, assumindo que o cabo não desliza em relação a polia.

Exercício 2



$$J_0 = \frac{1}{2} m_0 r^2$$

As equações do movimento...

Para a translação da massa

$$m\ddot{x} = -k_2(x - r\theta)$$

Para a rotação da polia

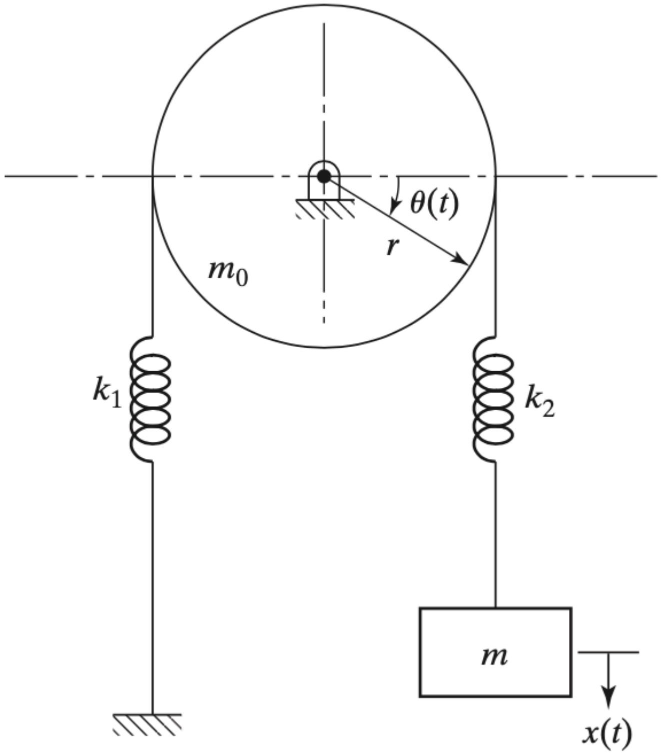
$$J_0\ddot{\theta} = -k_1 r^2\theta - k_2(r\theta - x)r$$

As equações abaixo se tornam...

$$m\ddot{x} + k_2 x - k_2 r\theta = 0$$

$$J_0\ddot{\theta} + k_1 r^2\theta + k_2 r^2\theta - k_2 r x = 0$$

Exercício 2



$$m\ddot{x} + k_2 x - k_2 r\theta = 0$$

$$J_0\ddot{\theta} + k_1 r^2\theta + k_2 r^2\theta - k_2 r x = 0$$

Assumindo os movimentos harmônicos

$$x = X\cos(\omega t + \phi)$$

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$

Obtemos...

$$-m\omega^2 X + k_2 X - k_2 r\Theta = 0$$

$$-J_0\omega^2\Theta + k_1 r^2\Theta + k_2 r^2\Theta - k_2 r X = 0$$

Na forma matricial

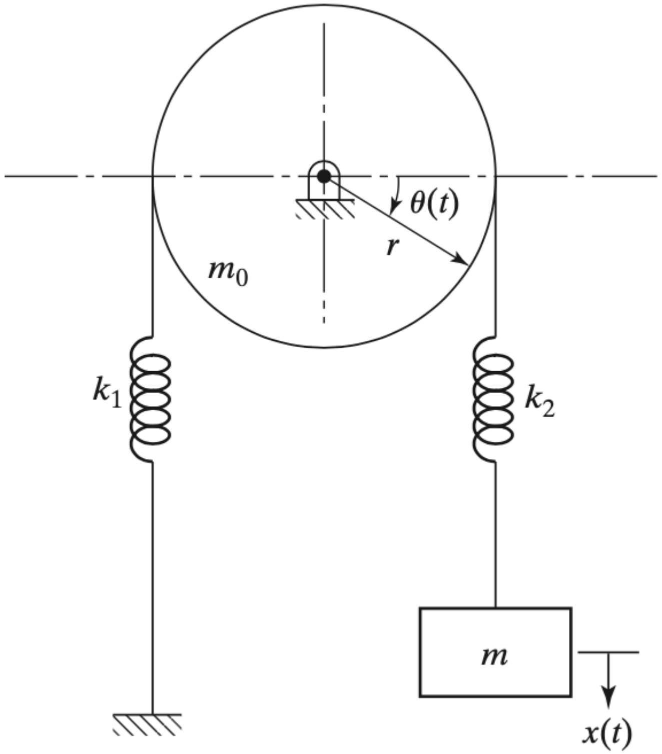
$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k_2 & -k_2 r \\ -k_2 r & -J_0\omega^2 + (k_1 + k_2) r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = 0$$

