PNV3314
DINÂMICA DE SISTEMAS I

Prof. Helio Mitio Morishita
Aula 15 08/06/2021

Nesta apresentação são complementados os conteúdos das secções 3.4, 3.5 e 3.6 do livro texto da disciplina PNV3314 Dinâmica de Sistemas I (Rao S., Mechanical Vibrations, Pearson, 2018)

RESPOSTA DE UM SISTEMA AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Considere o movimento forçado de um sistema massa-mola-amortecedor com uma força harmônica:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + ky = \underbrace{F_0 e^{j\omega t}}_{F(t)}$$

Hipótese: A solução particular é dada por:

$$x_p = X' e^{j\omega t}$$

onde X' pode ser uma amplitude complexa.

Substituindo esta solução na equação diferencial tem-se:

$$m(j\omega)^2 X' e^{j\omega t)} + jc\omega X' e^{j\omega t} + kX' e^{j\omega t} = F_0 e^{j\omega t}$$

ou

$$X'[-m\omega^2 + jc\omega + k] = F_0$$

Portanto, tem-se

$$X' = \frac{F_0}{-m\omega^2 + jc\omega + k}$$

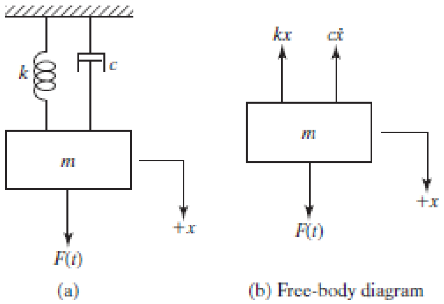


FIGURE 3.1 A spring-mass-damper system.

mas

$$-m\omega^2 + jc\omega + k = \Big| -m\omega^2 + jc\omega + k \Big| e^{j\phi} = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} e^{j\phi}$$

onde $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$

Desta forma tem-se:

$$X' = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} e^{-j\phi}$$

e a solução particular procurada é dada por:

$$x_p = \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}}_{X} e^{j(\omega t - \phi)} \quad = \quad X e^{j(\omega t - \phi)}$$

Solução em função de $F(t)$:

Se $F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = \mathrm{Re}\left[X_e e^{j(\omega t - \phi}\right]$

Se $F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = \mathrm{Im}\left[X_e e^{j(\omega t - \phi}\right]$

Alternativamente, a equação da dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor poderia ser expresso como:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m}\frac{k}{k}e^{j\omega t} = \omega_n^2\frac{F_0}{k}e^{j\omega t} = \omega_n^2\delta_{st}e^{j\omega t}$$

onde $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$

Utilizado o mesmo procedimento do caso anterior, obtem-se que:

x_p= X$e^{j(\omega t-\phi)}$

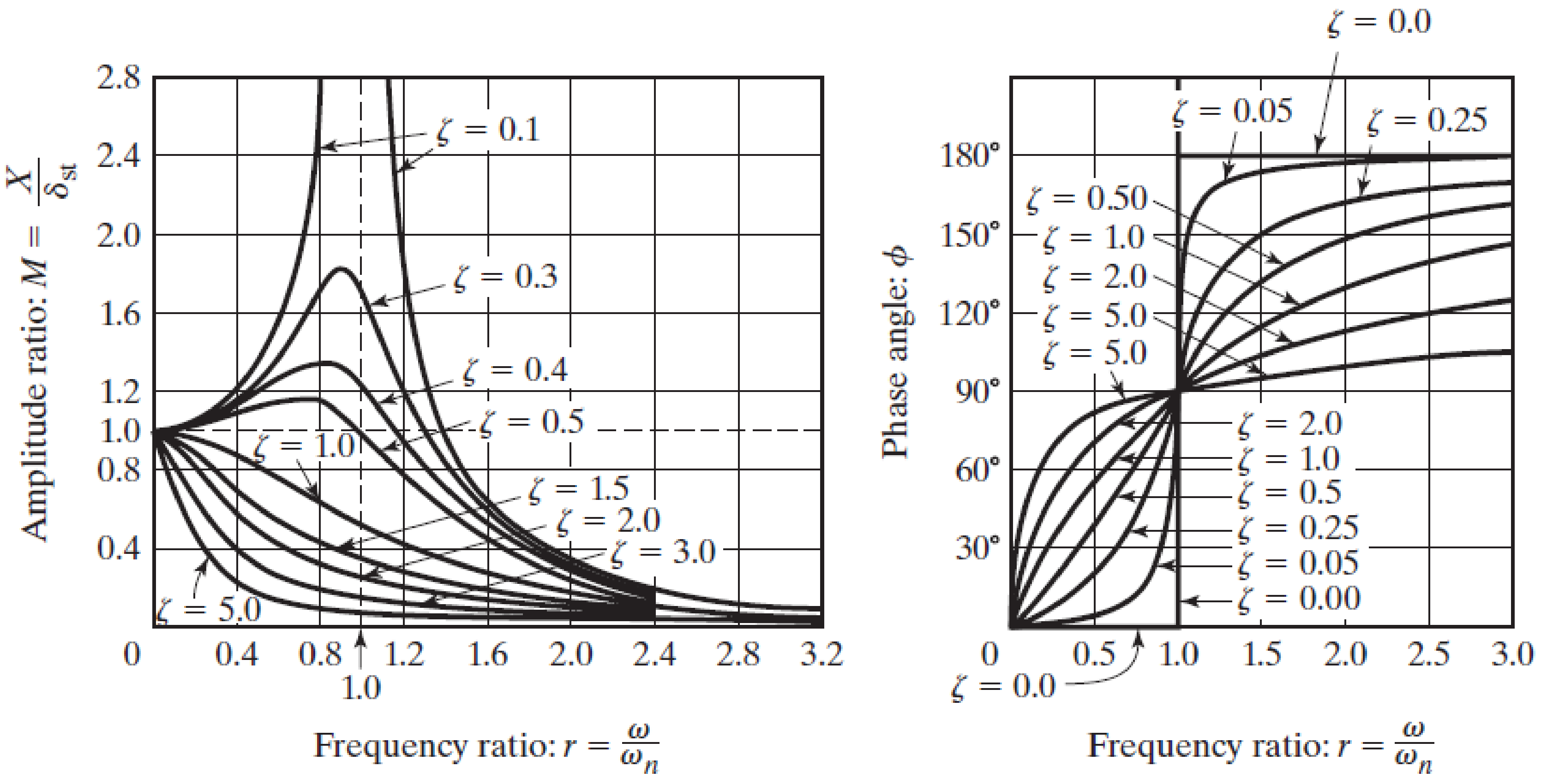
onde X e δ_{st} estão relacionados por:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}; \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

e

$$\phi = \tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$X\left[-m\,\omega^2 + jc\omega + k\right]e^{j(\omega t-\phi)} = F_0 e^{j\omega t}$$



(a) (b)

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{para} \quad 0 \le \zeta \le 0.707 \quad \text{Frequência de ressonância}$$

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{para} \quad 0 \le \zeta \le 0.707$$

Exemplo 1

Considere um sistema massa-mola-amortecedor com:

$\zeta = 0.1$

$\omega_n = 1.0 rad/s$

Equação do movimento

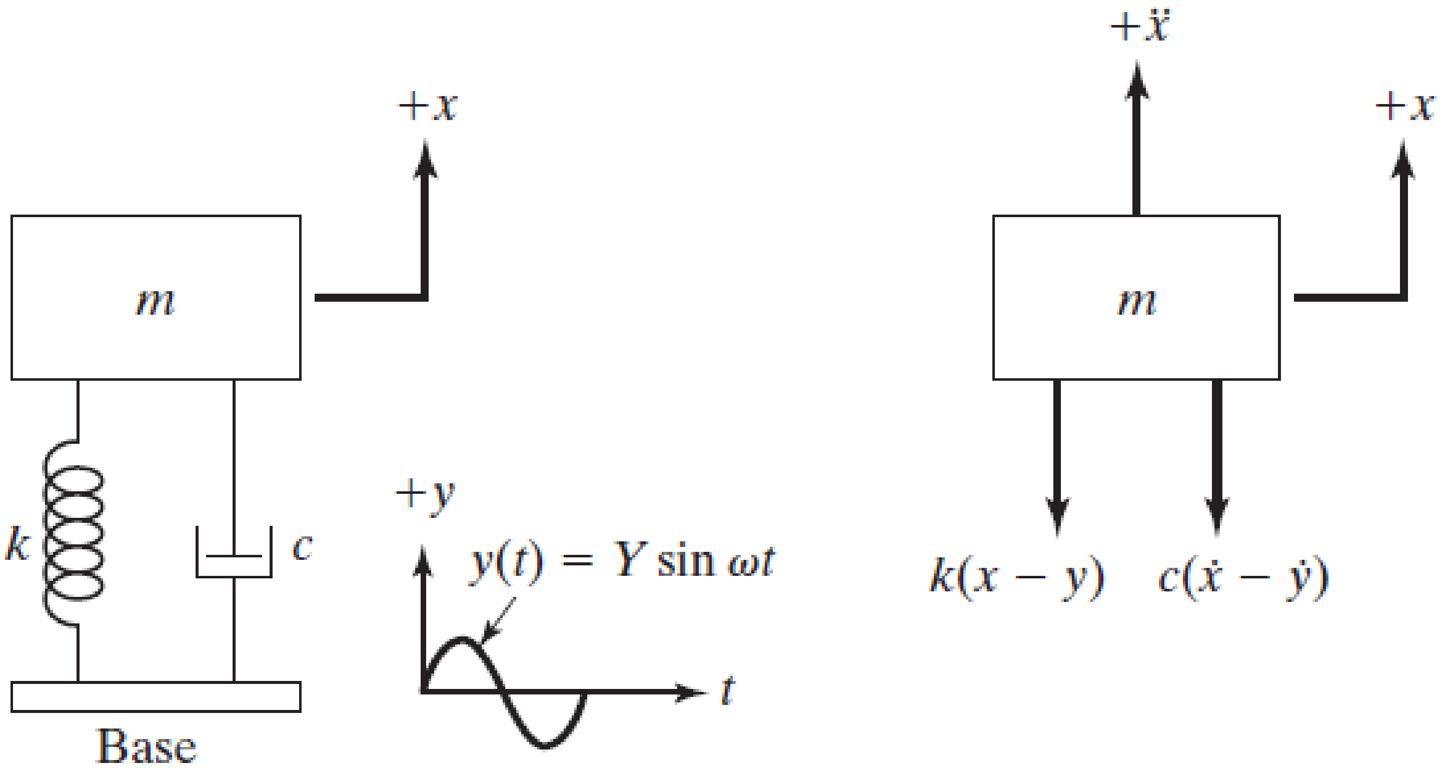
$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = F$

$F = \sin(2\pi/Tt)$

Obter a resposta para uma entrada senoidal com os seguintes períodos:

$T = \{20; \quad 10; \quad 2\pi; \quad 4; \quad 2\}$

MOVIMENTO FORÇADO PELA BASE



(a)
(b)

Considere o movimento de um sistema de segunda ordem com movimento da base, isto é,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky \tag{24}$$

onde y é a posição da base. Admita que:

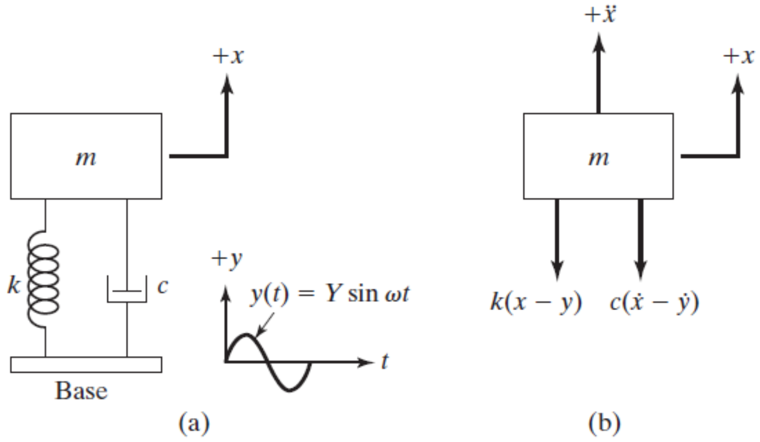
$$y = Ye^{j\omega t} \tag{25}$$

e que a resposta particular do sistema seja dada por:

$$x_p = X^{'}e^{j\omega t} \tag{26}$$

Substituindo as Eqs. 25 e 26 em 24 tem-se:

$$X^{'}[-m\omega^2 + ic\omega + k] = Y[jc\omega + k] \tag{27}$$



Desta forma tem-se:

$$X' = Y\frac{jc\omega + k}{-m\omega^2 + jc\omega + k} = Y\left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{j\phi} = Y\left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{j\phi} \quad (28)$$

onde

$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{mc\omega^3}{k(k-m\omega)^2+(c\omega)^2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta r^3}{1+(4\zeta^2-1)r^2}\right]$

Portanto, a resposta é dada por:

$$x_p = \underbrace{Y\left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}_{X} e^{j(\omega t - \phi)} = Xe^{j(\omega t - \phi)} \quad (29)$$

A relação de transmissibilidade de deslocamento $T_d = \frac{X}{Y}$ é dada por:

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

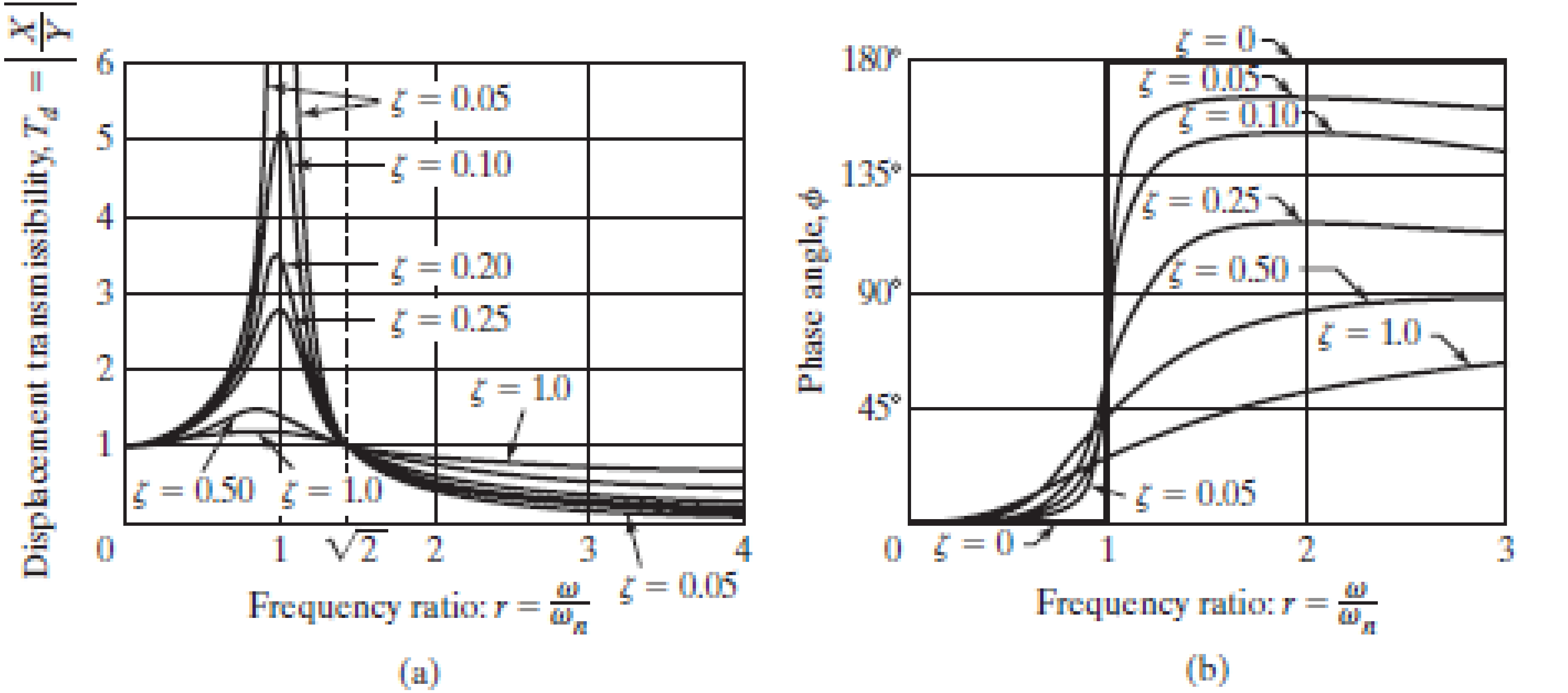
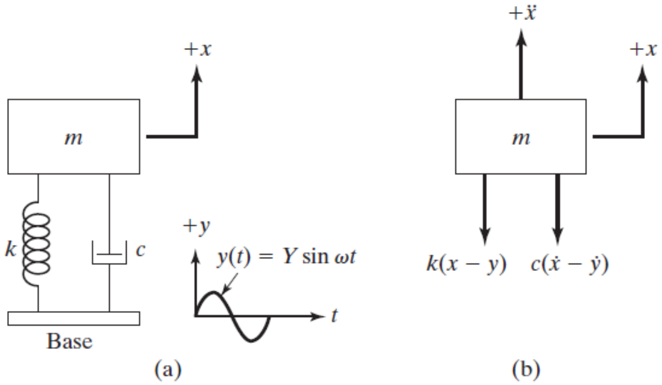


FIGURE 3.15 Variations of T_d and ϕ with r.

