Dinâmica de Sistemas Navais e Oceânicos

PNV3314 Dinâmica de Sistemas

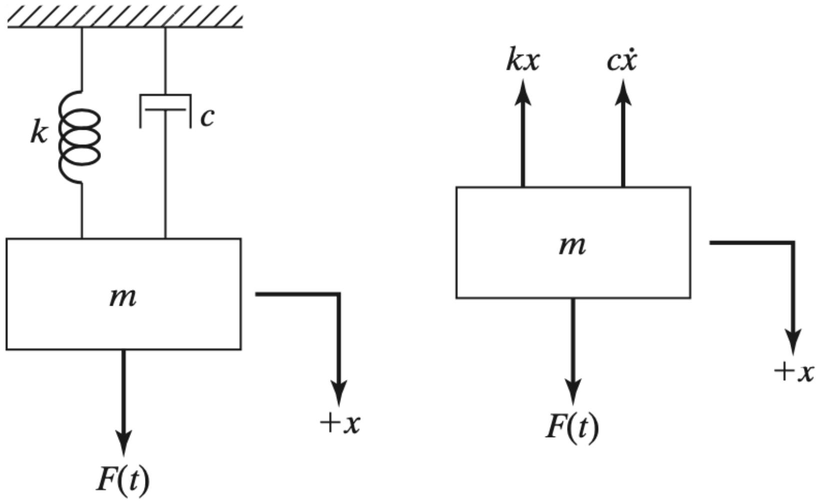
Aula 9

Vibração não amortecida com excitação harmônica

Oscilação forçada não amortecida

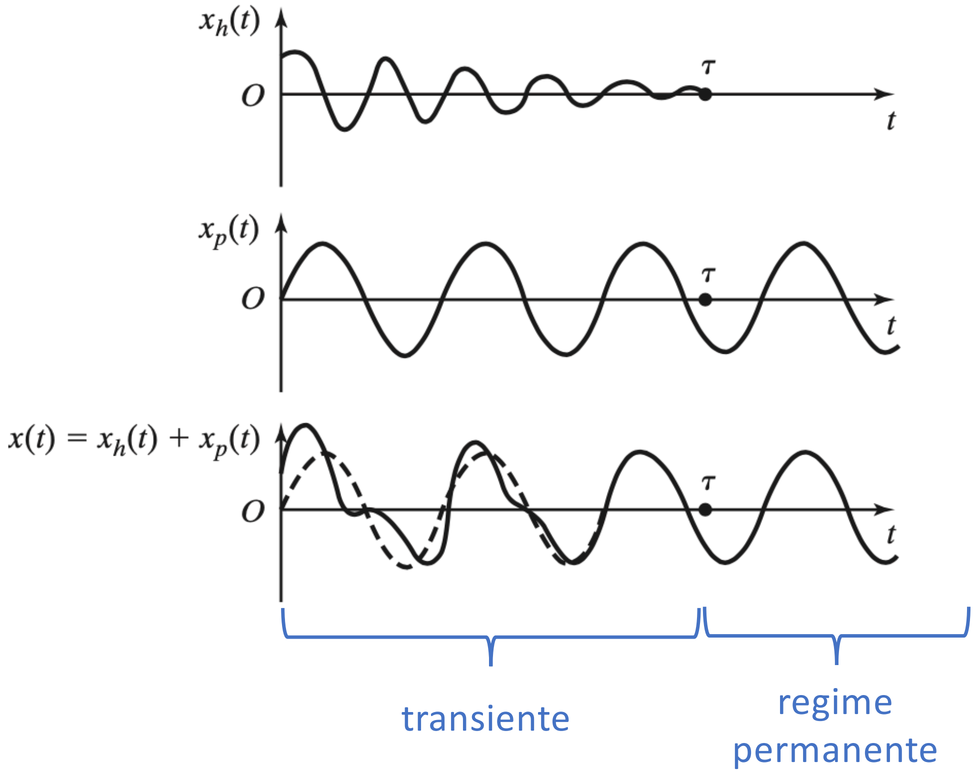
Excitação externa

A solução geral é dada pela soma da solução homogênea (que decai com o tempo) e da solução particular...