Exercício 2

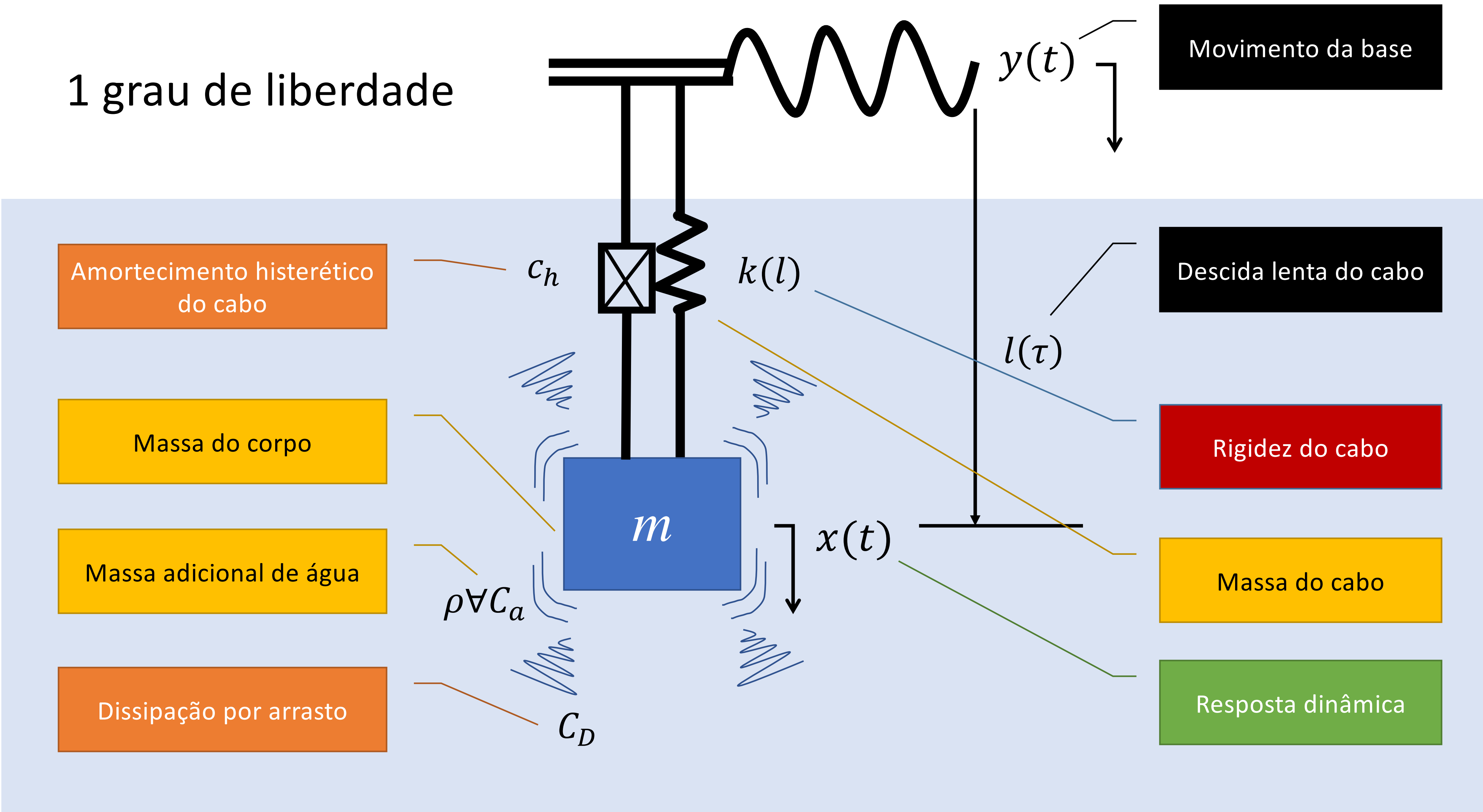
$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k_2 & -k_2 r \\ -k_2 r & -J_0\omega^2 + (k_1+k_2)r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = 0$$

