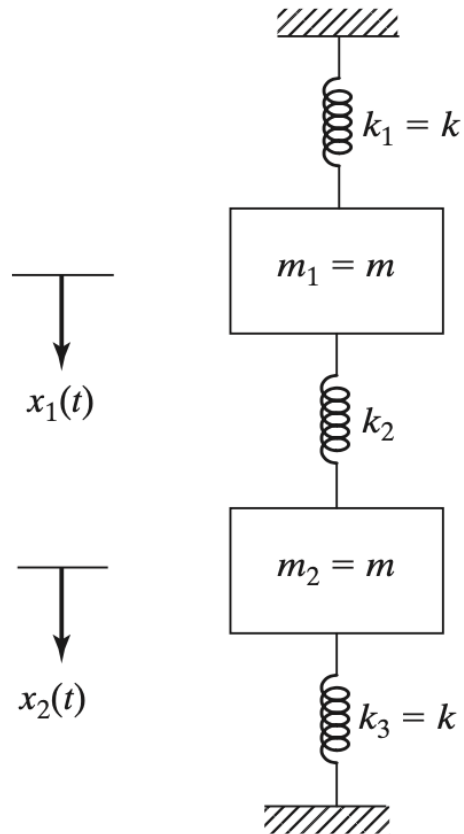


Dinâmica de Sistemas Navais e Oceânicos

PNV3314 Dinâmica de Sistemas

Aula 18

Vibração com dois graus de liberdade:
simplificação para mesma massa e mola



$$m_1 = m_2 = m \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k$$

Equações do movimento

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

Assumindo solução harmônica do tipo

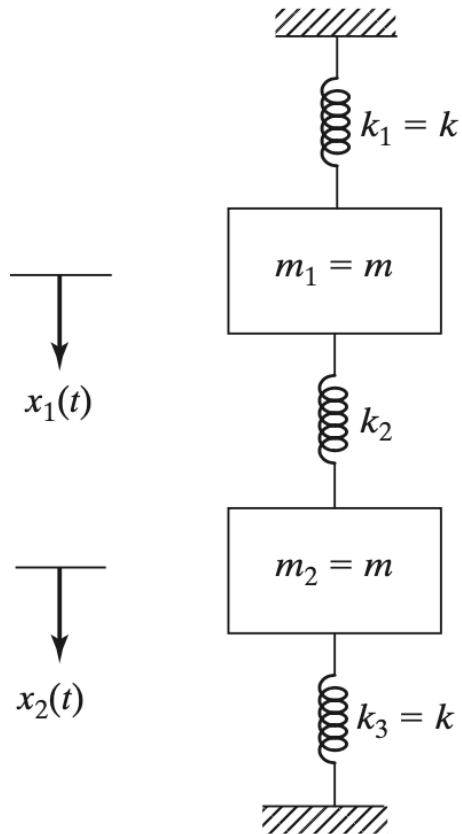
$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \phi); i = 1, 2$$

Derivando e substituindo nas eq. do movimento...

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2 + 2k) & (-k) \\ (-k) & (-m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0$$

Prodiz a eq. característica de frequência

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$



As frequências naturais, ou os autovalores (valores característicos)

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

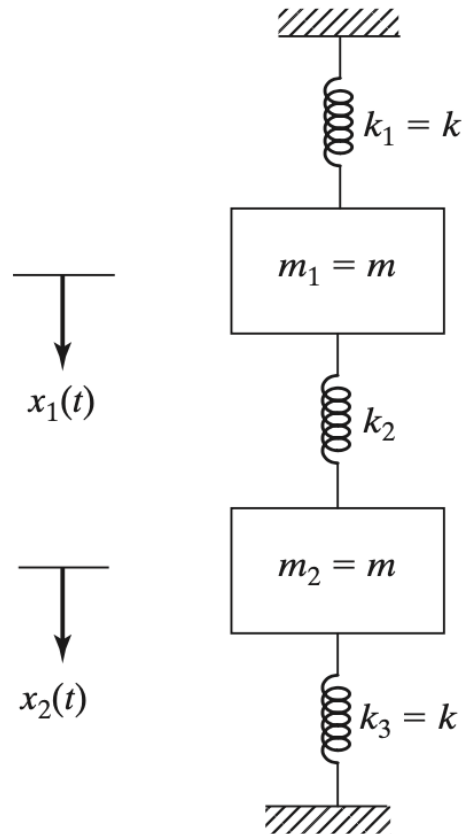
As raízes da eq. característica são

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \left\{ \frac{4km - [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= \left\{ \frac{4km + [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned} \right. \quad 1,7$$

E as razões de amplitude são

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1$$



Que produz os modos de vibrar

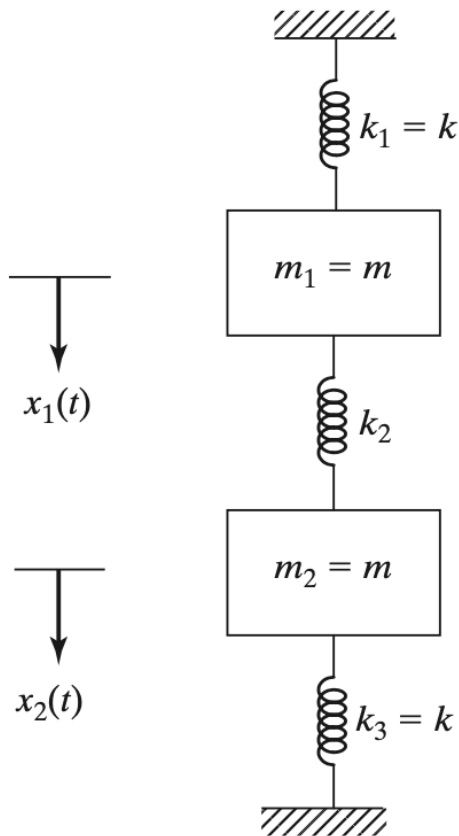
Os modos naturais de vibrar, ou os autovetores