(a) (b) Free-body diagram

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$



Sistema não amortecido com excitação harmônica

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

A solução homogênea é...

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

Freq. natural

Se a excitação é harmônica, a solução particular também será...

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

Deflexão estática

...que resulta em:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\delta_{st} = F_0 / k$$

A solução completa será...

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Com as condições iniciais de deslocamento e velocidade...

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

Resulta em...

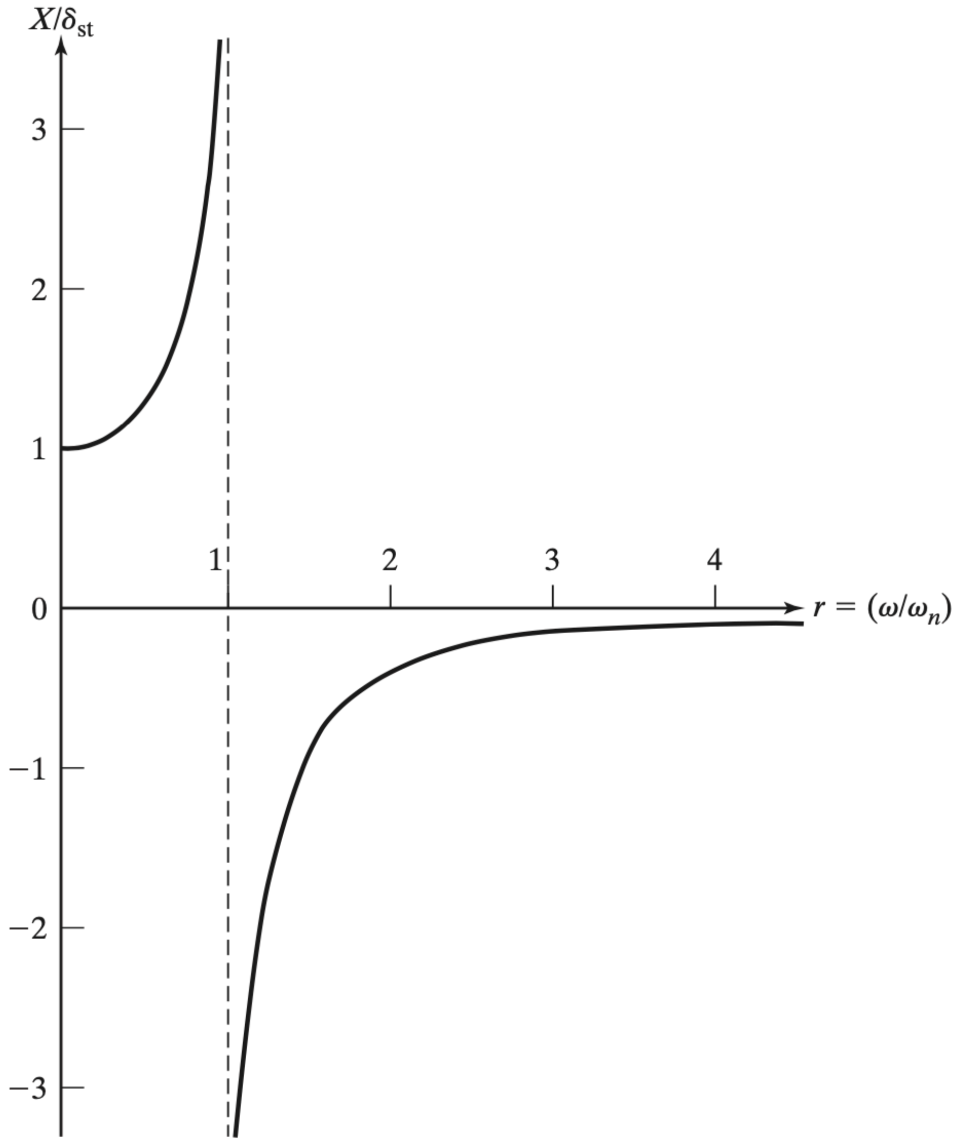
Freq. excitação

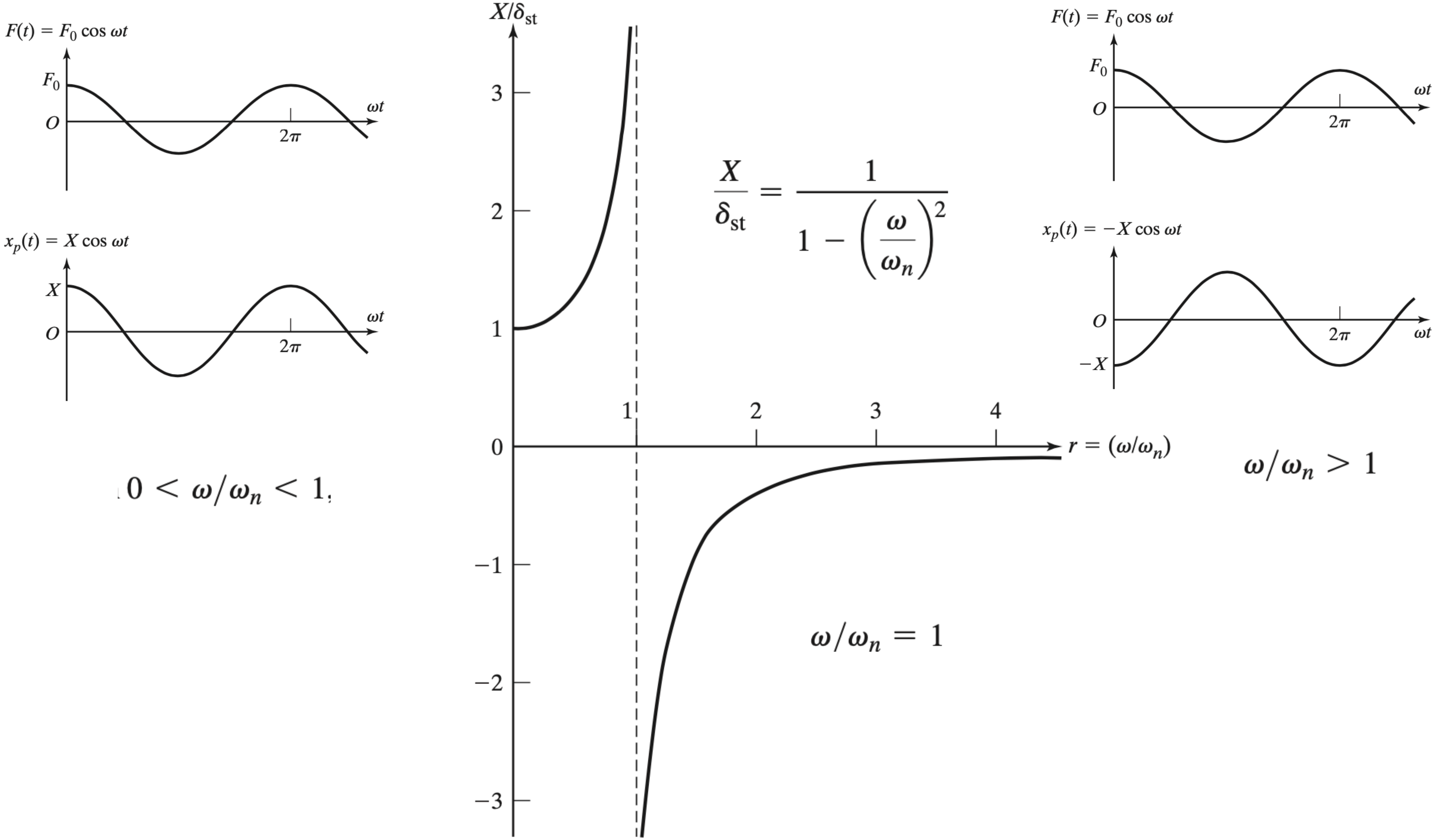
$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega t$$

A máxima amplitude de resposta será...