As frequências naturais são as raízes da equação característica...

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + k_2 & -k_2 r \\ -k_2 r & -J_0\omega^2 + (k_1+k_2)r^2 \end{vmatrix} = 0$$

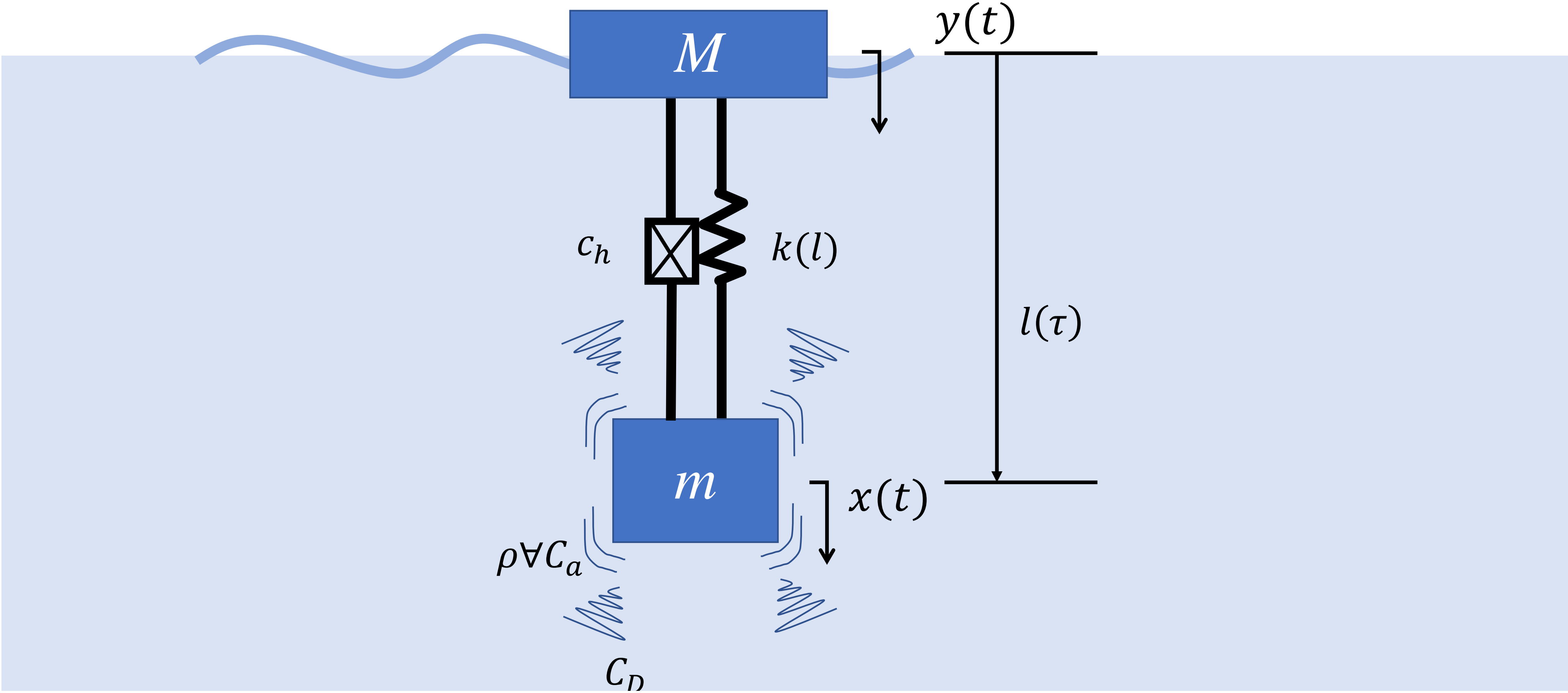


Lançamento do manifold

