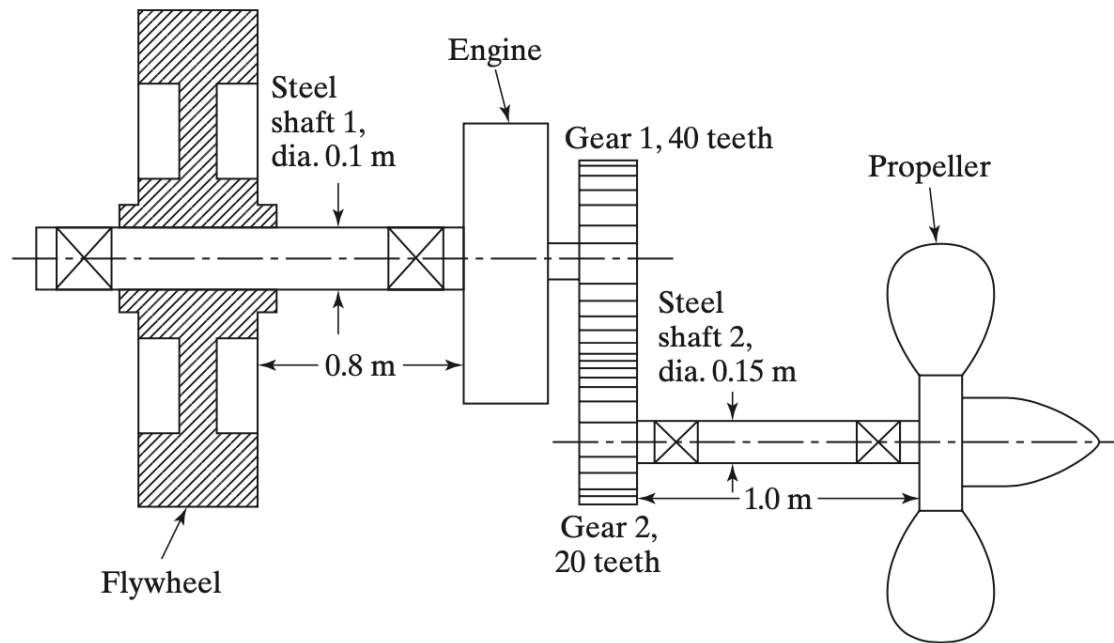


Dinâmica de Sistemas Navais e Oceânicos

PNV3314 Dinâmica de Sistemas

Aula 19

Exercício: Vibração do eixo propulsor de uma embarcação

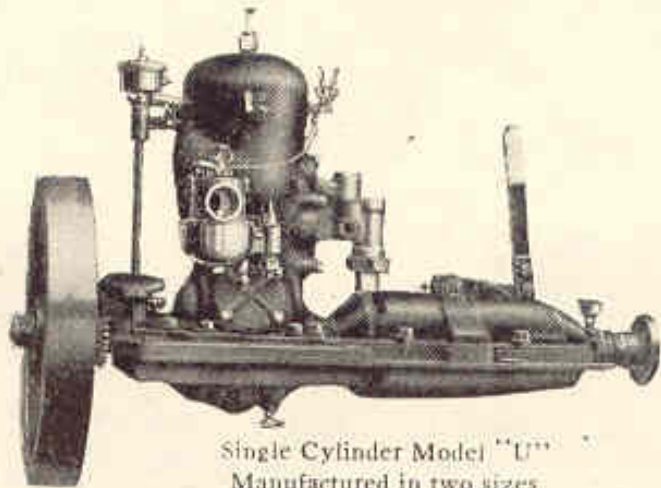


Dada a linha de eixo propulsora ao lado. Os momentos de inércia de massa dos elementos são:

Volante de inércia:	9000 kg-m ²
Motor:	1000 kg-m ²
Engrenagem 1:	250 kg-m ²
Engrenagem 2:	150 kg-m ²
Hélice:	2000 kg-m ²

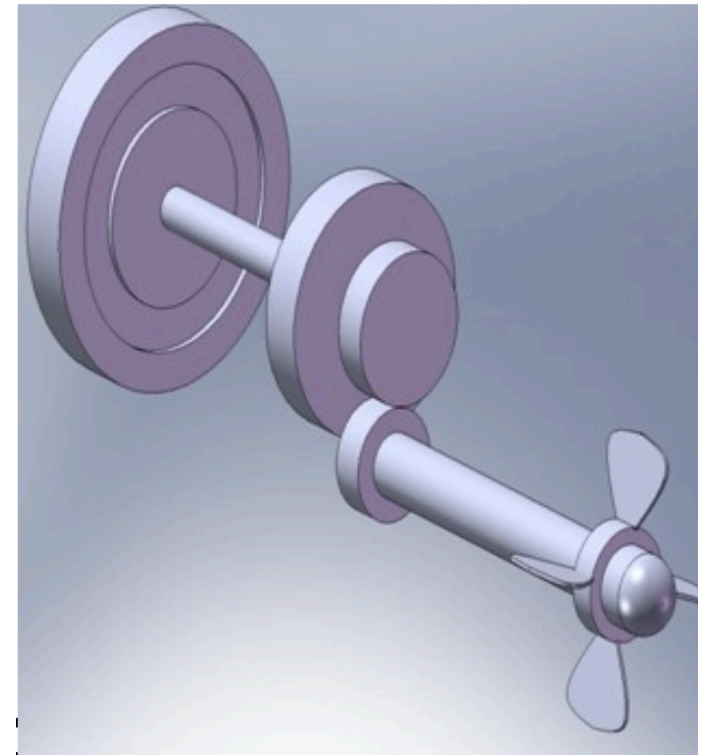
Encontre as frequências naturais e modos das vibrações torcionais do sistema propulsor.

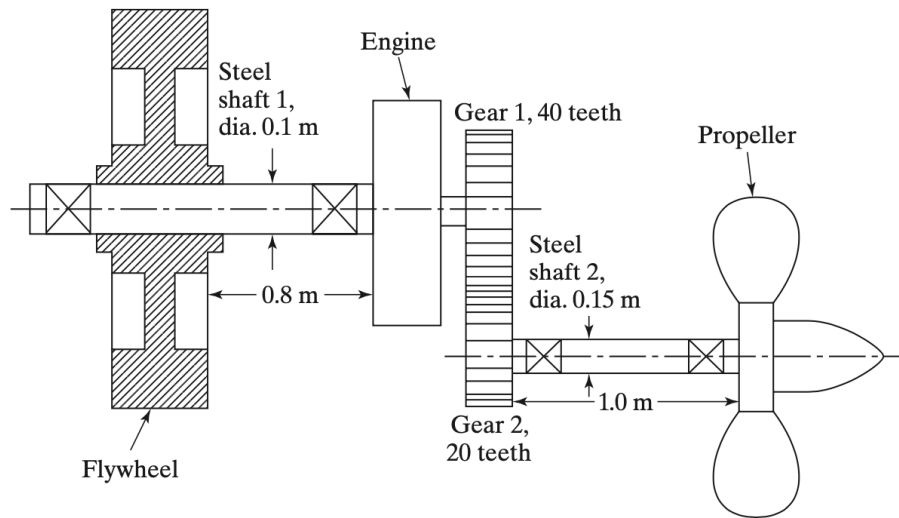
There's a



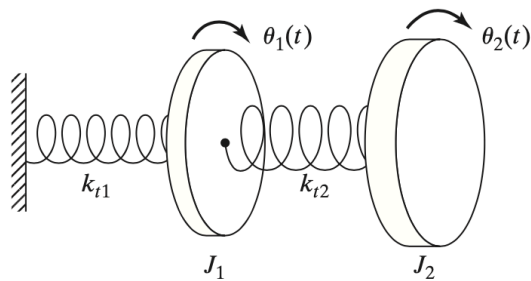
Single Cylinder Model "U"
Manufactured in two sizes
3 H. P. and 5½ H. P.