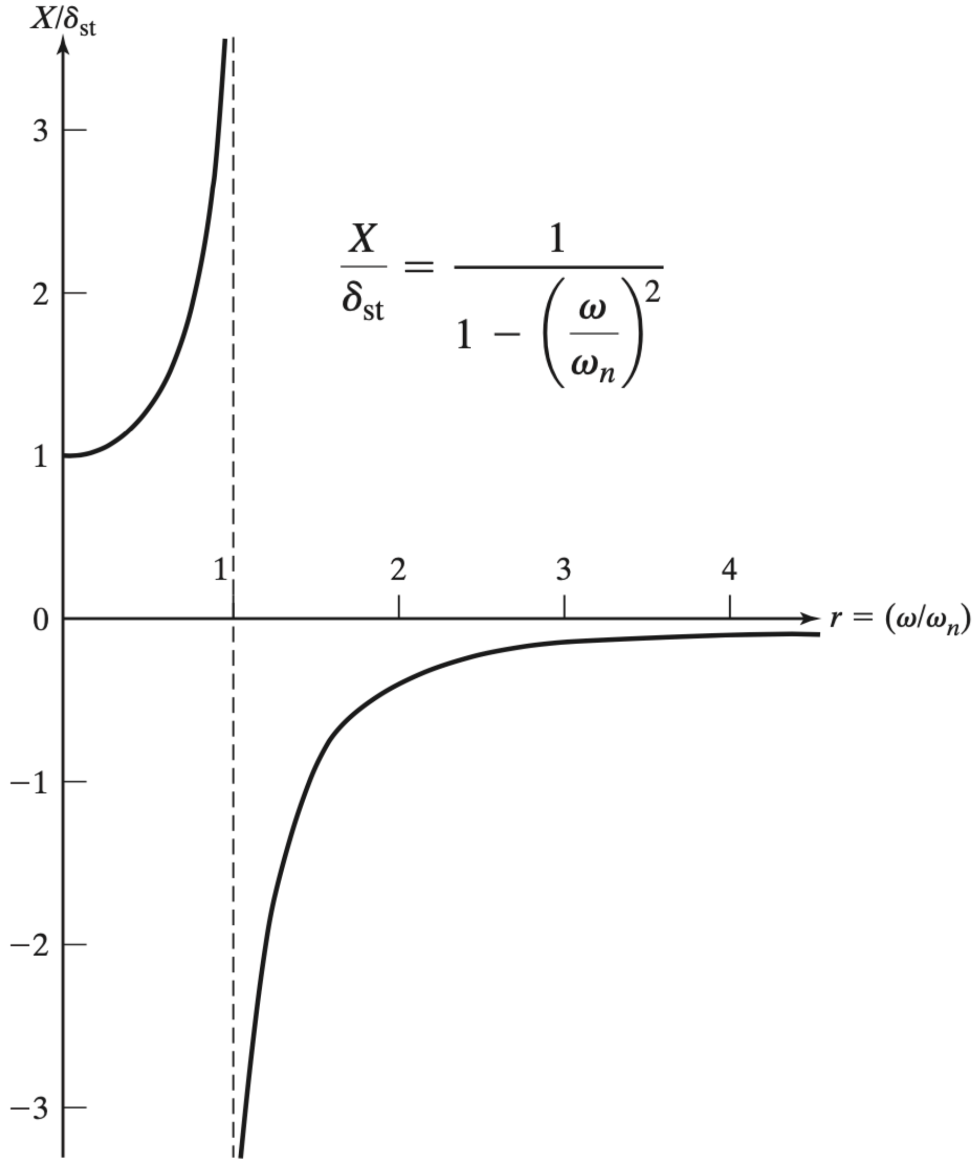
$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Fator de Ampliação (ou fator de magnificação, razão de amplitude): razão entre amplitude de resposta e a deflexão estática