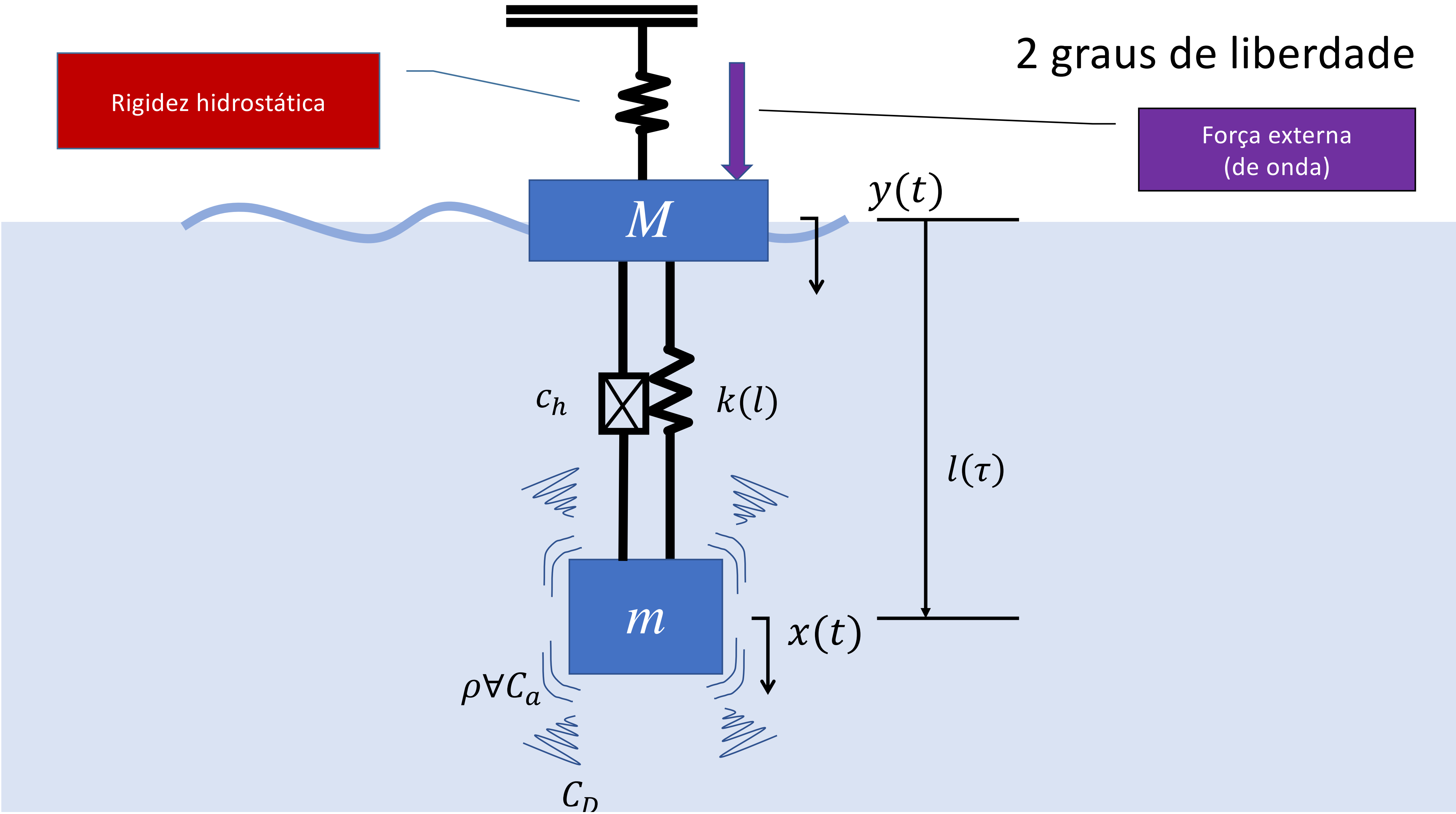


1 grau de liberdade
Movimento da base
$y(t)$
Descida lenta do cabo
$l(\tau)$
Amortecimento histerético do cabo
c_h
$k(l)$
Rigidez do cabo
Massa do corpo
m
$x(t)$
Massa do cabo
Massa adicional de água
$\rho\forall C_a$
Resposta dinâmica
Dissipação por arrasto
C_D