Primeiro modo

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

Primeiro modo

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$



Primeiro
modo

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \end{Bmatrix}$$

Primeiro
modo

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{Bmatrix}$$

As condições iniciais
únicas para excitar cada
modo são

$$x_1(0) = x_2(0)$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$$

$$x_1(0) = -x_2(0)$$

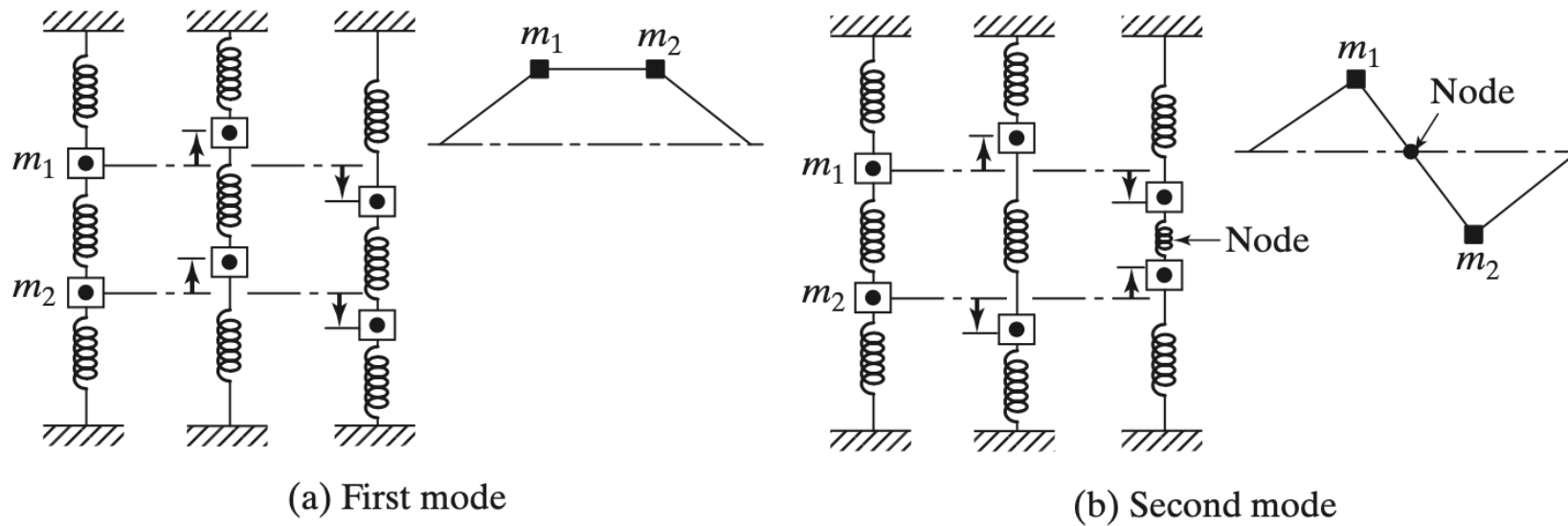
$$\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$$

Quaisquer outras condições iniciais diferentes destas
excitarão uma combinação dos modos.

A solução geral do sistema é composta por

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$



Simulação

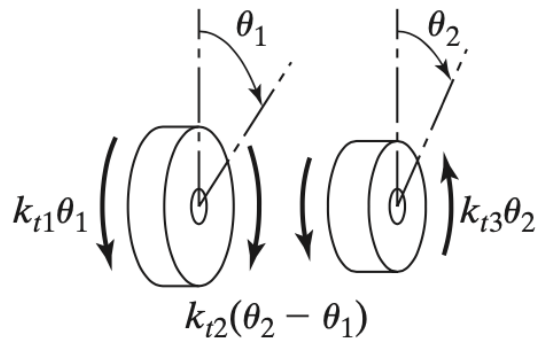
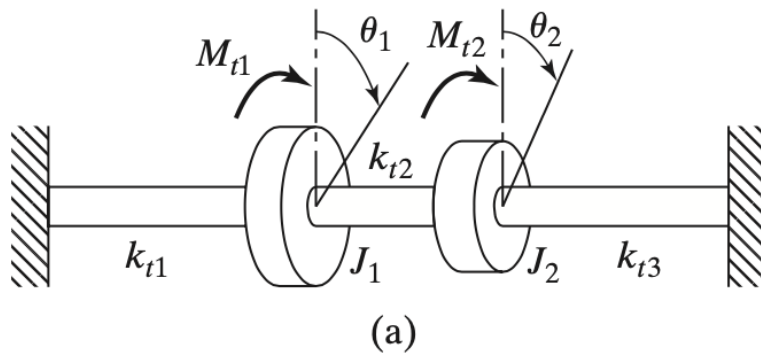
- <https://www.myphysicslab.com/springs/double-spring-en.html>

Duas massas com 3 molas.

Duas massas com duas molas.

Ilustração do comportamento possível para o manifold.

Sistema torsional



As equações do movimento para a torção

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -k_{t1}\theta_1 + k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) + M_{t1}$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t3}\theta_2 + M_{t2}$$

Que podem ser rearranjadas...