GRAY MOTOR C





(a)



(b)

Hipóteses:

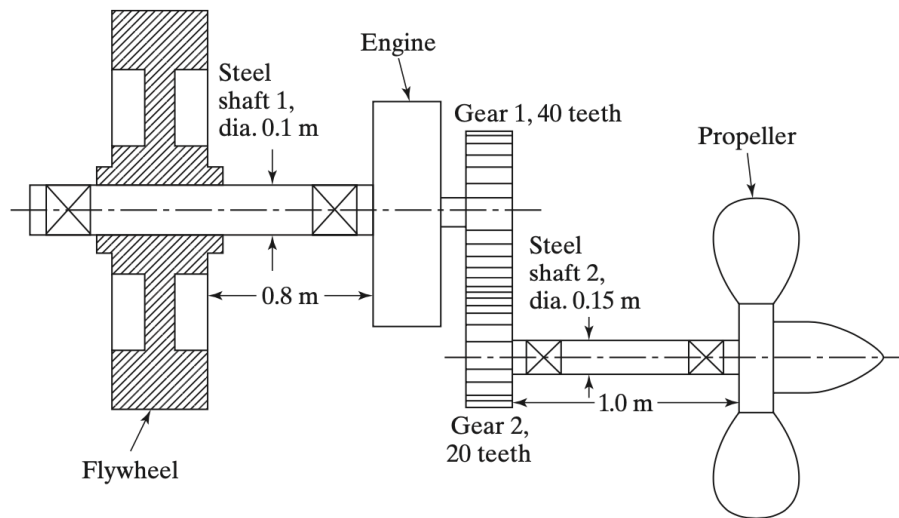
1. Como o momento de inércia do volante é muito maior que os dos demais elementos, podemos considerá-lo estacionário, com as vibrações determinadas em relação a ele (como se ele “não sentisse” a vibração do restante da linha).
2. A transmissão e as engrenagens podem ser consideradas como um único elemento em rotação com momento de inércia de massa equivalente.

Pela relação de engrenagens, a engrenagem 2 gira com o dobro da rotação do eixo 1.

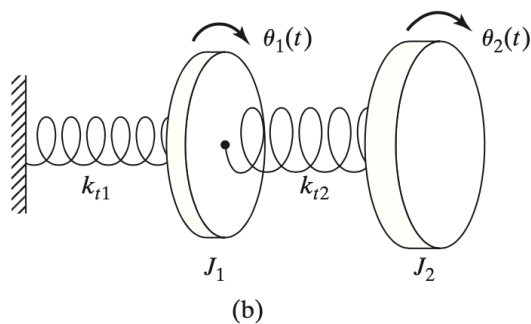
$$(J_{G2})_{eq} = (2)^2(150) = 600 \text{ kg-m}^2$$

O momento de inércia equivalente para o elemento 1
(motor + eng. 1+ eng. 2)

$$J_1 = J_E + J_{G1} + (J_{G2})_{eq} = 1000 + 250 + 600 = 1850 \text{ kg-m}^2$$



(a)



(b)

Hipóteses:

1. Como o momento de inércia do volante é muito maior que os dos demais elementos, podemos considerá-lo estacionário, com as vibrações determinadas em relação a ele (como se ele “não sentisse” a vibração do restante da linha).
2. A transmissão e as engrenagens podem ser consideradas como um único elemento em rotação com momento de inércia de massa equivalente.
3. Assim, reduzimos o problema a um sistema de 2 graus de liberdade.

Pela relação de engrenagens, a engrenagem 2 gira com o dobro da rotação do eixo 1.

$$(J_{G2})_{eq} = (2)^2(150) = 600 \text{ kg-m}^2$$

O momento de inércia equivalente para o elemento 1
(motor + eng. 1 + eng. 2)

$$J_1 = J_E + J_{G1} + (J_{G2})_{eq} = 1000 + 250 + 600 = 1850 \text{ kg-m}^2$$

O momento de inércia do hélice, que também gira com o dobro da rotação do eixo 1...

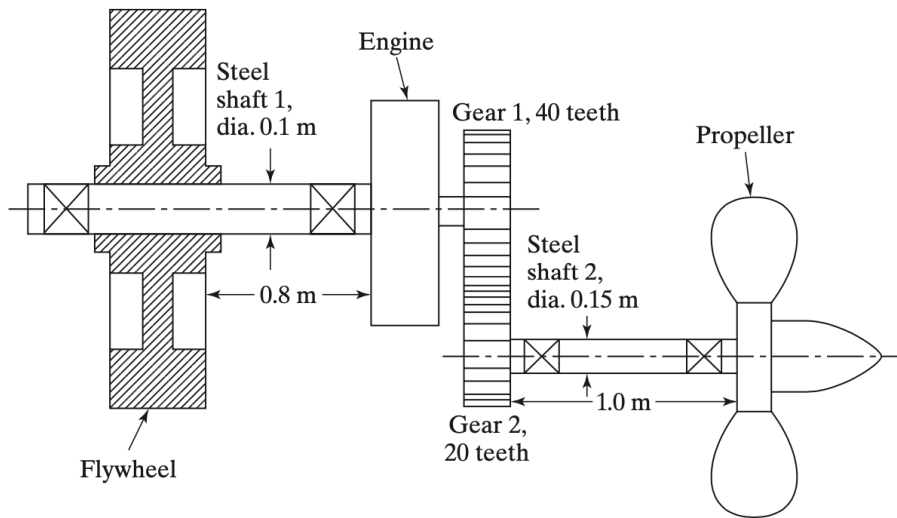
$$(J_P)_{eq} = (2)^2(2000) = 8000 \text{ kg-m}^2$$

Módulo de cisalhamento do aço (eixos): $G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

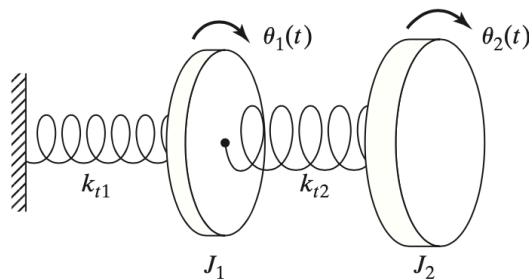
A rigidez torcional dos eixos será...

$$k_{t1} = \frac{GI_{01}}{l_1} = \frac{G}{l_1} \left(\frac{\pi d_1^4}{32} \right) = \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0.10)^4}{(0.8)(32)} = 981,750.0 \text{ N-m/rad}$$

$$k_{t2} = \frac{GI_{02}}{l_2} = \frac{G}{l_2} \left(\frac{\pi d_2^4}{32} \right) = \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0.15)^4}{(1.0)(32)} = 3,976,087.5 \text{ N-m/rad}$$