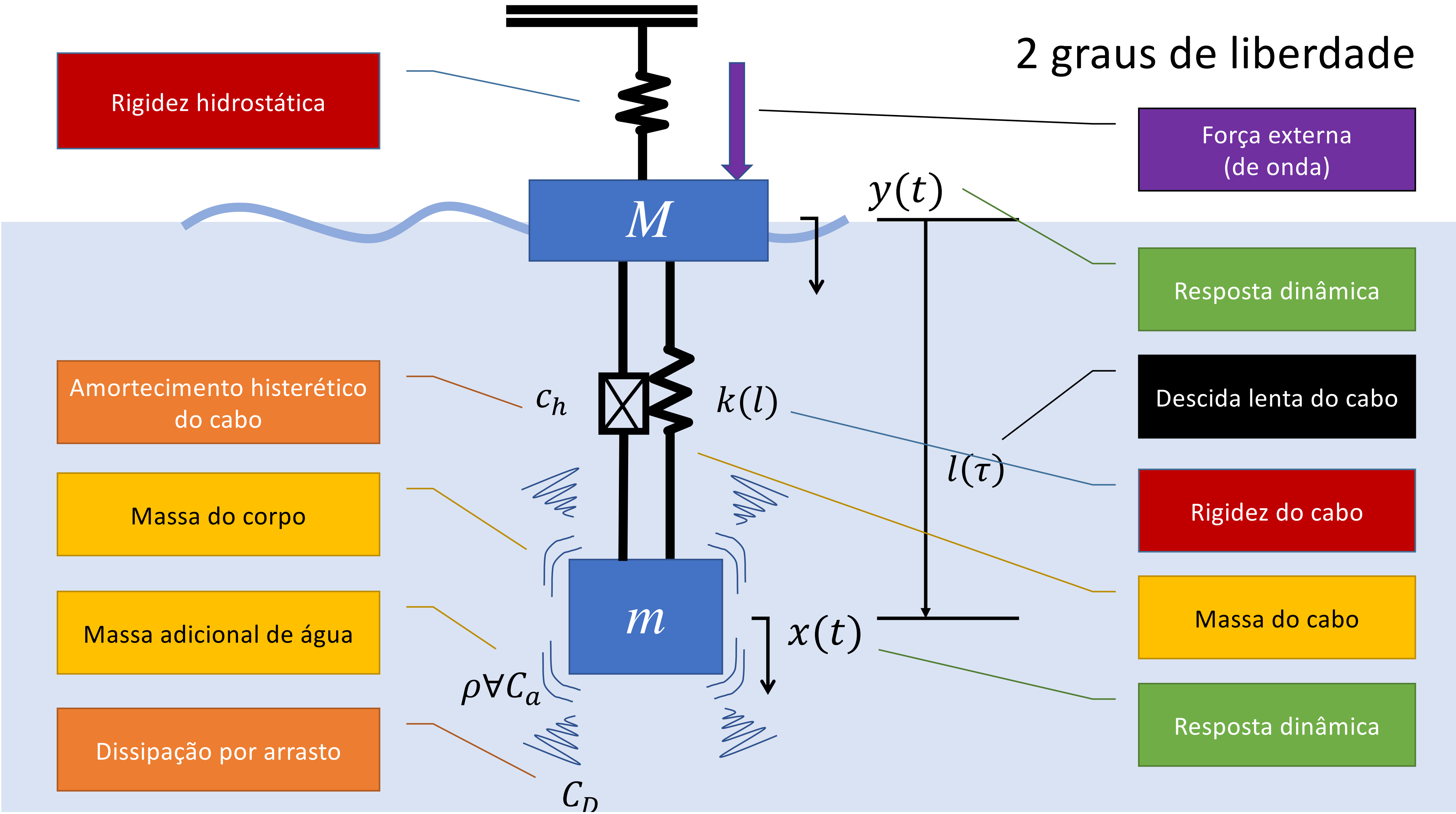
2 graus de liberdade



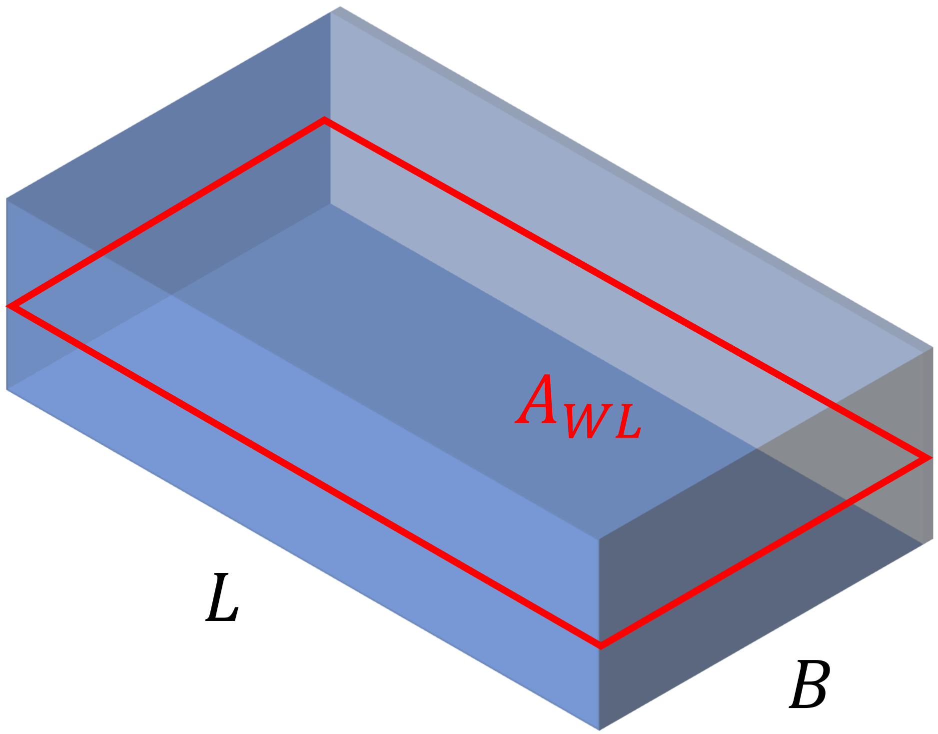
2 graus de liberdade



2 graus de liberdade



Restauração de heave do PSV