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1}$$

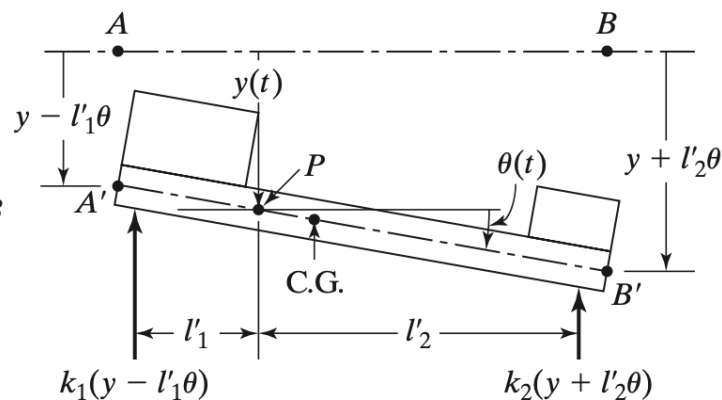
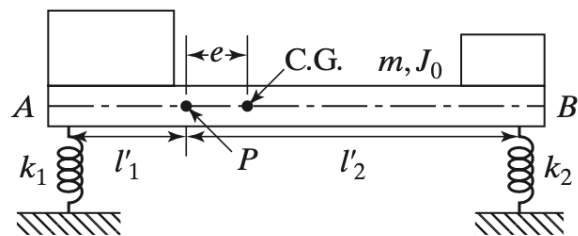
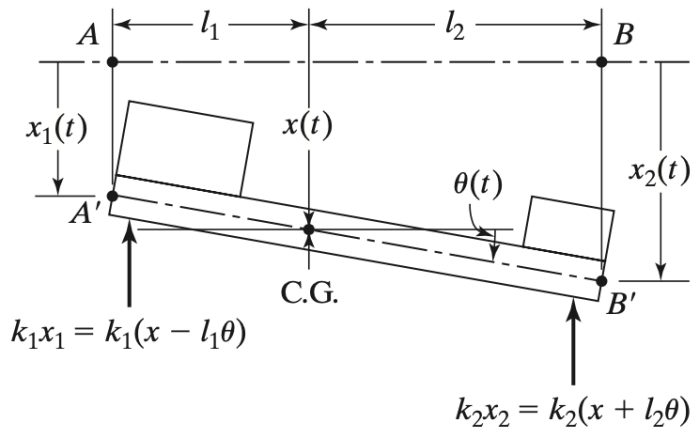
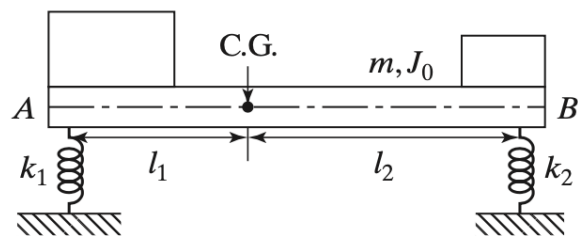
$$J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = M_{t2}$$

Para
oscilação
livre

0

Sistema equivalente ao que vimos anteriormente.
Portanto, a solução se dará da mesma forma que a
vibração das massas.

Coordenadas acopladas e coordenadas principais



Sabemos que um sistema com n graus de liberdade requerá n coordenadas independentes para representar sua configuração.

Existirão vários conjuntos de coordenadas generalizadas, cada um com n coordenadas independentes, para representar o sistema.

Por exemplo:

(x_1, x_2)

(x, θ)

(x_1, θ)

(y, θ)

Todas são coordenadas generalizadas

Vamos analisar o sistema através de dois destes conjuntos.

Primeiro, usando (x, θ)

As eq. do movimento nas duas direções são

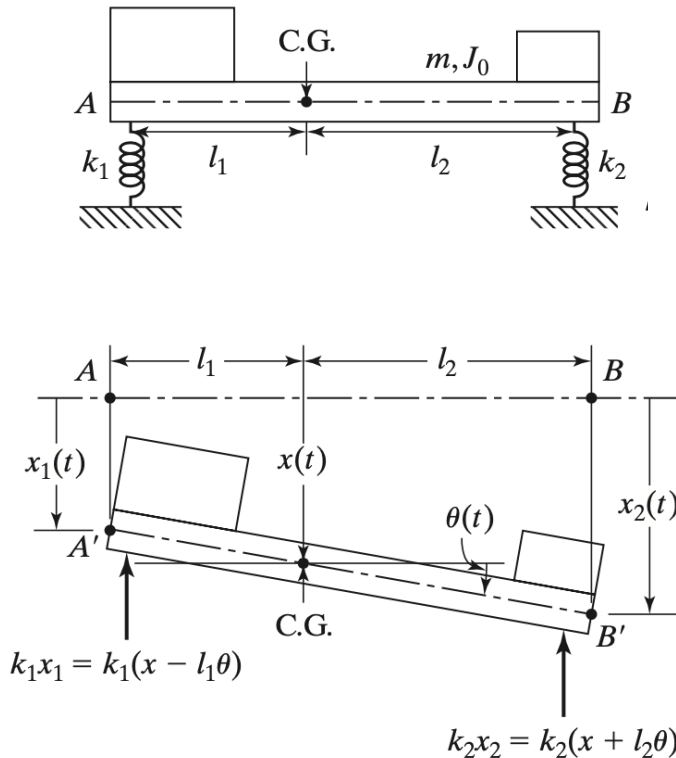
$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) \quad \text{Forças na vertical}$$

