PNV3314
DINÂMICA DE SISTEMAS I

Prof. Helio Mitio Morishita
Aula 14 01/06/2021

Tópicos a serem abordados

Solução de equações. diferenciais

Linearização de funções não lineares

Linearização de eq. Diferenciais não lineares

Conjunto de equações lineares de 1ª orden

Integração Numérica

Solução de equações diferenciais

Seja a oscilação livre de um sistema massa-mola-amortecedor linear:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \tag{1}$$

A eq. característica desta equação é dada por:

$$mz^2 + cz + k = 0 \tag{2}$$

cujas raízes são:

$$z_{1,2} = \frac{-c \pm \omega_n \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \tag{3}$$

Se $c^2 \geq 4km \quad \Rightarrow \quad$ raízes reais

Se $c^2 < 4km \quad \Rightarrow \quad$ raízes complexas

Desta forma, define-se o amortecimento crítico como sendo:

$c_{cr} = 2\sqrt{km}$

$z^2 + \frac{c}{m}z + \frac{k}{m} = 0$

ou

$z^2 + 2\zeta\omega_n z + \omega_n^2 = 0; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad e \quad \zeta = \frac{c}{c_r}$

Desta forma, as raízes são dadas por:

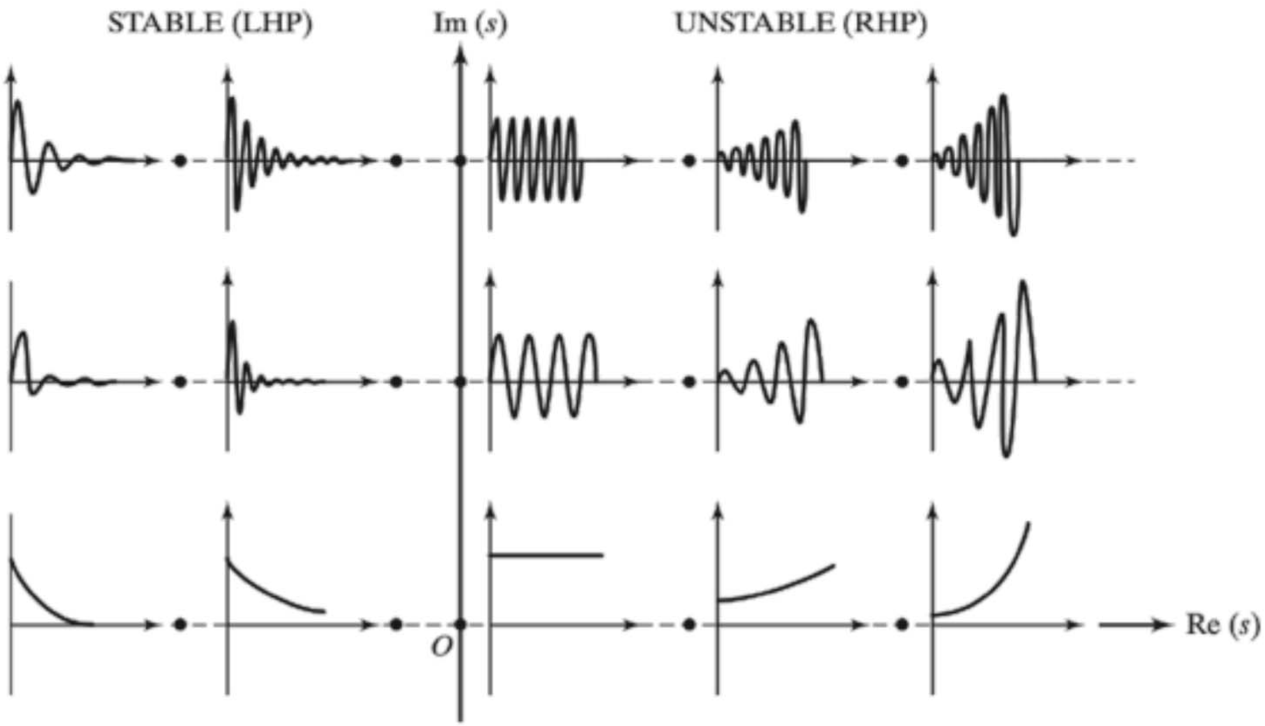
$z_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{para} \quad \zeta \geq 1$

$z_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}j \quad \text{para} \quad \zeta < 1 \quad \Rightarrow$ tem oscilação.