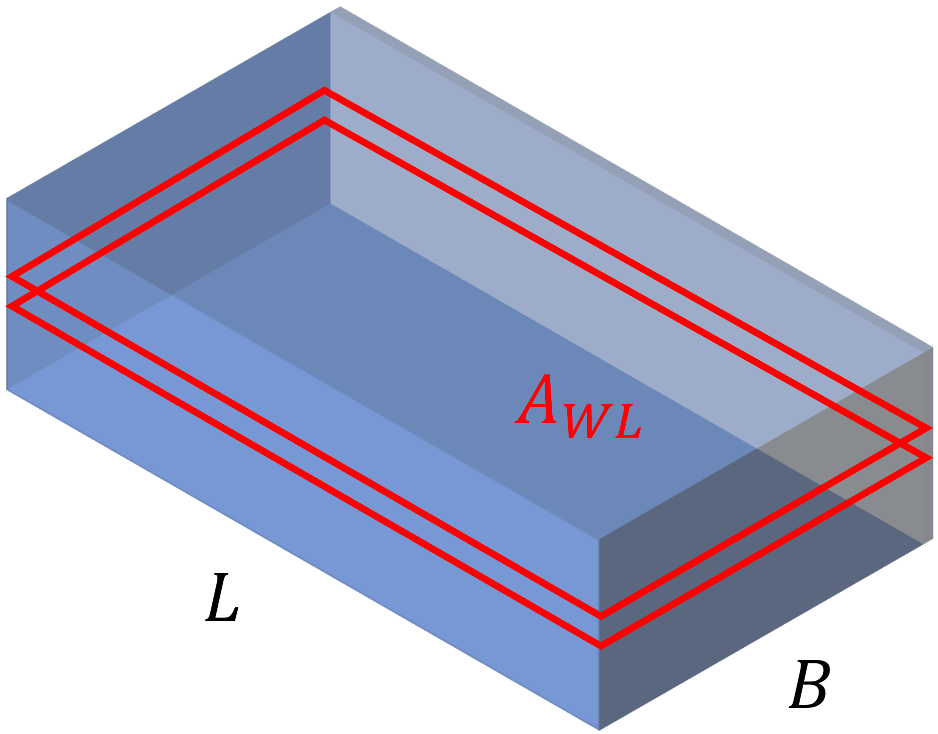


Dados do PSV

- $\mathrm{W} = 6.400\ ton$
- $L = 80\mathrm{m}$
- $B = 20\mathrm{m}$
- $H = 4\mathrm{m}$
- $A_{WL} = 1.600\mathrm{m}^2$