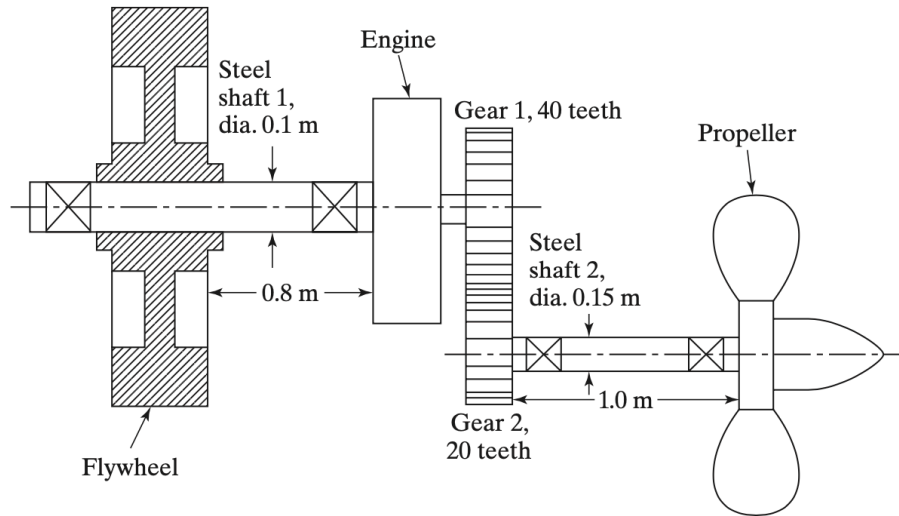
(a)



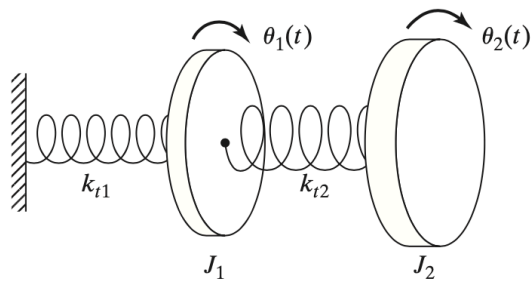
(b)

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1 J_2} \right\} \pm \left[\left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1 J_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})k_{t2} - k_{t2}^2}{J_1 J_2} \right\} \right]^{1/2}$$

Assim, as frequências naturais são...



(a)

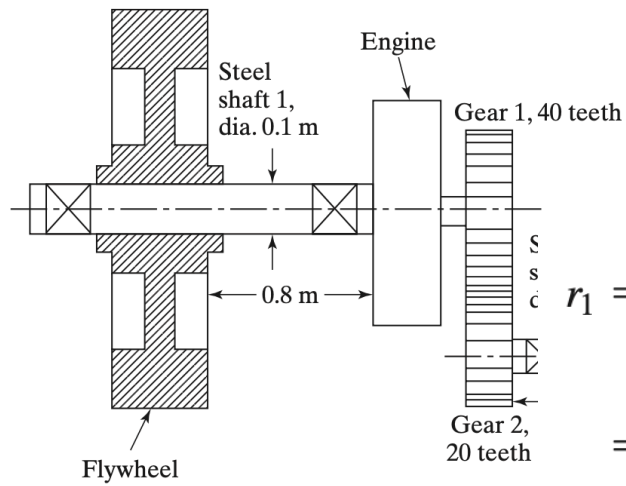


(b)

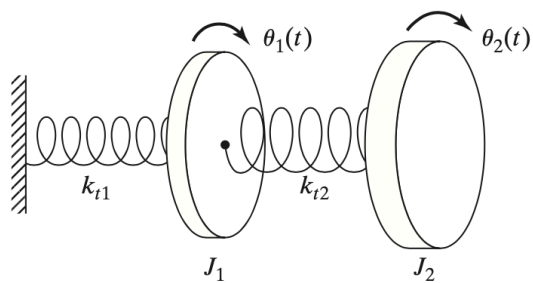
$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1 J_2} \right\} \pm \left[\left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1 J_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})k_{t2} - k_{t2}^2}{J_1 J_2} \right\} \right]^{1/2}$$

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2} \right\} \pm \left[\left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2} \right\}^2 - \frac{k_{t1}k_{t2}}{J_1 J_2} \right]^{1/2}$$

Substituindo os valores



(a)



(b)

$$\frac{(k_{t1} + k_{t2})}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2} = \frac{(98.1750 + 397.6087) \times 10^4}{2 \times 1850} + \frac{397.6087 \times 10^4}{2 \times 8000}$$

$$= 1588.46$$

$$r_1 = \frac{-J_1 \omega_1^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}}$$

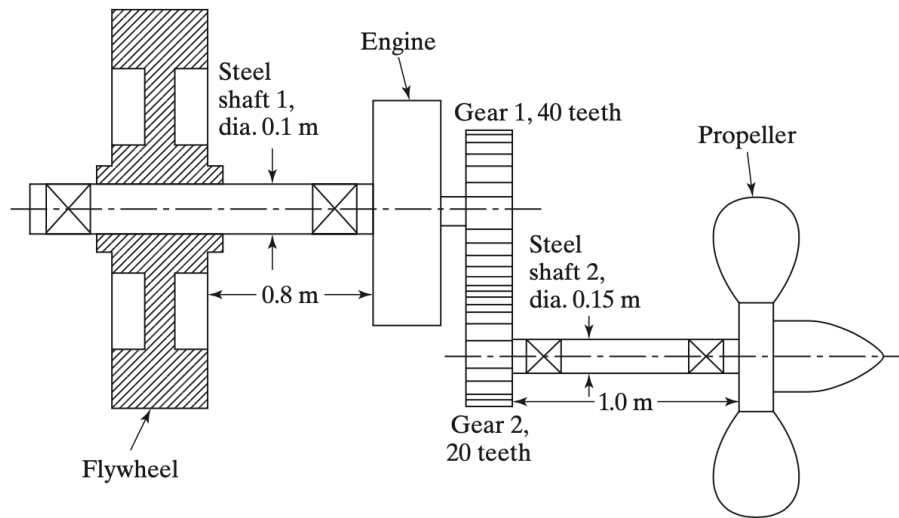
$$= \frac{-(1850)(85.3117) + (495.7837 \times 10^4)}{397.6087 \times 10^4} = 1.2072$$

$$\frac{187 \times 10^4}{26.3750 \times 10^4} = 26.3750 \times 10^4$$

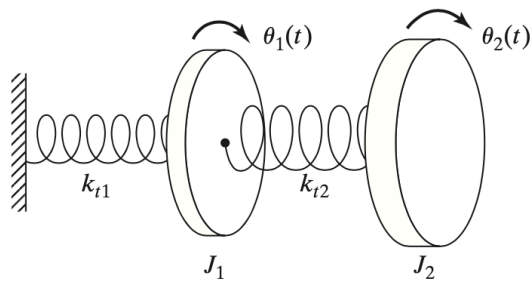
DS...

$$\omega_1 = 9.2364 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 55.6022 \text{ rad/s}$$



(a)



(b)

$$\omega_1 = 9.2364 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 55.6022 \text{ rad/s}$$