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Transmissão de força à base



A força transmitida à base é dada por:

$$F = k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = -m\ddot{x} \tag{29}$$

Considerando a equação particular dada por Eq. 26 e a Eq. 28 tem-se:

$$F = m\omega^2 X e^{j\omega t} = m\omega^2 Y \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\phi} e^{j\omega t} = F_T e^{\phi} e^{j\omega t} \tag{30}$$

onde F_T é a amplitude da força transmitida à base.

$$\frac{F_T}{kY} = \frac{m}{k}\omega^2 \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = r^2 \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

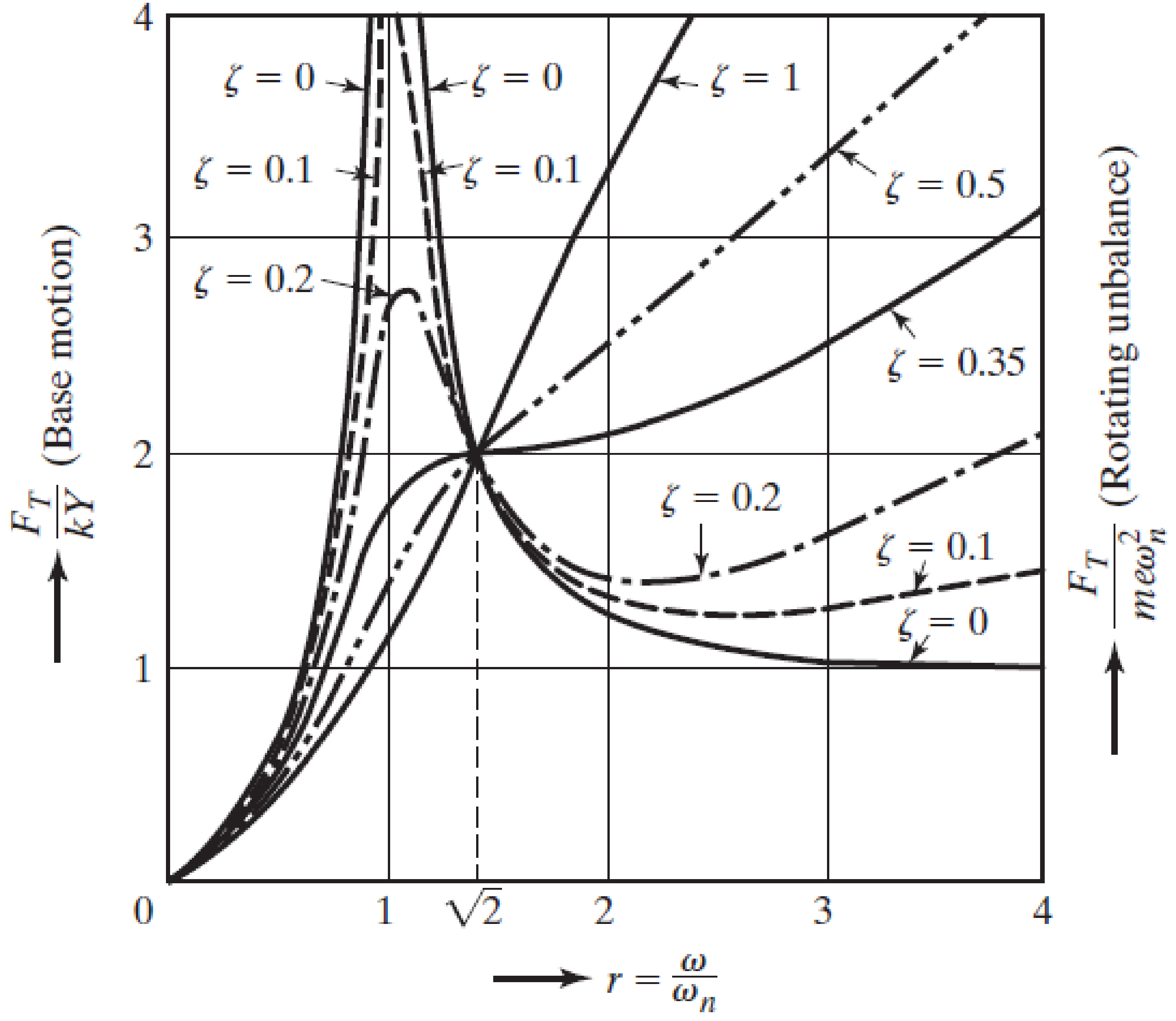


FIGURE 3.16 Force transmissibility.