Qual a rigidez equivalente da restauração hidrostática?

Restauração de heave do PSV



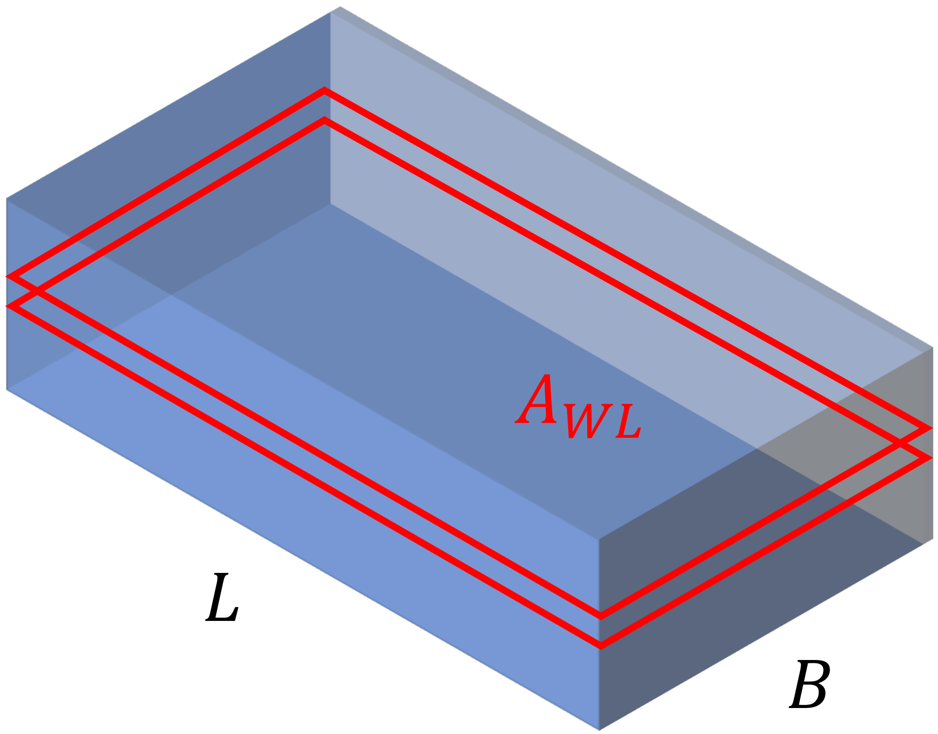
Se o PSV afundar Δy, o empuxo adicional será