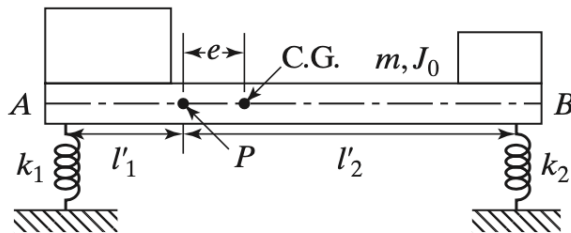
$$J_0\ddot{\theta} = k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2 \quad \text{Momentos ao redor do CG}$$

Escritas de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & (k_1l_1^2 + k_2l_2^2) \end{bmatrix}}_{\text{Acoplamento elástico}} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Acoplamento elástico



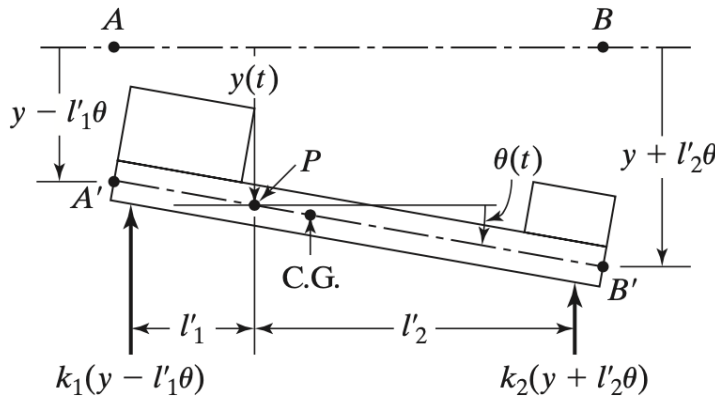


Segundo, usando (y, θ)

As eq. do movimento nas duas direções são

$$m\ddot{y} = -k_1(y - l'_1\theta) - k_2(y + l'_2\theta) - me\ddot{\theta} \quad \text{Forças na vertical}$$

$$J_p\ddot{\theta} = k_1(y - l'_1\theta)l'_1 - k_2(y + l'_2\theta)l'_2 - me\ddot{y} \quad \text{Momentos ao redor de P}$$



Momento estático

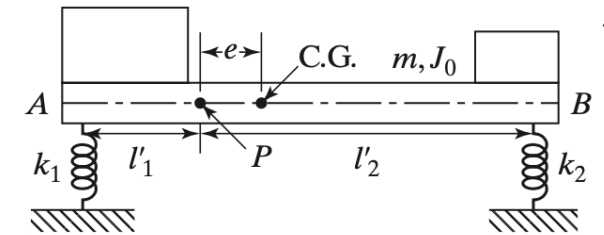
Escritas de forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_p \end{bmatrix}}_{\text{Acoplamento inercial}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\text{Momento estático}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2l'_2 - k_1l'_1) \\ (-k_1l'_1 + k_2l'_2) & (k_1l'^2_1 + k_2l'^2_2) \end{bmatrix}}_{\text{Acoplamento elástico}} \underbrace{\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}}_{\text{Deslocamentos}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Acoplamento inercial

Acoplamento elástico

De forma geral



Matriz de
inércia

Matriz de
amortecimento

Matriz de
rigidez

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\text{Acoplamento inercial}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\text{Acoplamento de amortecimento}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\text{Acoplamento elástico}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Acoplamento inercial

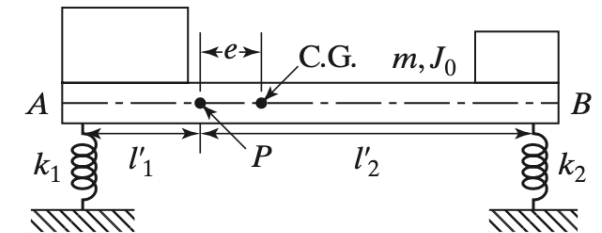
Acoplamento de
amortecimento

Acoplamento elástico

Acoplamento dinâmico

Acoplamento estático

De forma geral



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O sistema vibra independentemente do sistema de coordenadas, que é apenas uma conveniência.

Mas os “acoplamentos aparecem” em função do sistema de coordenadas adotado.

As coordenadas generalizadas que produzem um sistema desacoplado estática e dinamicamente são chamadas de *coordenadas principais* (ou naturais) e produzem matrizes diagonais