$F(t) = F_0 \cos \omega t$
F_0
O
ωt
2π
$x_p(t) = X \cos \omega t$
X
O
ωt
2π
$0 < \omega/\omega_n < 1$
X/δ_{st}
3
2
1
0
−1
−2
−3
1
2
3
4
$r = (\omega/\omega_n)$
$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$
$\omega/\omega_n = 1$
$F(t) = F_0 \cos \omega t$
F_0
O
ωt
2π
$x_p(t) = -X \cos \omega t$
O
$-X$
2π
ωt
$\omega/\omega_n > 1$



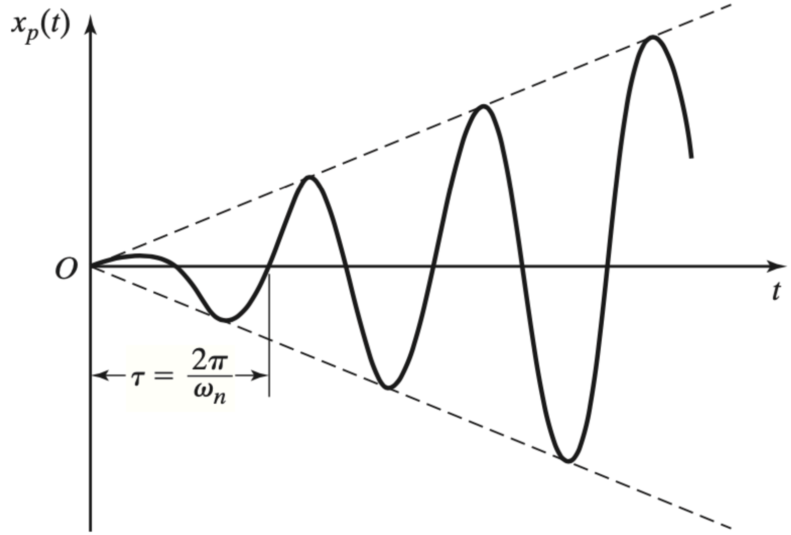
$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\omega/\omega_n = 1$$

RESSONÂNCIA!

A solução geral fica...

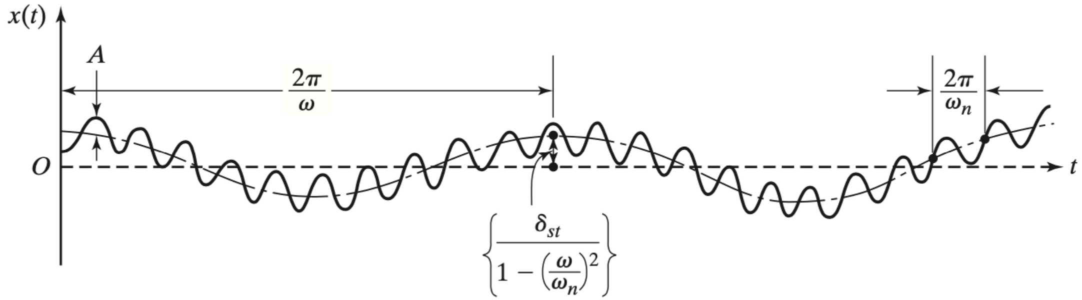
$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \boxed{\frac{\delta_{st}\omega_n t}{2} \sin \omega_n t}$$



A solução completa também pode ser expressa por...