A solução da homogênea é:

$y(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$

As constantes C_1 e C_2 podem ser obtidos através das condições iniciais (Ver o livro do RAO).

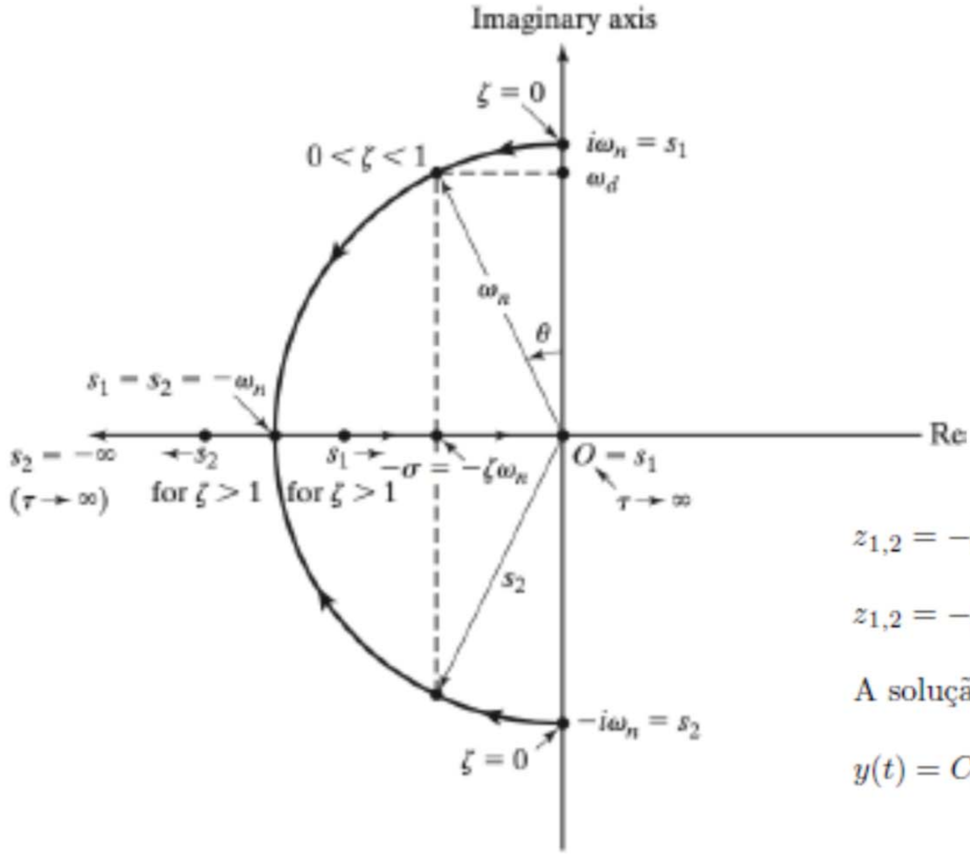


$$z_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{para} \quad \zeta \geq 1$$

$$z_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}j \quad \text{para} \quad \zeta < 1 \quad \Rightarrow \text{tem oscilação.}$$

A solução da homogênea é:

$$y(t) = C_1e^{z_1t} + C_2e^{z_2t}$$



$$z_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{para} \quad \zeta \geq 1$$

$$z_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}j \quad \text{para} \quad \zeta < 1 \quad \Rightarrow \text{tem oscilação.}$$

A solução da homogênea é:

$$y(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

FIGURE 2.38 Root locus plot with variation of damping ratio ζ.

Linearização de uma função não linear

A linearização de uma função é obtida através da expansão em série de Taylor considerando-se somente os termos de potência igual a 1. Considere a expansão de uma função $y = f(x)$ em torno do ponto x_0.

$$y = f(x_0) + f^1(x)\Big|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^1}{1!} + f^2(x)\Big|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \qquad (4)$$

onde $f^n(x)$ significa a n-ésima derivada da função em relaçao a x.

Lembrando que $y_0 = f(x_0)$ e considerando-se somente termos com potência unitária a Eq. 4 pode ser escrita como:

$$y - y_0 = \underbrace{f^1(x)\Big|_{x=x_0}}_{d}(x - x_0) \qquad (5)$$

Assim, a equação linear é expressa como:

$$\bar{y} = d\bar{x} \qquad (6)$$

onde $\bar{y} = y - y_0$ e $\bar{x} = x - x_0$.