$$E = \rho g \; A_{WL} \Delta y$$

Portanto, a rigidez equivalente é

$$k_h = \rho g \; A_{WL}$$

Restauração de heave do PSV



Qual a frequência natural de heave?

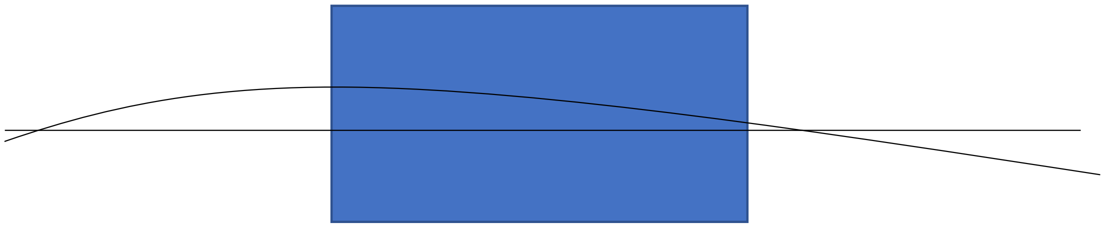
$$f_h = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_h}{m + m_a}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho g\, A_{WL}}{m + C_{33}W}}$$

Supondo $C_{33} = 0{,}9$

$$f_h \approx 0{,}18 \text{ Hz}$$

$$T_h \approx 5{,}5 \text{ s}$$

Restauração de heave do PSV



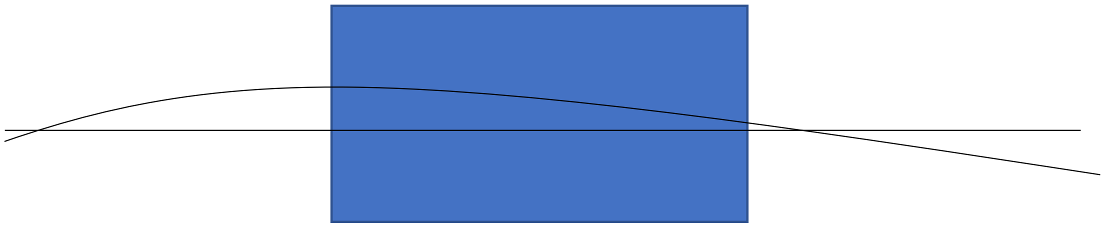
Se o PSV estivesse estático (cativo) e recebesse uma onda longa de $H = 1\text{m}$, a magnitude da força de excitação seria da ordem de

$$F_y = \rho g \, A_{WL} H$$

$$F_y \approx 1{,}6{\times}10^{7}\ \text{N} = 1.600\ \text{ton-força}$$

Na frequência associada a onda

Restauração de heave do PSV



Se o PSV estivesse estático (cativo) e recebesse uma onda longa de $H = 1\mathrm{m}$, a magnitude da força de excitação seria da ordem de

$$F_y = \rho g \, A_{WL} H$$

Essa será nossa força de excitação (de onda).

$$F_y \approx 1{,}6 \times 10^7 \ \mathrm{N} = 1.600 \text{ ton-força}$$

Na frequência da onda