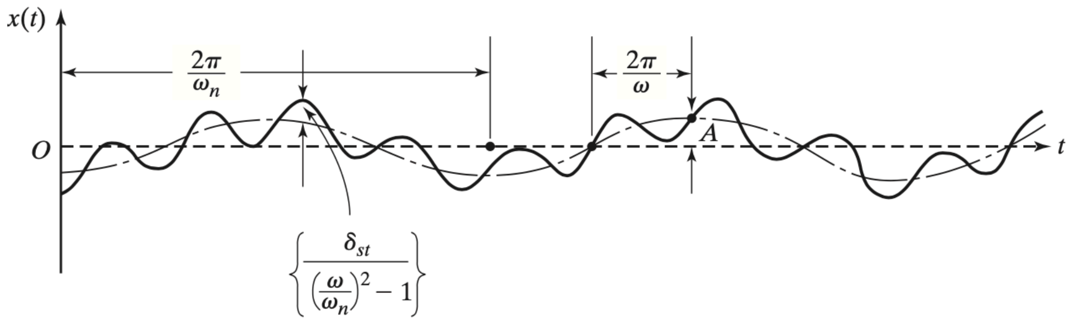
$$\boxed{\frac{\omega}{\omega_n} < 1}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos\omega t;$$



$$\boxed{\frac{\omega}{\omega_n} > 1}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{-1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos\omega t;$$

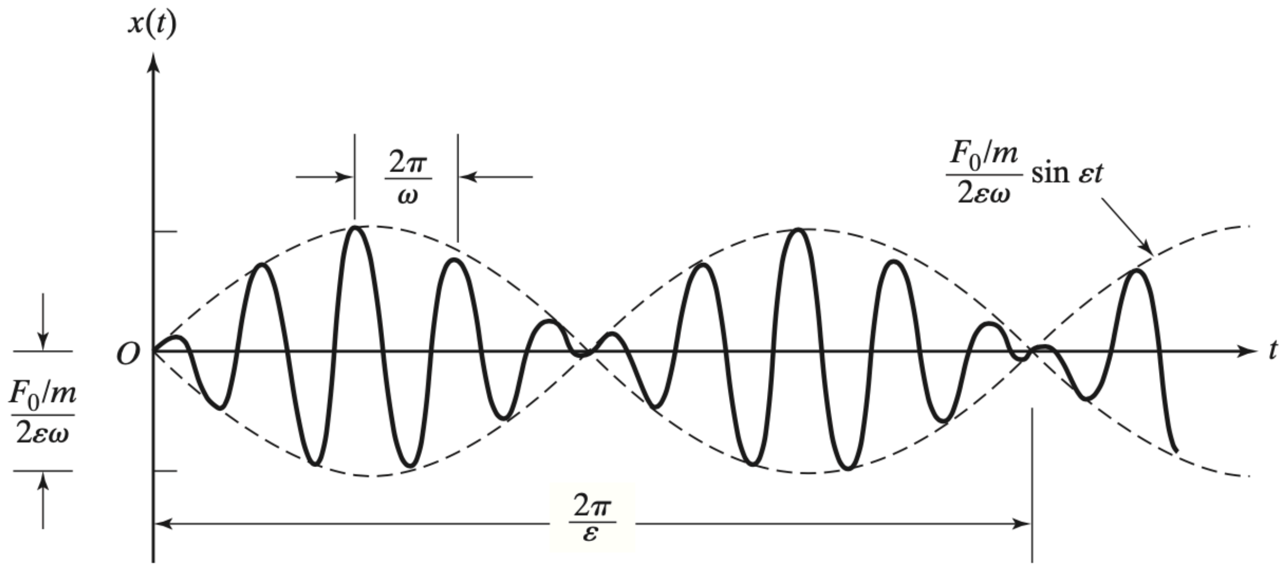


Se as duas frequências forem próximas, ocorre batimento.