Linearização de equações diferenciais não lineares

Considere agora a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + f(y) = g_0 \tag{7}$$

onde $f(y)$ é uma função não linear e g_0 é uma constante.

Ponto de equilíbrio do sistema (y_0).

$$f(y_0) = g_0 \tag{8}$$

Expandindo a função $f(y)$ em série de Taylor e considerando somente o termo de potência unitária tem-se:

$$f(y) - f(y_0) = a_2(y - y_0) \tag{9}$$

onde $a_2 = f^1(y)\big|_{y=y_0}$

Somando o termo $-f(y_0) + g_0$ no membro esquerdo da Eq. 7 tem-se:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + f(y) - f(y_0) + g_0 = g_0 \tag{10}$$

Considerando-se a Eq. 9, a Eq. 10 pode ser reescrita como:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2(y - y_0) = 0 \tag{11}$$

Seja

$$\bar{y} = y - y_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \dot{\bar{y}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \ddot{\bar{y}} \tag{12}$$

Com isto a versão linear da Eq. 7 é dada por:

$$\ddot{\bar{y}} + a_1\dot{\bar{y}} + a_2\bar{y} = 0 \tag{13}$$

Exemplo 1

A dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor no sentido vertical é descriga por:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky^3 = mg$$

Obter o ponto de equilíbrio e a equação diferencial linear da dinâmica do sistema.

Exemplo 2

A dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor no sentido vertical é descrita por:

$$m\ddot{y} + c|\dot{y}|\dot{y} + ky^3 = mg$$

Obter o ponto de equilíbrio e a equação diferencial linear da dinâmica do sistema.

Conjunto de equações lineares de 1ª ordem

Considere a seguinte equação diferencial:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t) \tag{14}$$

A equação característica da Eq. 14 é dada por:

$$mz^2 + cz + k = 0 \tag{15}$$

Considere agora as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 = y \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

$$x_2 = \dot{y} \tag{18}$$

Derivando em relação ao tempo as duas equações obtem-se:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \tag{19}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}y - \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{f(t)}{m} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{f(t)}{m} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t) \tag{21}$$

Os autovalores da matriz A são dados por:

$$\left|\lambda I - A\right| = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \tag{22}$$

A equação característica da Eq. 14 é dada por:

$$mz^2 + cz + k = 0 \tag{15}$$

Integração numérica

Método de Euler

Seja a eq. diferencial de primeira ordem

$$\dot{x}(t) = f(x,t) \quad x(t_0) = x_0 \tag{23}$$

O objetivo é obter a solução da Eq. 23 numericamente. Esta solução será obtida para instantes discretos, isto é, $t_n = t_0 + nh$, onde h é o passo de integração.

Seja $x_e(t)$ a solução exata da Eq. 23

Utilizando a série de expansão em série de Taylor tem-se

$$x_e(t_{n+1}) = x_e(t_n) + \frac{dx_e}{dt}\Big|_{t=t(n)} h \quad = \quad x_e(t_n) + f(x,t)h$$