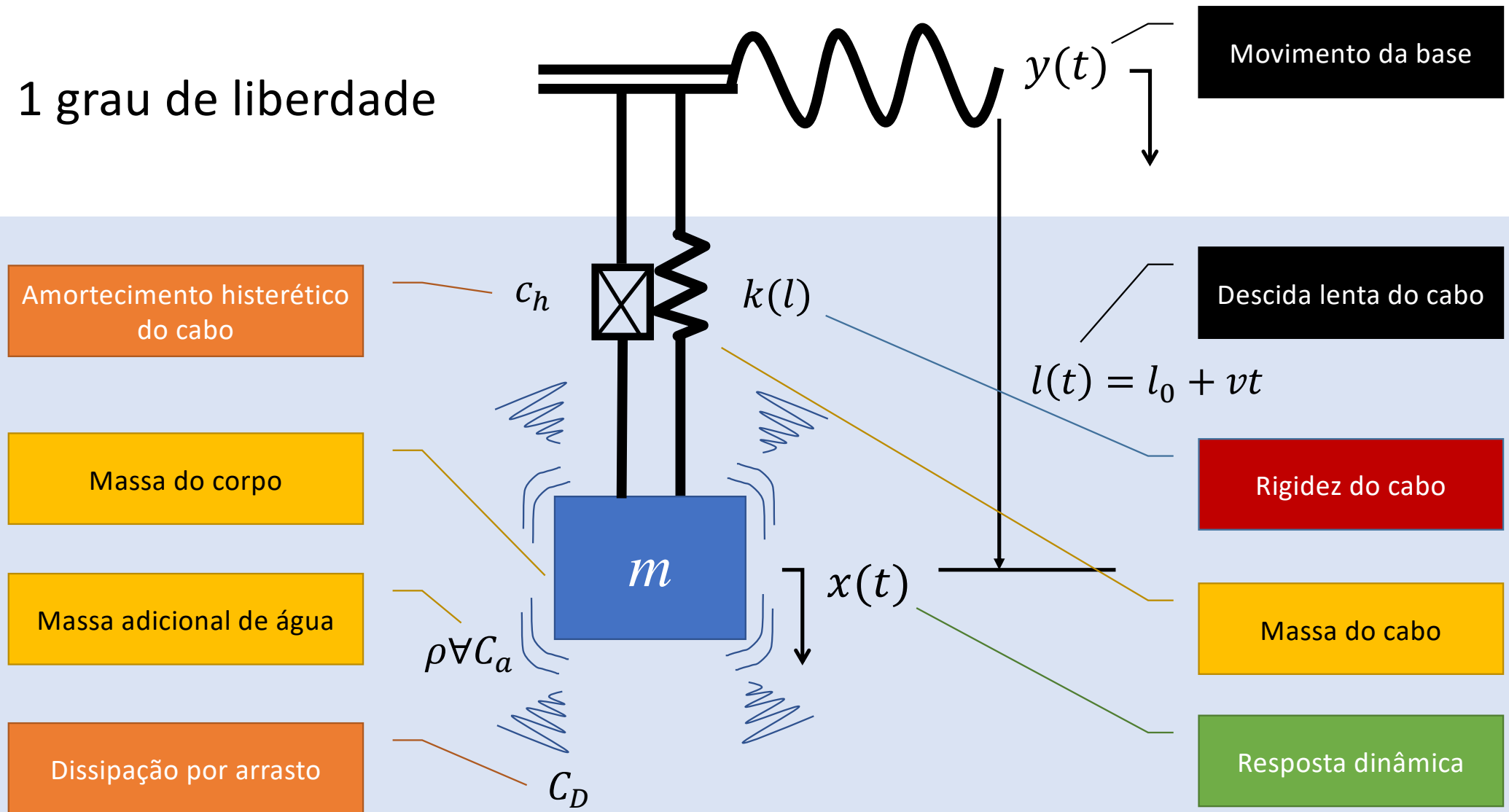
Simulação

- <https://www.myphysicslab.com>

2GL: Carro com pêndulo (translação e rotação).

Lançamento do manifold: cálculos
preliminaries para oscilação livre

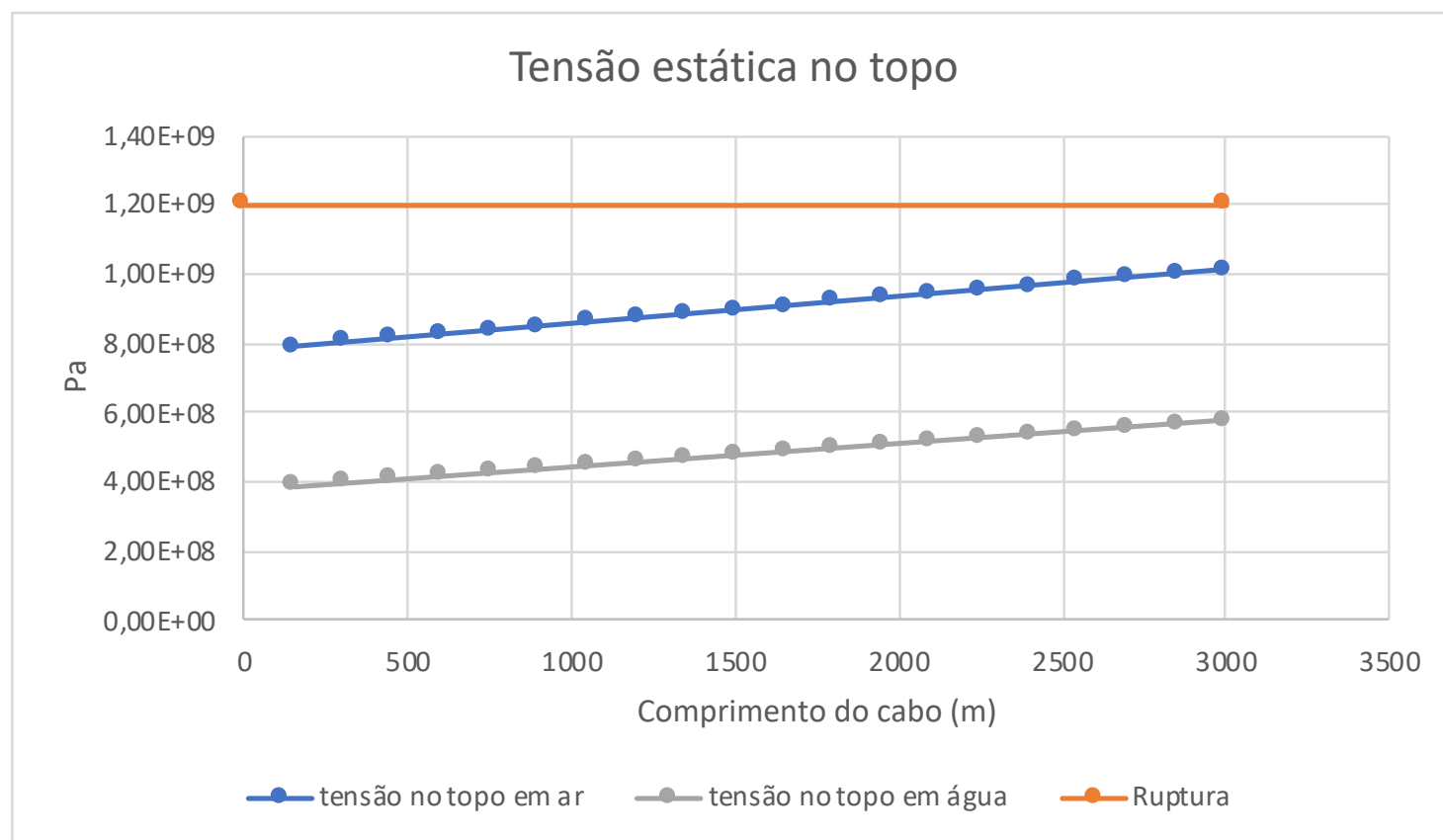
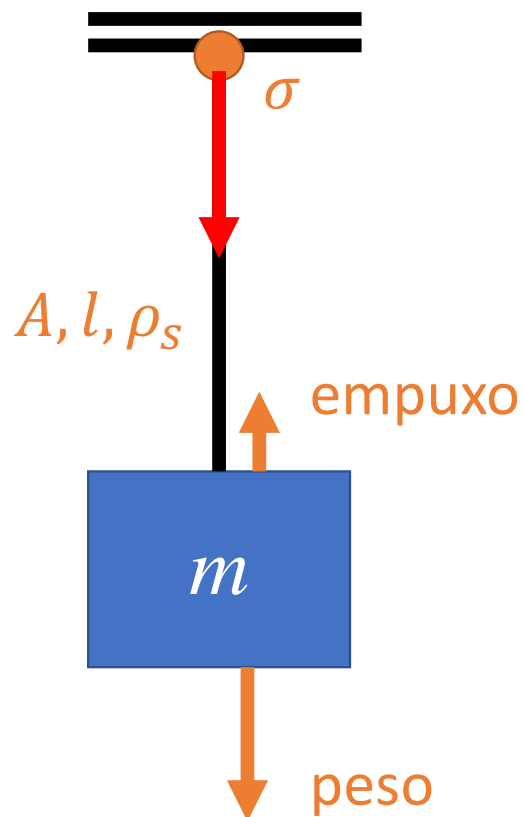
1 grau de liberdade