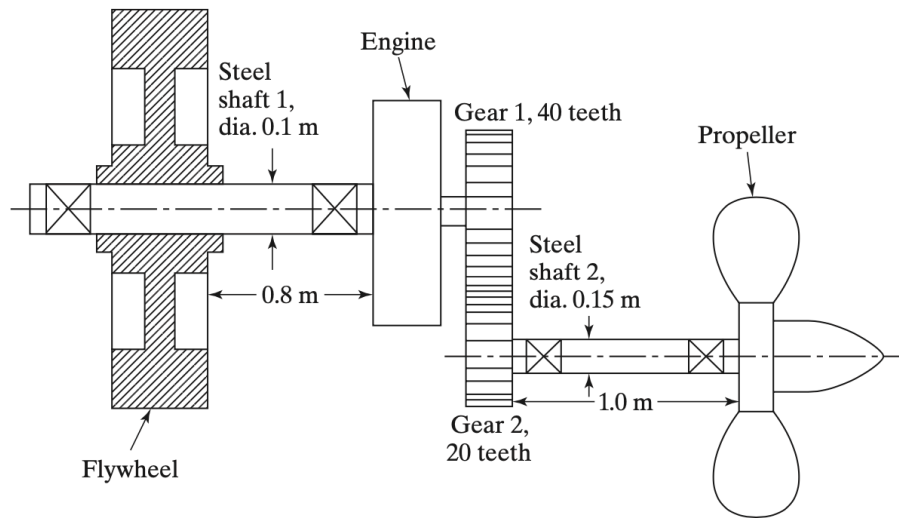
E encontramos as relações de amplitudes...

$$r_1 = \frac{-J_1\omega_1^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}}$$

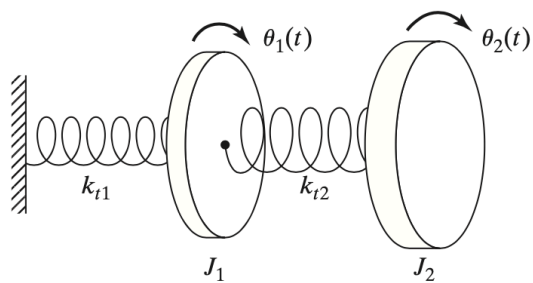
$$= \frac{-(1850)(85.3117) + (495.7837 \times 10^4)}{397.6087 \times 10^4} = 1.2072$$

$$r_2 = \frac{-J_1\omega_2^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}}$$

$$= \frac{-(1850)(3091.6083) + (495.7837 \times 10^4)}{397.6087 \times 10^4} = -0.1916$$



(a)



(b)

$$\omega_1 = 9.2364 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 55.6022 \text{ rad/s}$$

E os modos associados...

$$\begin{Bmatrix} \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1.2072}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{-0.1916}$$

Vibração forçada com dois graus de liberdade

A equação do movimento para dois graus de liberdade

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Com a excitação por uma força harmônica nas massas...

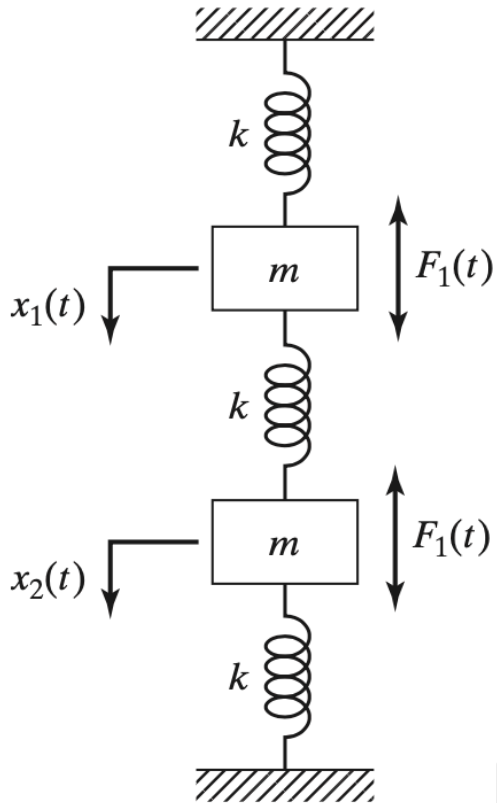
$$F_j(t) = F_{j0}e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2$$

A solução em regime permanente será

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2$$

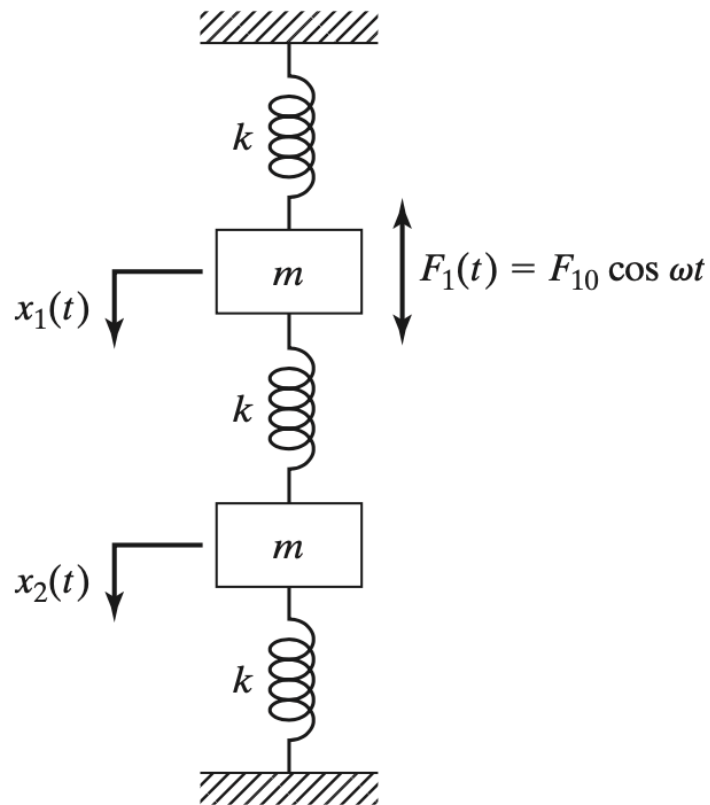
Derivando e substituindo...

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) & (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$



$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$



Retomemos as condições do exemplo anterior, com a excitação pela força na massa 1:

$$F_1(t) = F_{10} \cos \omega t.$$

A equação do movimento será

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E assumindo solução harmônica

$$x_j(t) = X_j \cos \omega t,$$

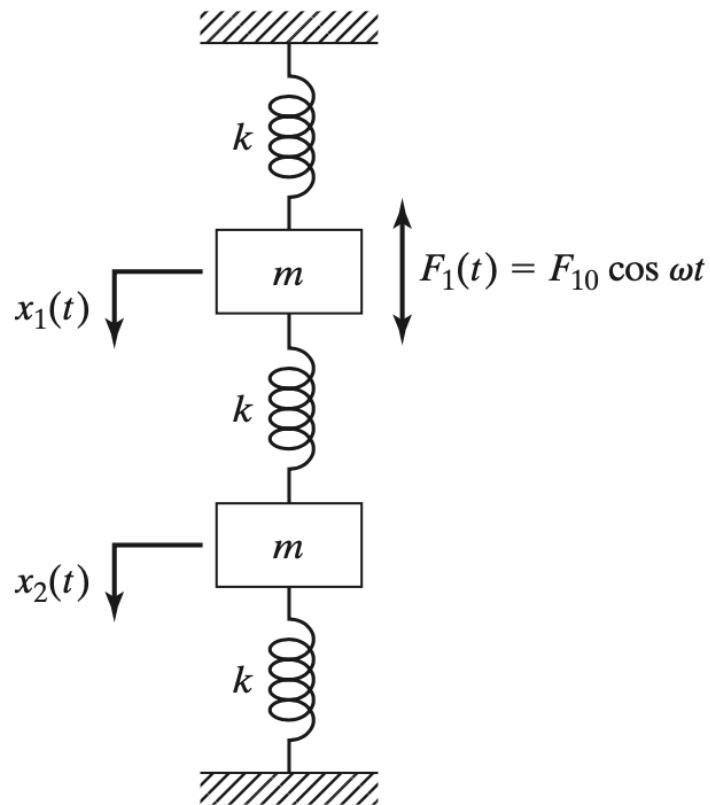
Obtemos as amplitudes de resposta

$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m + 2k) F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-\omega^2 m + 2k) F_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

$$X_2(\omega) = \frac{k F_{10}}{(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{k F_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$