Exemplo

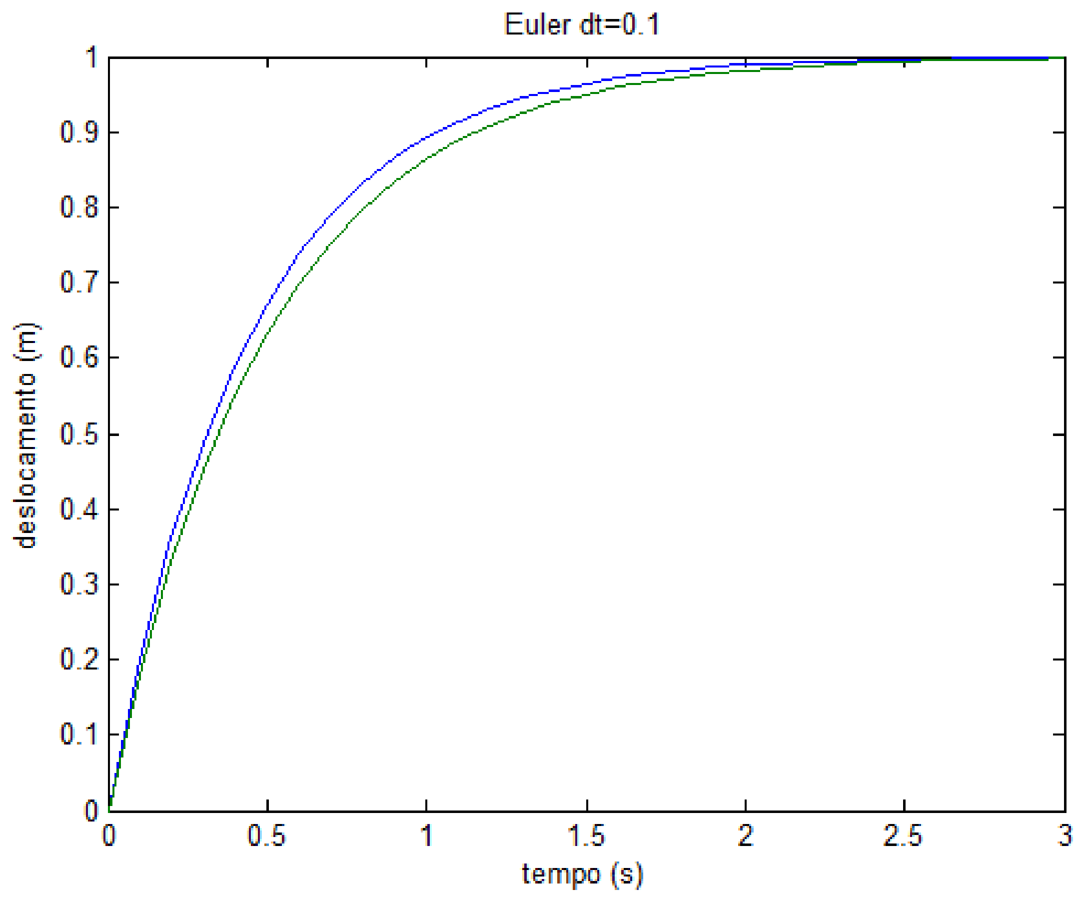
$\dot{x} = -2x + 2 \quad x(0) = 0$

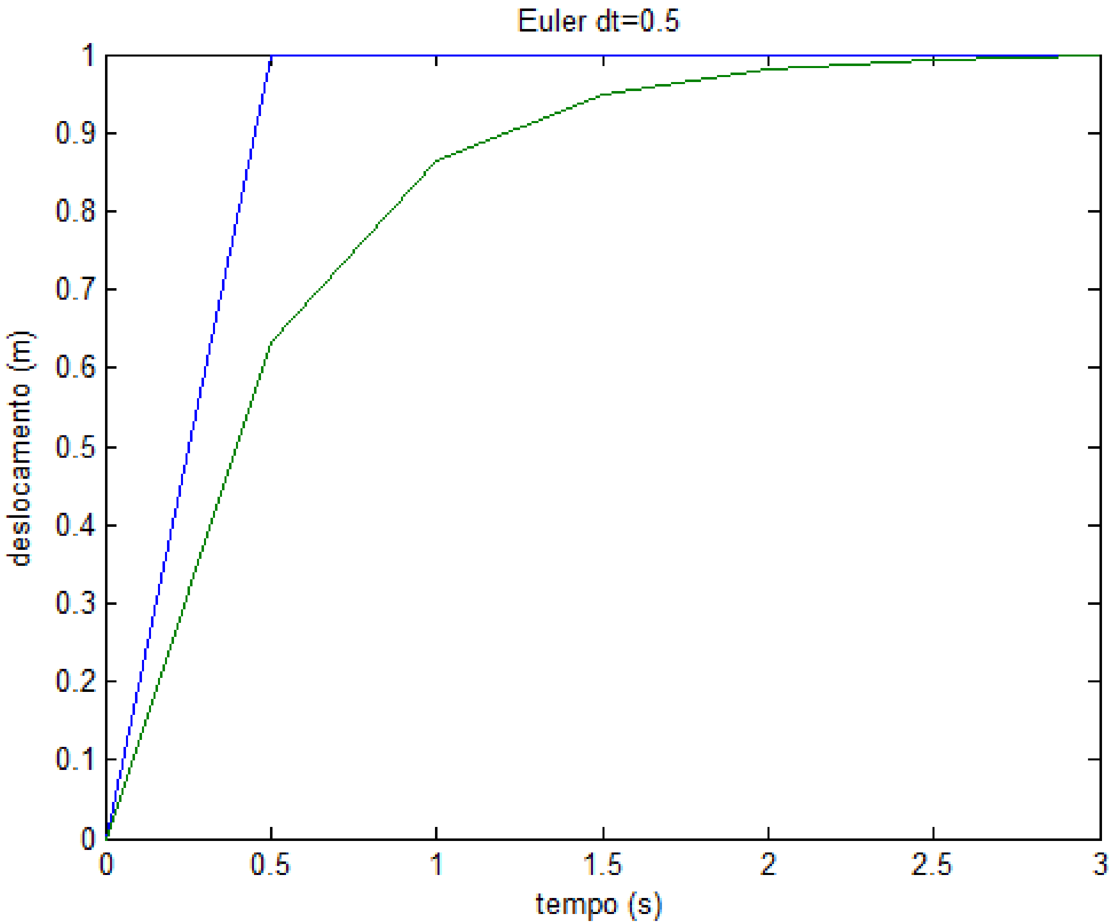
Solução numérica:

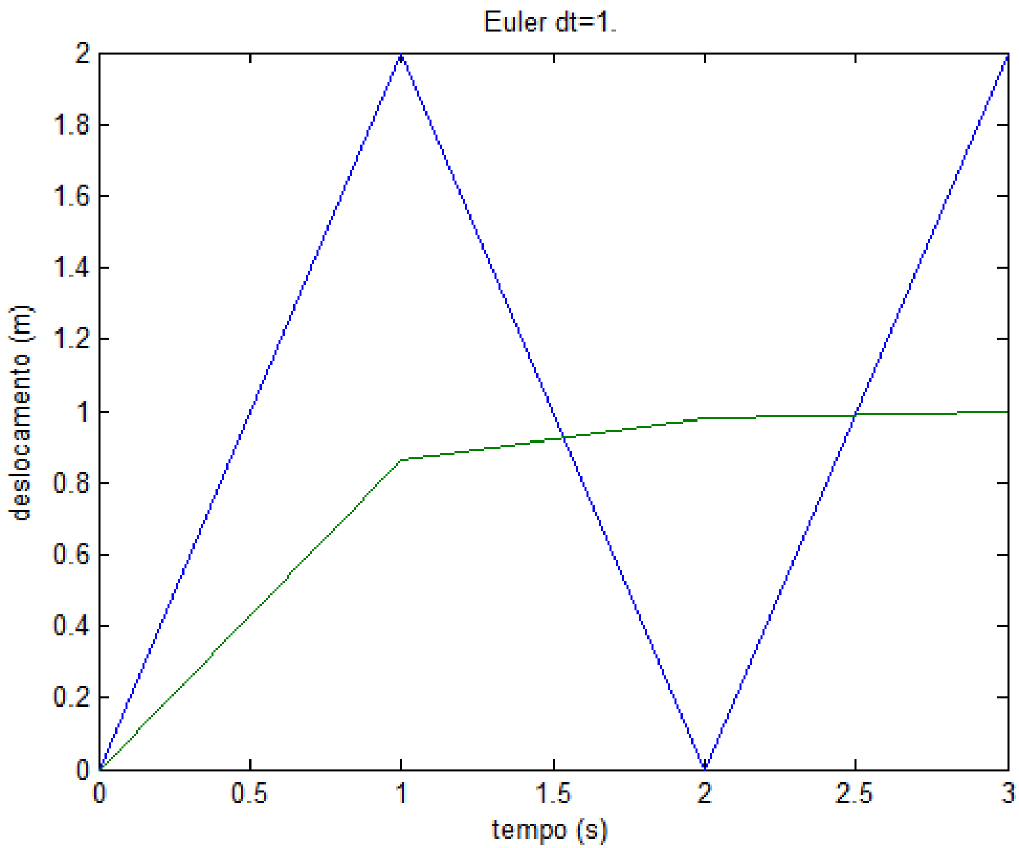
$x(n+1) = x(n) + (-2x(n) + 2)h$

Solução exata

$x_e(t) = 1 - e^{2t}$


Euler dt=0.1
deslocamento (m)
tempo (s)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0.5
1.5
2
2.5
3


Euler dt=0.5
deslocamento (m)
tempo (s)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Euler dt=1.
deslocamento (m)
tempo (s)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Métodos de Integração Numérica