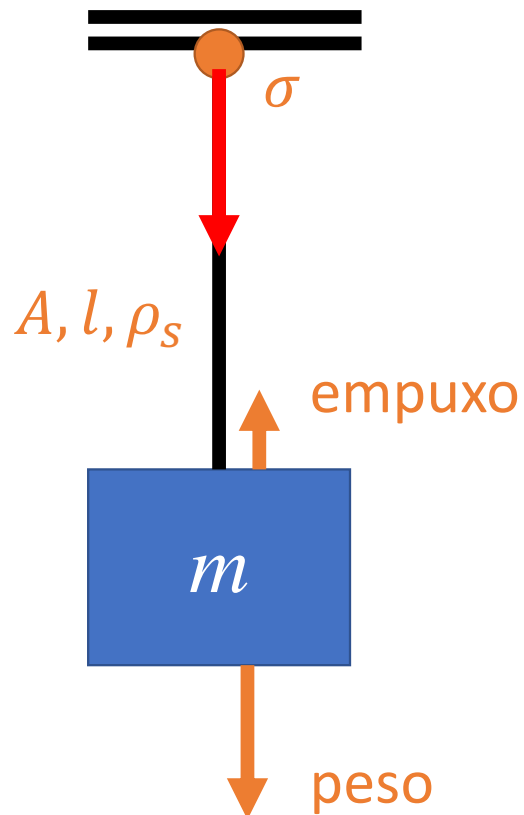
Dados para simulação

- Condição do mar
 - $T = 7s$
 - $Y = 2m$, amplitude de heave do navio
 - Profundidade: 3000m
 - $\rho_{mar} = 1030kg/m^3$
- Dados do manifold
 - $m = 100t$
 - $C_a = 0,8$
 - $C_d = 1,2$
 - $V = 50m^3$
 - $L = 8m$
 - $B = 5m$
 - $H = 4m$
- Dados do cabo de aço
 - $d = 40mm$
 - $\rho_{mar} = 7860kg/m^3$
 - $E = 150GPa$
 - Tensão de ruptura: 1,2GPa
 - Fator de histerese: $\Delta U/U = 0,2$
- Considere
 - Massa estrutural, massa adicional, massa participativa do cabo.
 - Amortecimento histerético do cabo.
 - Amortecimento hidrodinâmico de arrasto.
 - Movimento de heave imposto no navio.