Lembrando da relação de frequências naturais dos dois modos...

$$\omega_1^2 = k/m \quad \omega_2^2 = 3k/m$$

Reescrevemos

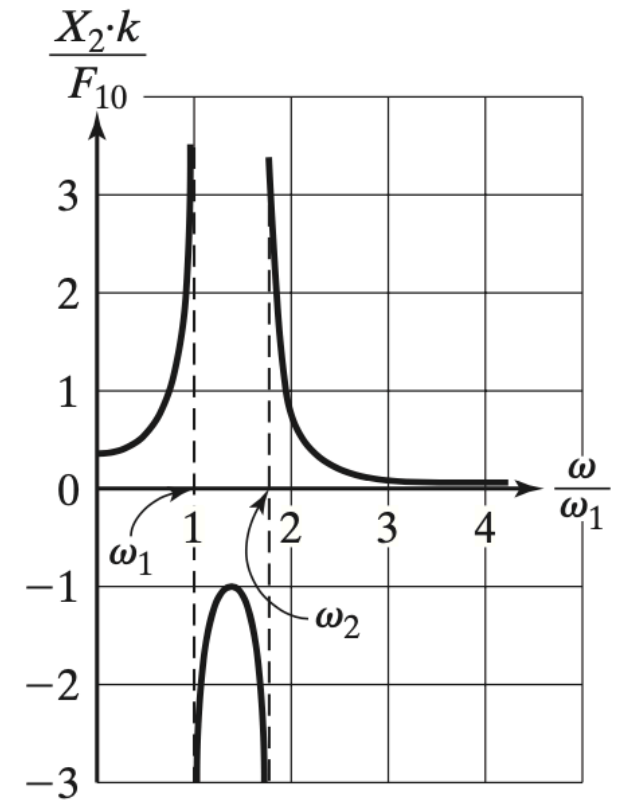
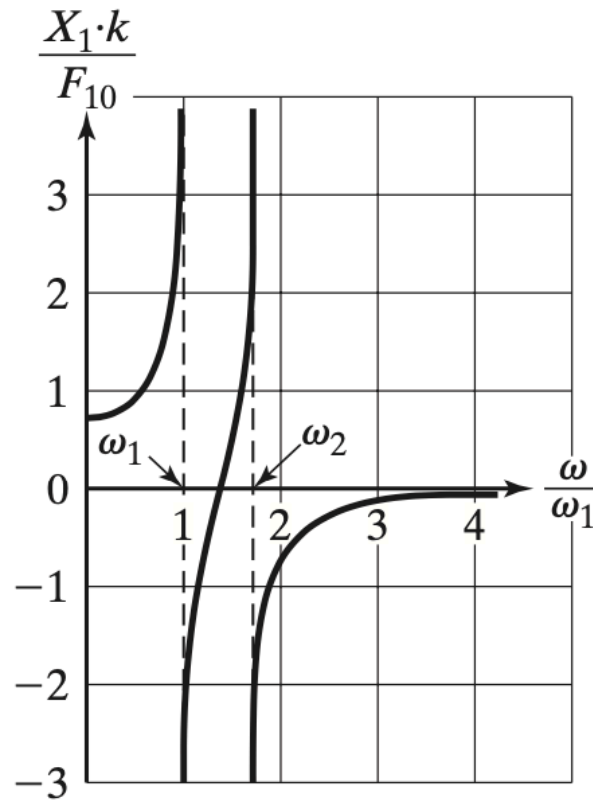
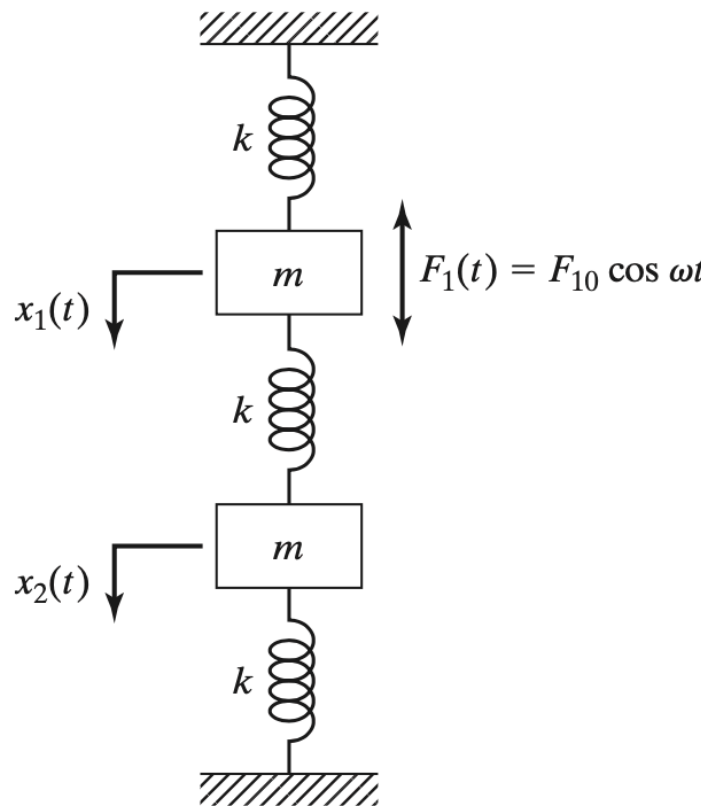
$$X_1(\omega) = \frac{\left\{ 2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right\} F_{10}}{k \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]}$$

$$X_2(\omega) = \frac{F_{10}}{k \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]}$$

Que nos permite analisar as respostas das massas em função da frequência de excitação.