Runge Kutta de 4ª ordem

$$x(n+1) = x(n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

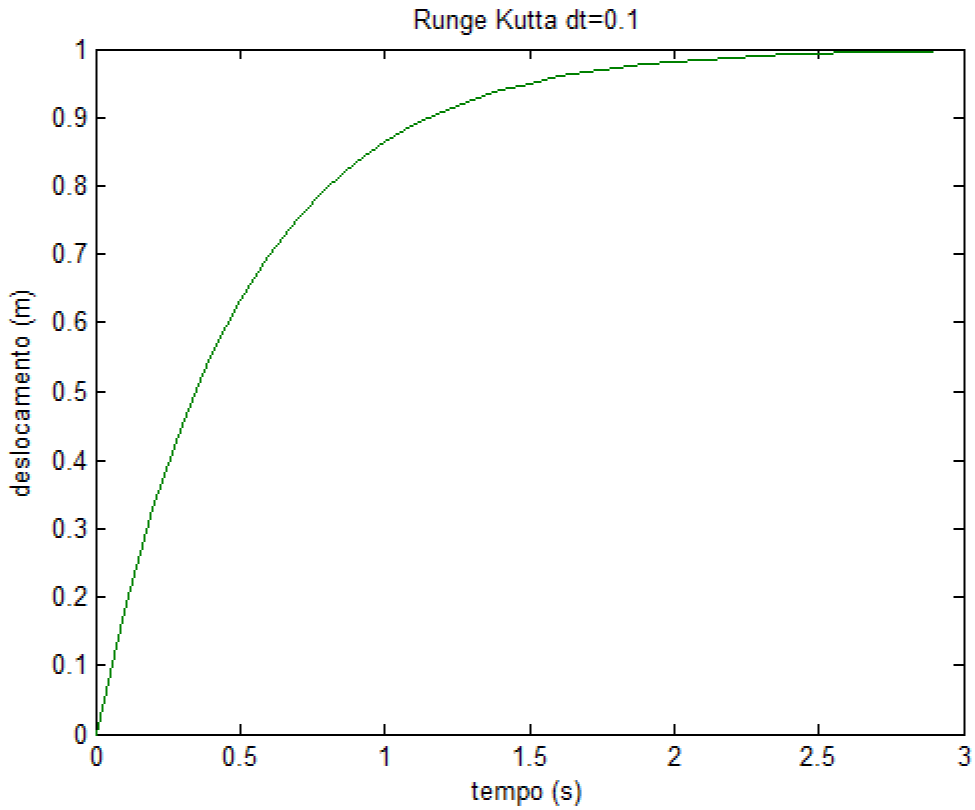
$$t(n+1) = t_n + h$$

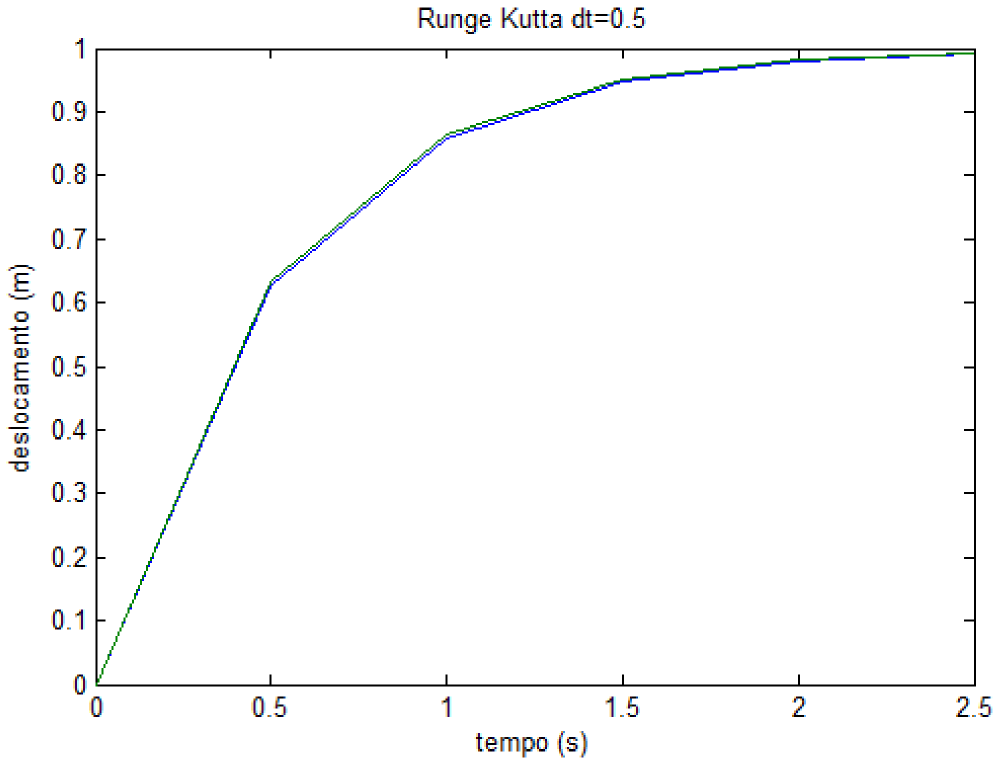
$$k_1 = f(t(n), x(n))$$

$$k_2 = f(t(n) + \frac{h}{2}, x(n) + \frac{h}{2}k_1$$

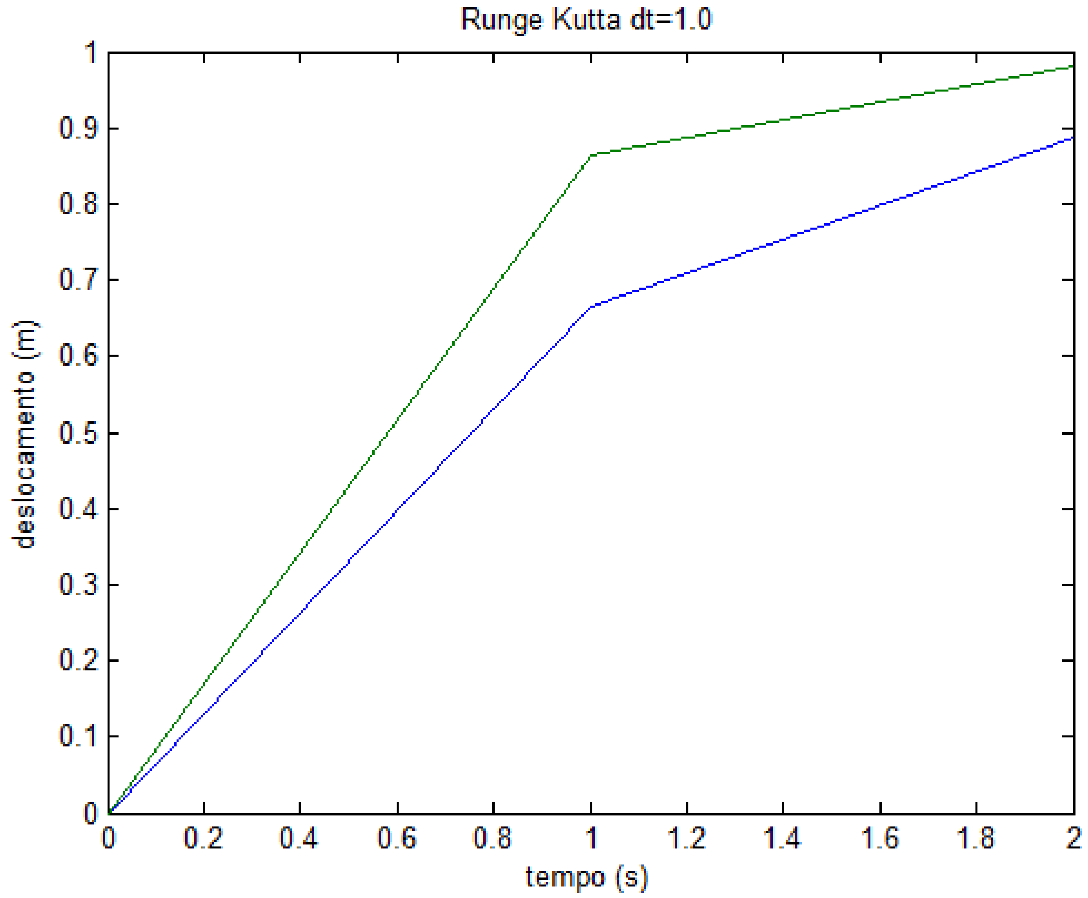
$$k_3 = f(t(n) + \frac{h}{2}, x(n) + \frac{h}{2}k_2$$

$$k_4 = f(t(n) + h, x(n) + hk_3)$$


Runge Kutta dt=0.1
deslocamento (m)
tempo (s)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



Runge Kutta dt=0.5
deslocamento (m)
tempo (s)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5



Runge Kutta dt=1.0
deslocamento (m)
tempo (s)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0.2
0.4
0.6
0.8
1.2
1.4
1.6
1.8
2