Verificação da tensão estática no topo



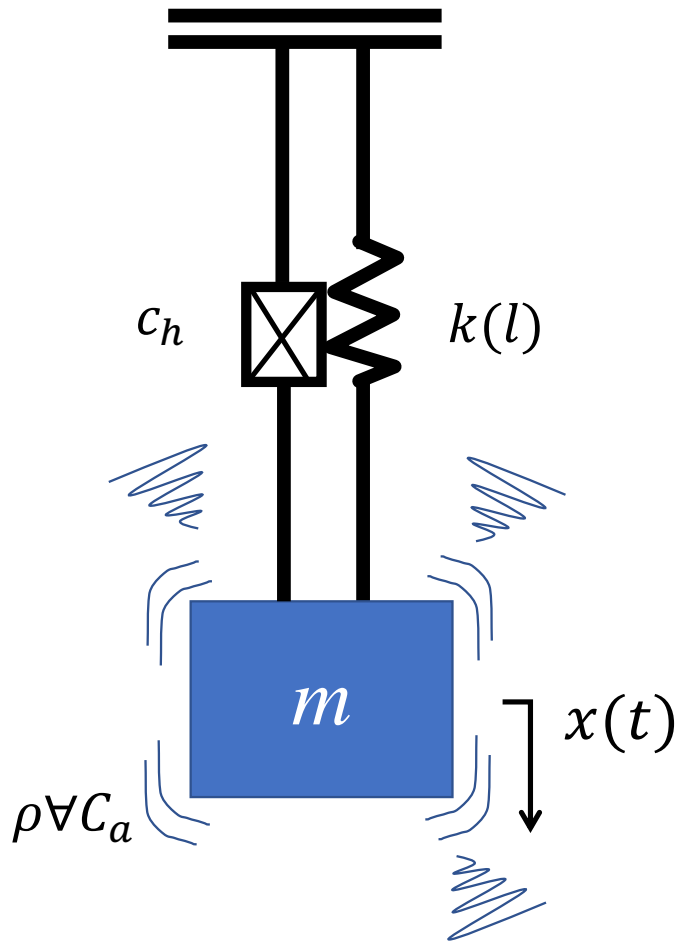
Verificação da tensão estática no topo



$$\sigma = \frac{(mg - \rho g V) + (\rho_s g A l - \rho g A l)}{A}$$

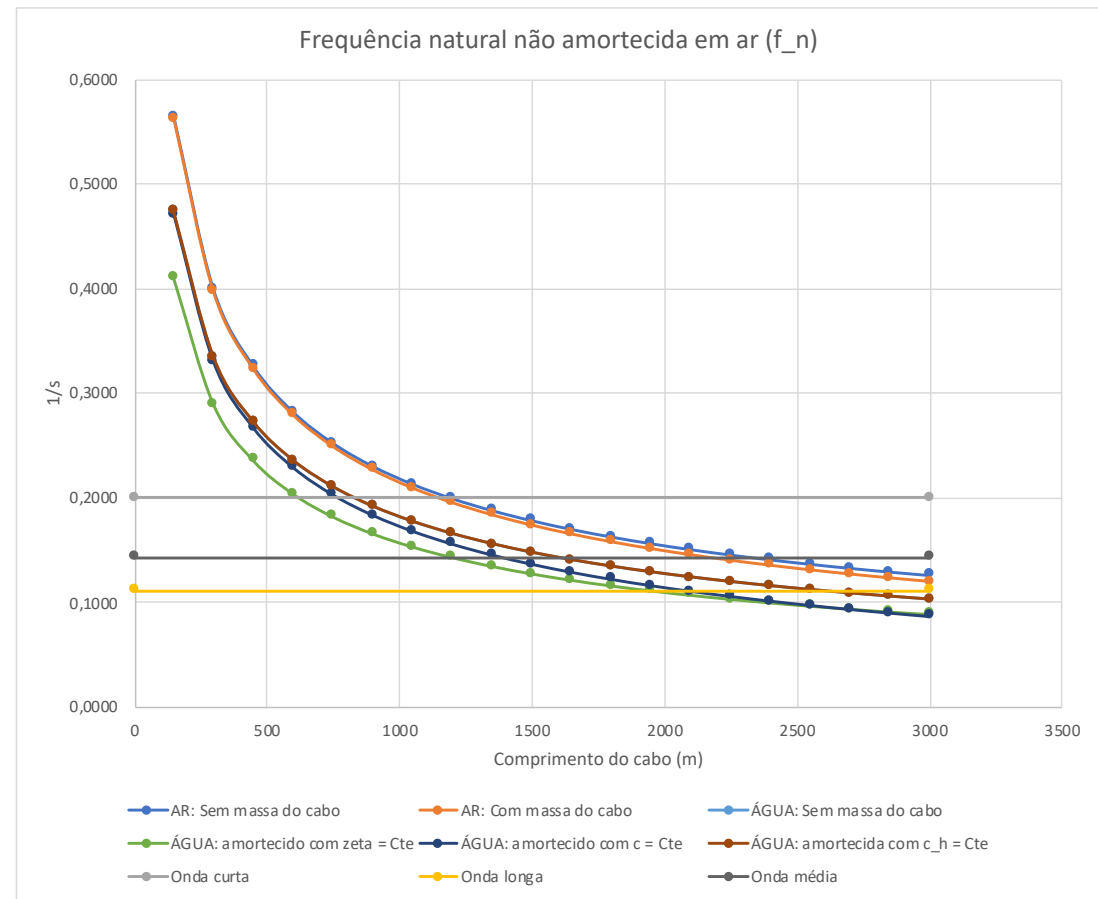
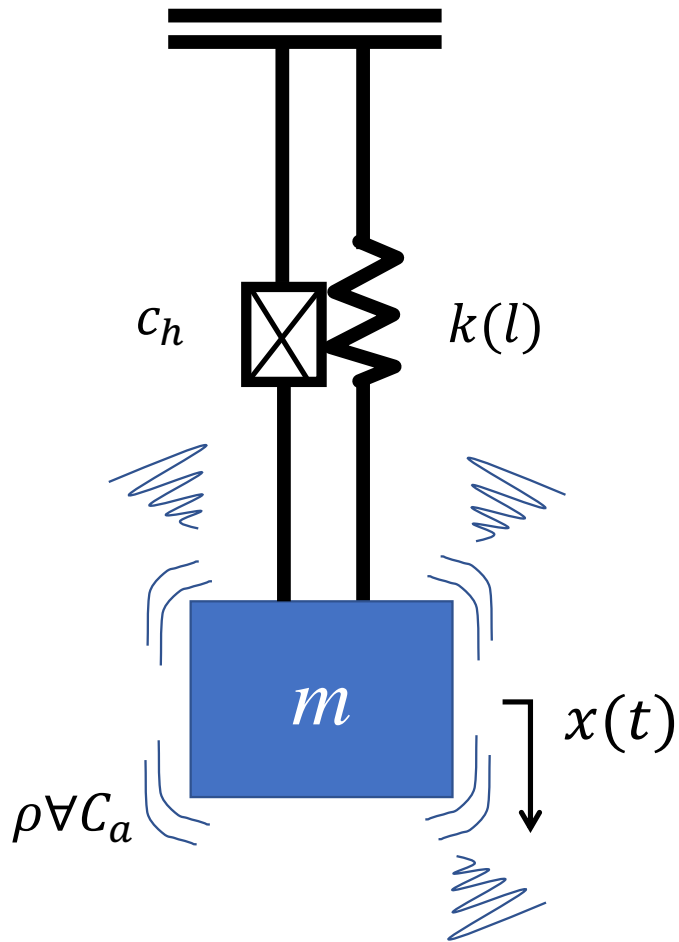
Tensão estática no topo				em ar		em água	
	(m)	(N)	(N)	(N)	(Pa)	(N)	(Pa)
% L	comprimento do cabo	peso de cabo	empuxo no cabo	carga no topo em ar	tensão no topo em ar	topo em água	topo em água
0,05	150	14519	1903	994519	7,91E+08	487917	3,88E+08
0,1	300	29039	3805	1009039	8,03E+08	500534	3,98E+08
0,15	450	43558	5708	1023558	8,15E+08	513150	4,08E+08
0,2	600	58078	7611	1038078	8,26E+08	525767	4,18E+08
0,25	750	72597	9513	1052597	8,38E+08	538384	4,28E+08
0,3	900	87117	11416	1067117	8,49E+08	551001	4,38E+08
0,35	1050	101636	13319	1081636	8,61E+08	563617	4,49E+08
0,4	1200	116155	15221	1096155	8,72E+08	576234	4,59E+08
0,45	1350	130675	17124	1110675	8,84E+08	588851	4,69E+08
0,5	1500	145194	19027	1125194	8,95E+08	601468	4,79E+08
0,55	1650	159714	20929	1139714	9,07E+08	614084	4,89E+08
0,6	1800	174233	22832	1154233	9,19E+08	626701	4,99E+08
0,65	1950	188753	24735	1168753	9,30E+08	639318	5,09E+08
0,7	2100	203272	26637	1183272	9,42E+08	651935	5,19E+08
0,75	2250	217792	28540	1197792	9,53E+08	664551	5,29E+08
0,8	2400	232311	30443	1212311	9,65E+08	677168	5,39E+08
0,85	2550	246830	32345	1226830	9,76E+08	689785	5,49E+08
0,9	2700	261350	34248	1241350	9,88E+08	702402	5,59E+08
0,95	2850	275869	36151	1255869	9,99E+08	715018	5,69E+08
1	3000	290389	38053	1270389	1,01E+09	727635	5,79E+08