$$\omega_n - \omega = 2\varepsilon \qquad \omega + \omega_n \simeq 2\omega$$

$$x(t) = \frac{(F_0/m)}{\omega_n^2 - \omega^2}(\cos \omega t - \cos \omega_n t) = \frac{(F_0/m)}{\omega_n^2 - \omega^2}\left[2 \sin \frac{\omega + \omega_n}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t\right]$$

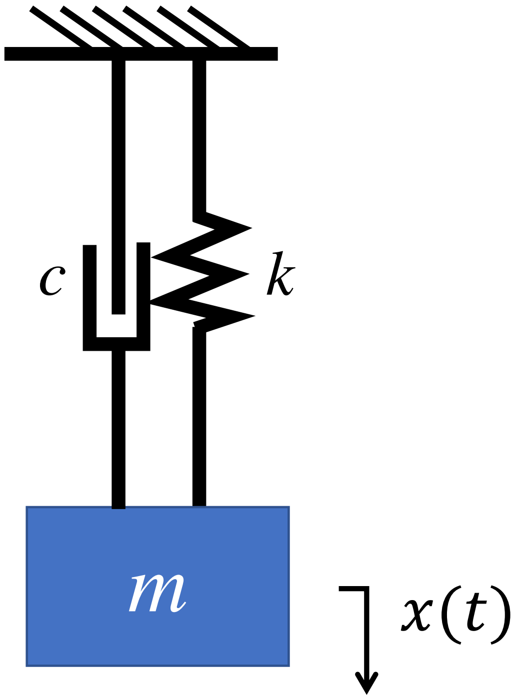
$$x(t) = \left(\frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \sin \varepsilon t\right) \sin \omega t$$



Exemplos

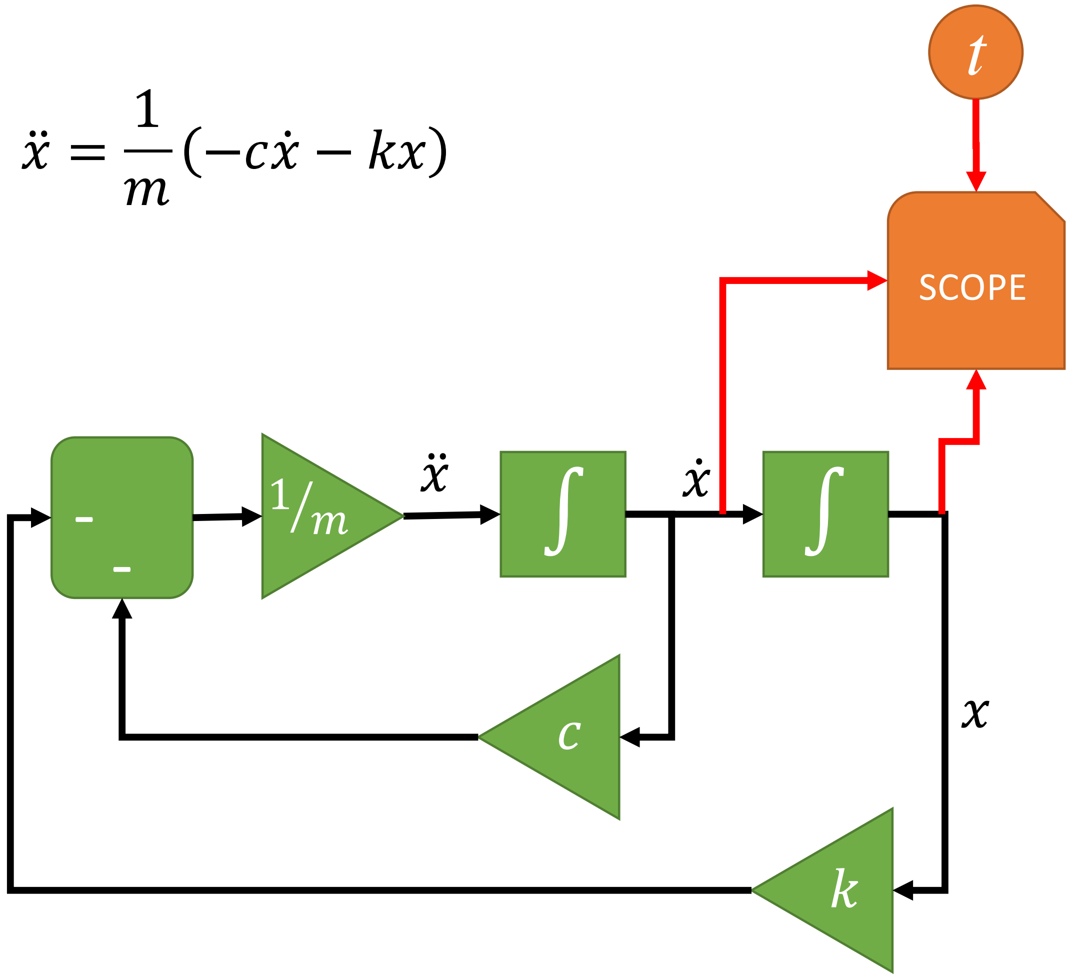
- Determinação de parâmetros: m-k
- Afinação de instrumentos musicais (batimento)