$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

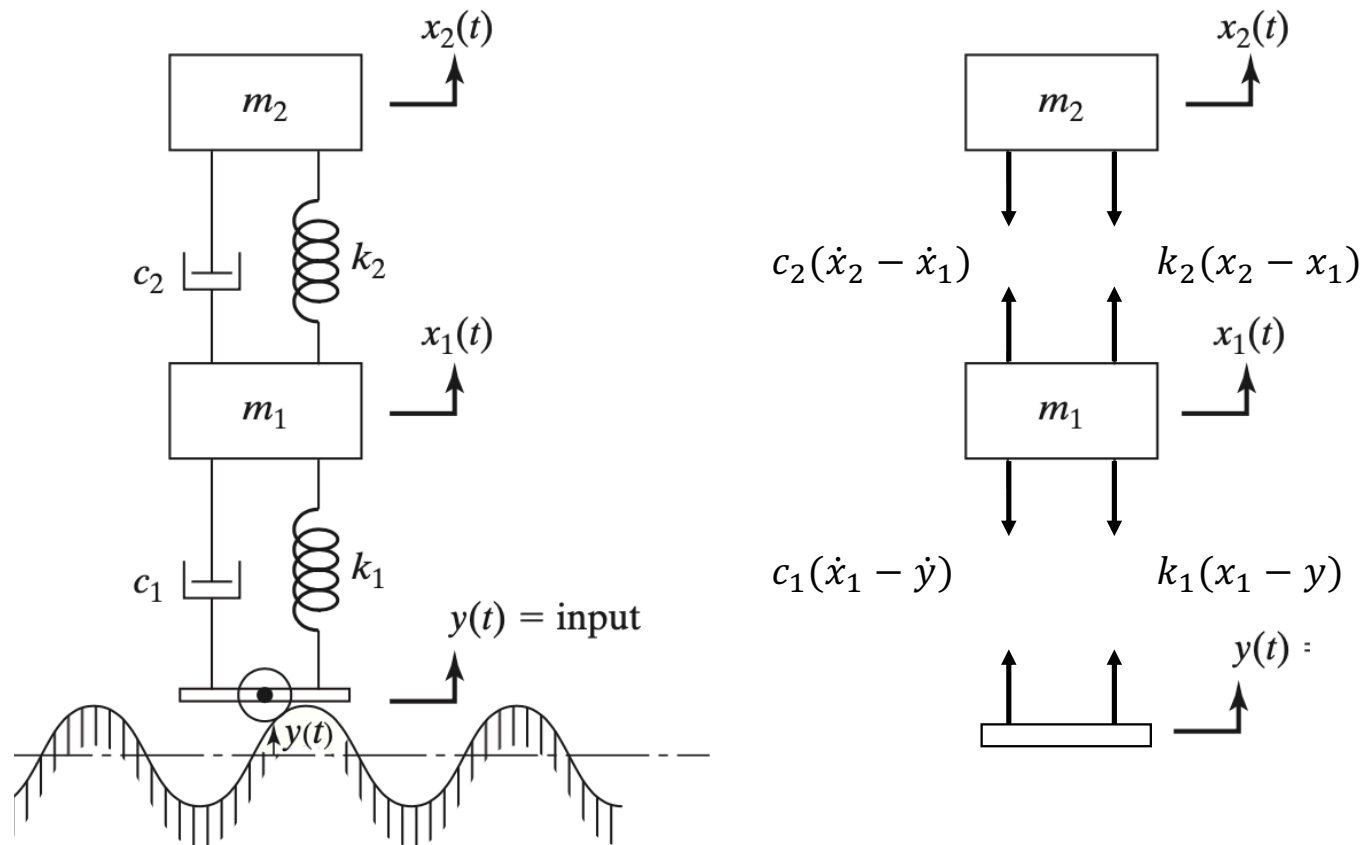


Consegue identificar algo singular na resposta da massa 1
(na qual a força está sendo aplicada)?

Vibração amortecida com dois graus de liberdade com movimento da base

Já vimos como o movimento da base pode ser transferido como uma força aplicada na massa.

Assim, o diagrama de corpo livre fica...



A equação do movimento será...

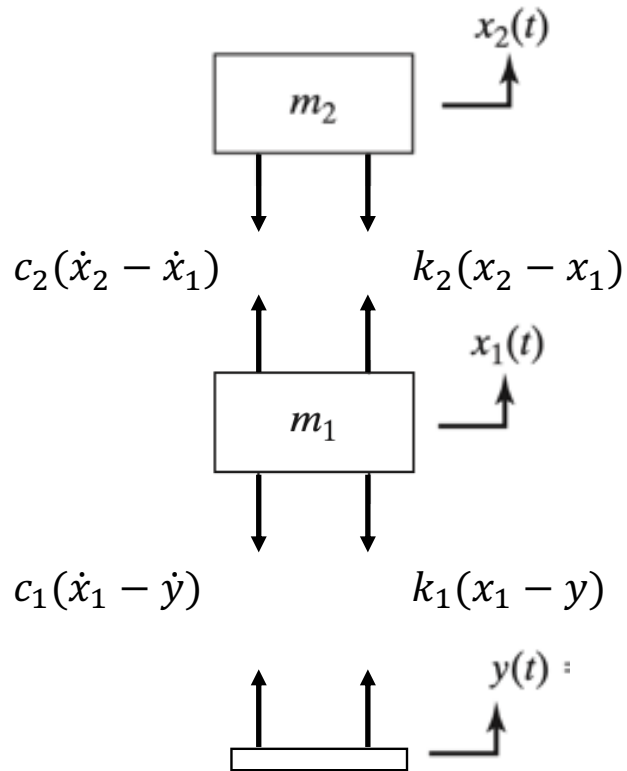
$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

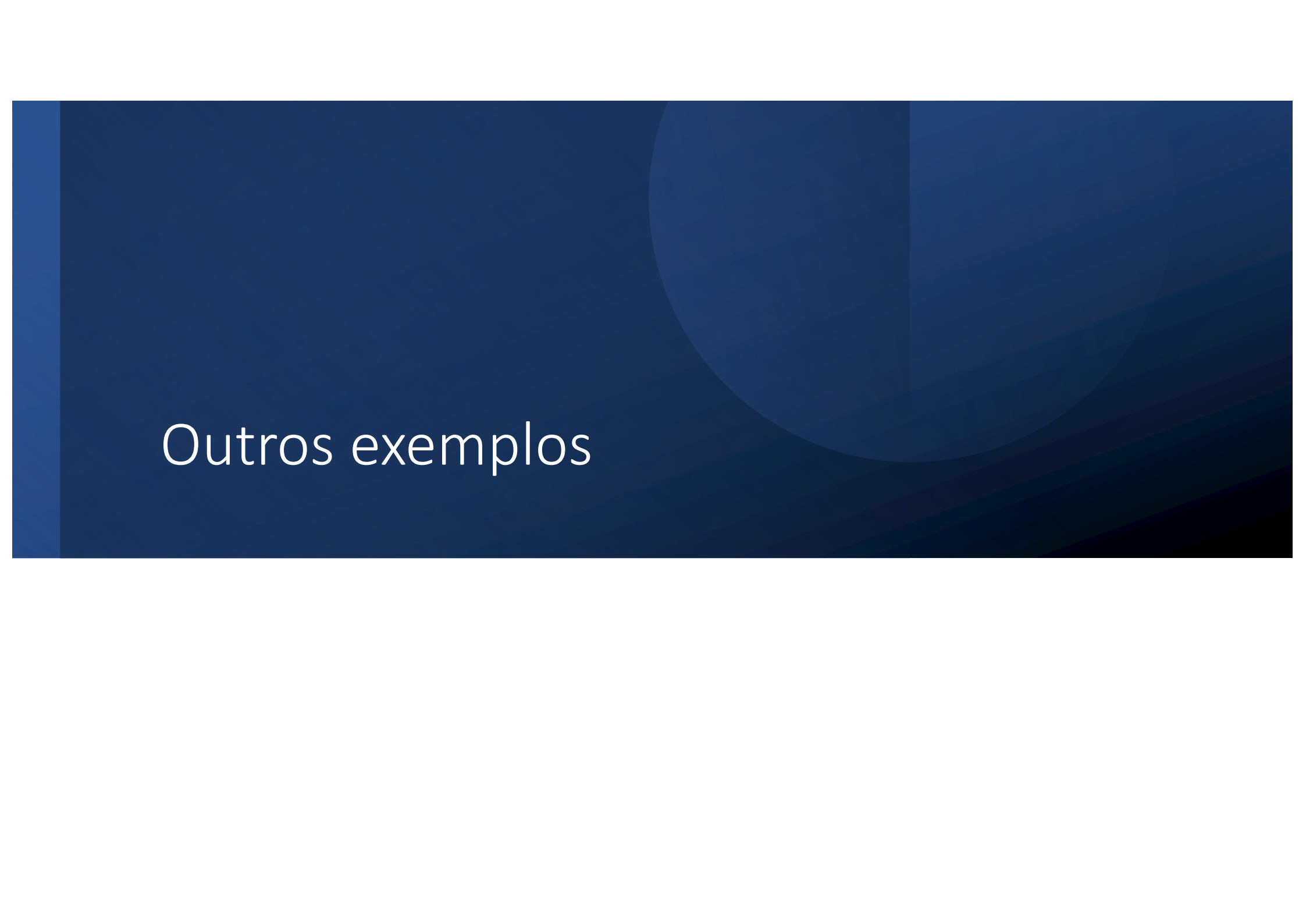
$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{y}) + k_1(x_1 - y) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \dot{y} + k_1 y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Repare nos acoplamentos!



