

Dinâmica de Sistemas Navais e Oceânicos

PNV3314 Dinâmica de Sistemas

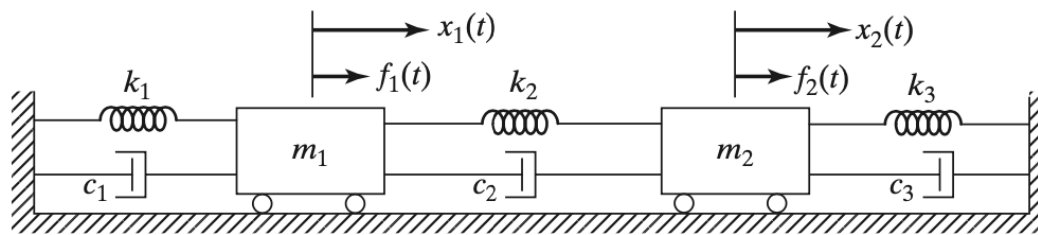
Aula 17

Daniel Bernoulli (1700-1782) foi um suíço que se tornou professor de matemática em São Petersburgo em 1725 após receber seu doutorado em medicina com sua tese sobre a ação dos pulmões. Mais tarde, ele se tornou professor de anatomia e botânica na Basiléia. Ele desenvolveu a teoria da hidrostática e da hidrodinâmica, e o "teorema de Bernoulli" é bem conhecido dos engenheiros. Ele derivou a equação do movimento para a vibração de vigas (a teoria de Euler-Bernoulli) e estudou o problema da vibração de cordas. Bernoulli foi a primeira pessoa a propor o princípio da superposição de harmônicos em vibração livre.

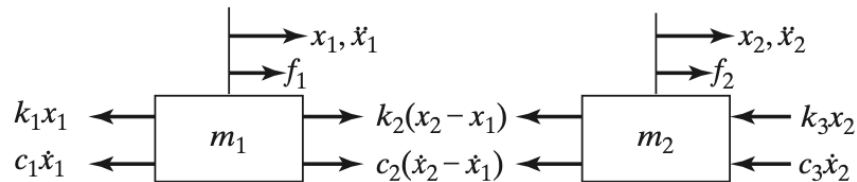


Vibração com dois graus de liberdade

Sistema com dois graus de liberdade



(a)



$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2$$

Equações do movimento acopladas, exceto quando $c_2 = k_2 = 0$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2$$

Podemos expressar de forma matricial

$$[m] \ddot{\vec{x}}(t) + [c] \dot{\vec{x}}(t) + [k] \vec{x}(t) = \vec{f}(t)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{vetor}$$

$$\vec{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{vetor}$$

Note que as matrizes são simétricas

$$[m]^T = [m], \quad [c]^T = [c], \quad [k]^T = [k]$$

Vibração livre de sistema não amortecido

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0$$

Poderiam m_1 e m_2 oscilarem harmonicamente amplitudes diferentes, mas com mesma ω e ϕ ?

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi)$$

Derivando e substituindo, obtemos...

$$[\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$[-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$\begin{aligned} [\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \phi) &= 0 \\ [-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2]\cos(\omega t + \phi) &= 0 \end{aligned}$$

Como a solução deve valer para qualquer instante de tempo...

$$\begin{aligned} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2 &= 0 \\ -k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Que são duas equações algébricas homogêneas de X_1 e X_2 .

$X_1 = X_2 = 0$ é a solução trivial (não há vibração).

Para a solução não trivial...

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

Que produz a *equação característica*

$$(m_1 m_2) \omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\} \omega^2 + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0$$

Cujas raízes são as frequências

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\} \mp \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2} \right\} \right]^{1/2}$$

Nos mostra que é possível haver uma solução harmônica não trivial em que ω é igual a ω_1 e ω_2 .

ω_1 e ω_2 são as frequências naturais do sistema.

Ainda precisamos determinar X_1 e X_2 , que dependem das frequências.

Haverá amplitudes X_1 e X_2 associadas a ω_1 : Denotaremos $X_1^{(1)}$ e $X_2^{(1)}$.

Haverá amplitudes X_1 e X_2 associadas a ω_2 : Denotaremos $X_1^{(2)}$ e $X_2^{(2)}$.

Definimos as razões entre as amplitudes de cada massa...

$$r_1 = \{X_2^{(1)}/X_1^{(1)}\} \quad r_2 = \{X_2^{(2)}/X_1^{(2)}\}$$

Dadas por...

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$$

Razões idênticas!

Assim, definimos os **modos de vibrar** associados a cada frequência

$$\begin{aligned}\vec{X}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \vec{X}^{(2)} &= \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix}\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}\vec{X}^{(1)} \\ \vec{X}^{(2)}\end{aligned}} \right\} \text{Vetores modais}$$

E a solução pode ser expressa em termos dos modos...

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)}(t) \\ X_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} \quad \text{Primeiro modo de vibrar}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)}(t) \\ X_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} \quad \text{Segundo modo de vibrar}$$

Onde $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \phi_1, \phi_2$ são determinados pelas condições iniciais.

As equações do movimento envolvem derivadas de segunda ordem, portanto precisaremos de duas condições iniciais para cada massa.

Assim, o sistema vibrará no seu modo $i = 1, 2$ sob as seguintes condições...

$$\begin{aligned}x_1(t = 0) &= X_1^{(i)} = \text{Cte} & \dot{x}_1(t = 0) &= 0, \\x_2(t = 0) &= r_i X_1^{(i)}, & \dot{x}_2(t = 0) &= 0\end{aligned}$$

Para qualquer outra condição inicial, os dois modos serão excitados.

E a resposta final pode ser obtida pela superposição dos dois modos fundamentais.

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)}(t) + c_2 \vec{x}^{(2)}(t)$$

No final, encontramos as amplitudes e ângulos de fase...

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= [\{X_1^{(1)} \cos \phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)} \sin \phi_1\}^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1^{(2)} &= [\{X_1^{(2)} \cos \phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)} \sin \phi_2\}^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(1)} \sin \phi_1}{X_1^{(1)} \cos \phi_1} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 x_1(0) - x_2(0)]} \right\}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(2)} \sin \phi_2}{X_1^{(2)} \cos \phi_2} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 [-r_1 x_1(0) + x_2(0)]} \right\}$$

Simulação

- <https://www.myphysicslab.com/springs/double-spring-en.html>