Verificação de ressonância ao longo da descida



Frequência natural em AR e em ÁGUA						
		em ar	em ar	em água		
(m)		f_n (1/s)	f_n (1/s)	f_n (1/s)	f_n	f_n
comprimento do cabo	k	AR: Sem massa do	AR: Com massa do	ÁGUA: Sem massa do	ÁGUA: amortecido	ÁGUA: amortecido
150	1256637	0,5642	0,5628	0,4740	0,4105	0,4706
300	628319	0,3989	0,3970	0,3346	0,2897	0,3298
450	418879	0,3257	0,3233	0,2727	0,2362	0,2669
600	314159	0,2821	0,2793	0,2358	0,2042	0,2290
750	251327	0,2523	0,2493	0,2105	0,1823	0,2030
900	209440	0,2303	0,2270	0,1918	0,1661	0,1835
1050	179520	0,2132	0,2097	0,1773	0,1535	0,1683
1200	157080	0,1995	0,1956	0,1656	0,1434	0,1560
1350	139626	0,1881	0,1840	0,1558	0,1350	0,1456
1500	125664	0,1784	0,1742	0,1476	0,1278	0,1368
1650	114240	0,1701	0,1657	0,1405	0,1217	0,1291
1800	104720	0,1629	0,1582	0,1343	0,1163	0,1224
1950	96664	0,1565	0,1517	0,1288	0,1115	0,1164
2100	89760	0,1508	0,1458	0,1239	0,1073	0,1110
2250	83776	0,1457	0,1406	0,1195	0,1035	0,1061
2400	78540	0,1410	0,1358	0,1155	0,1000	0,1017
2550	73920	0,1368	0,1314	0,1119	0,0969	0,0976
2700	69813	0,1330	0,1274	0,1085	0,0940	0,0938
2850	66139	0,1294	0,1238	0,1055	0,0913	0,0903
3000	62832	0,1262	0,1204	0,1026	0,0889	0,0870

Verificação de ressonância ao longo da descida



Trabalho de Dinâmica – Parte 1

Considerando a manobra de lançamento vertical de um manifold submarino, apresente:

- Um gráfico da frequência natural do sistema não amortecido em ar em função do comprimento do cabo.
 - Considere a massa do manifold, a massa do cabo e a rigidez do cabo.
- Um gráfico da tensão no topo do cabo em função do comprimento do cabo.

$$m = 100.000 \text{ kg}$$

$$D = 0,04\text{m}$$

$$L = 3.000 \text{ m}$$

$$E_{cabo} = 160\text{GPa}$$