The background is a dark blue gradient. On the left, there is a vertical bar of a slightly lighter blue. In the upper right, there are faint, overlapping circular and curved shapes in various shades of blue and dark blue.

Outros exemplos

Pêndulo duplo

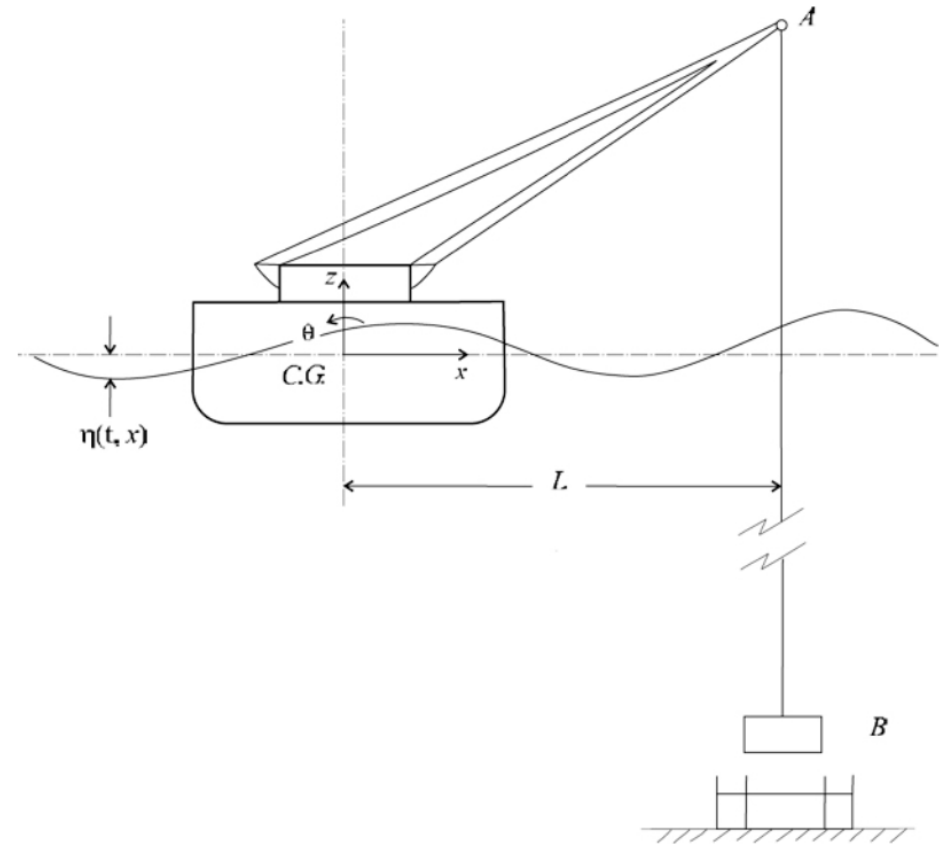
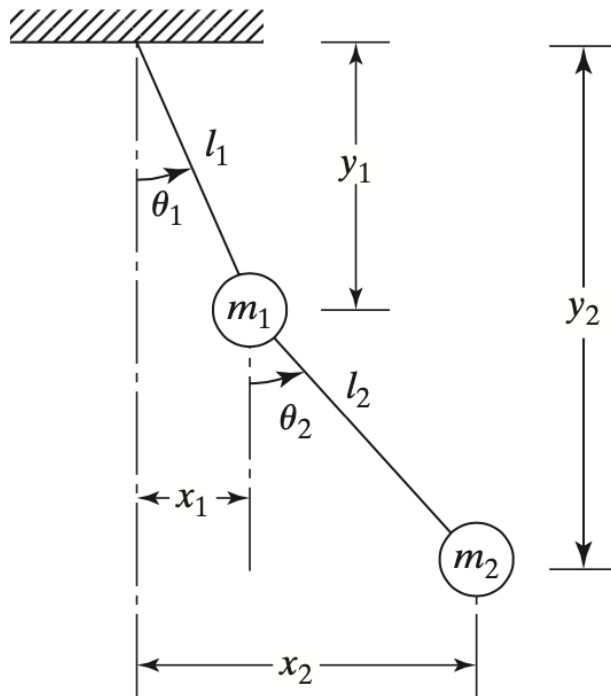


Figure 5.3 A crane vessel for installation of subsea equipment

Escrevendo as equações do movimento.

Tomando momentos ao redor de O para massa 1:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g (l_1 \sin \theta_1) + T_2 \sin \theta_2 (l_1 \cos \theta_1) - T_2 \cos \theta_2 (l_1 \sin \theta_1)$$

Assumindo ângulos pequenos e $T_2 \approx m_2 g$, obtemos

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \theta_1 + m_2 g l_1 (\theta_2 - \theta_1)$$

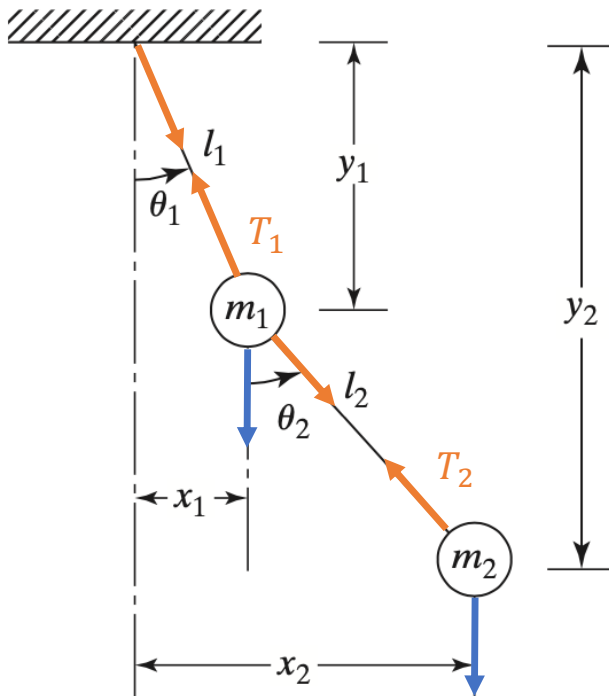
Para a massa 2, em relação ao polo na massa 1:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 (l_1 \ddot{\theta}_1) = -m_2 g (l_2 \sin \theta_2) = m_2 g l_2 \theta_2$$

Transformando nas coordenadas horizontais, para facilitar a interpretação dos modos... Tal que $\theta_1 = x_1/l_1$ e $\theta_2 = (x_2 - x_1)/l_2$

$$m_1 l_1 \ddot{x}_1 + \left[m_1 g + m_2 g \left(\frac{l_1 + l_2}{l_2} \right) \right] x_1 - \frac{m_2 g l_1}{l_2} x_2 = 0$$

$$m_2 l_2 \ddot{x}_2 - m_2 g x_1 + m_2 g x_2 = 0$$



Simplificando para $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$

$$ml\ddot{x}_1 + 3mgx_1 - mgx_2 = 0$$

$$ml\ddot{x}_2 - mgx_1 + mgx_2 = 0$$

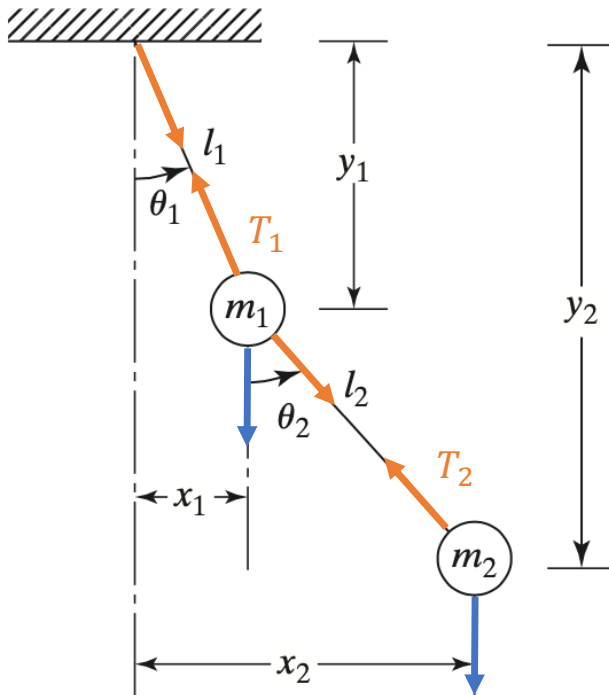
Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} ml & 0 \\ 0 & ml \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3mg & -mg \\ -mg & mg \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema (pela equação característica), obtemos

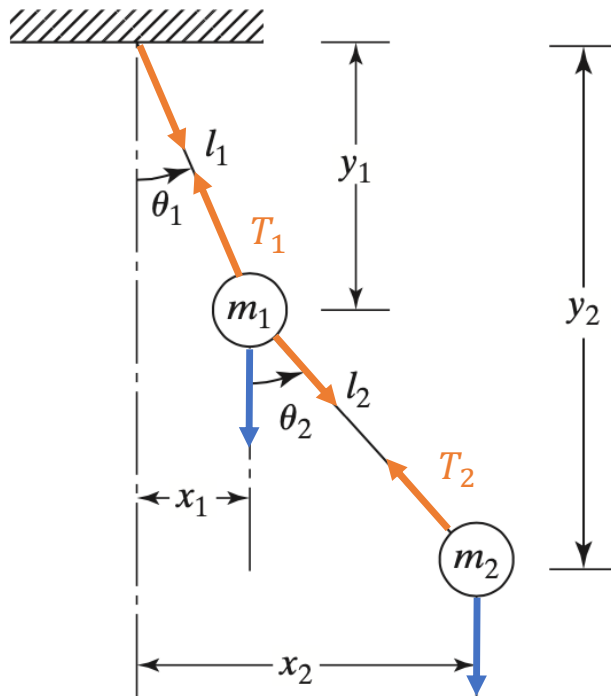
$$\omega_1^2, \omega_2^2 = (2 \pm \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

$$\omega_1 = 0,76 \frac{g}{l} \quad \omega_2 = 1,85 \frac{g}{l}$$



As razões de amplitude são dadas por

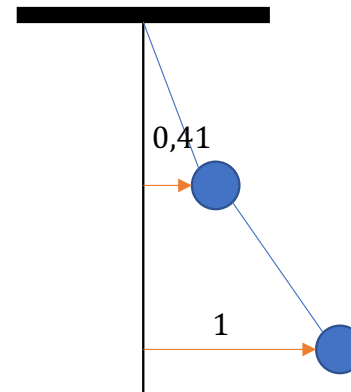
$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{mg}{-\omega^2 ml + 3mg}$$



Primeiro modo

$$\omega_1 = 0,76 \frac{g}{l}$$

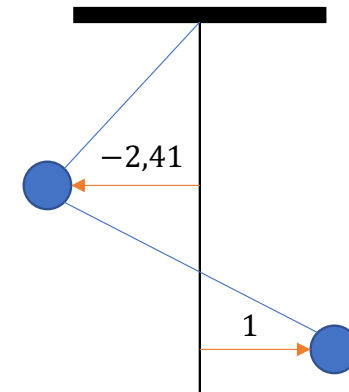
$$r_1 = \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{(1)} = 0,41$$



Segundo modo

$$\omega_1 = 1,85 \frac{g}{l}$$

$$r_2 = \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{(2)} = -2,41$$



Simulação

- <https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>

Como seria modelado esse pêndulo duplo?

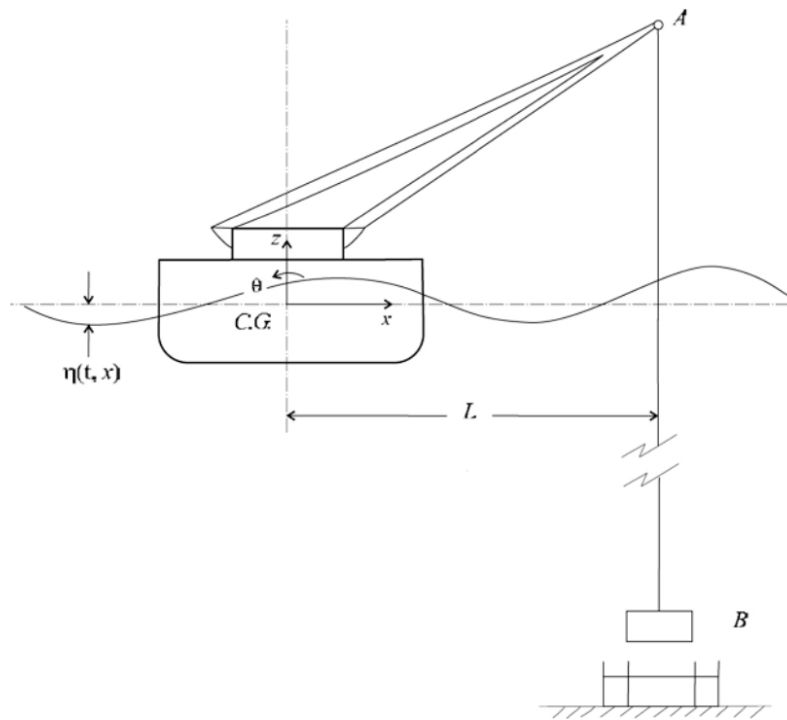


Figure 5.3 A crane vessel for installation of subsea equipment