Simulação de sistema dinâmico



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

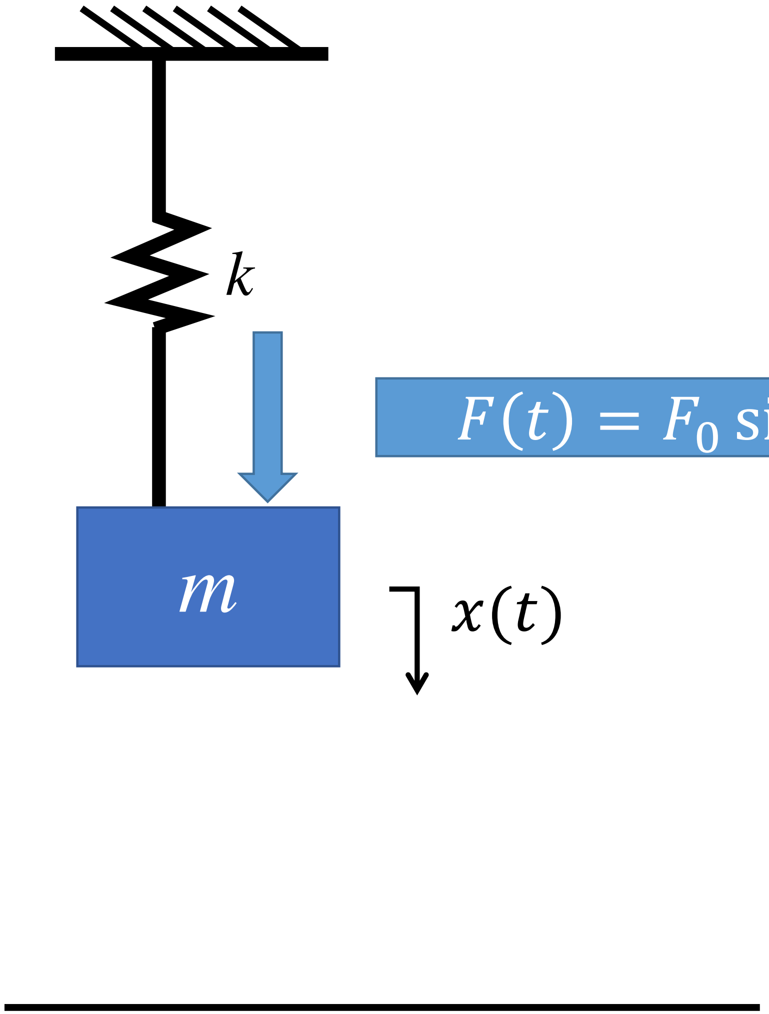
$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(-c\dot{x} - kx)$$

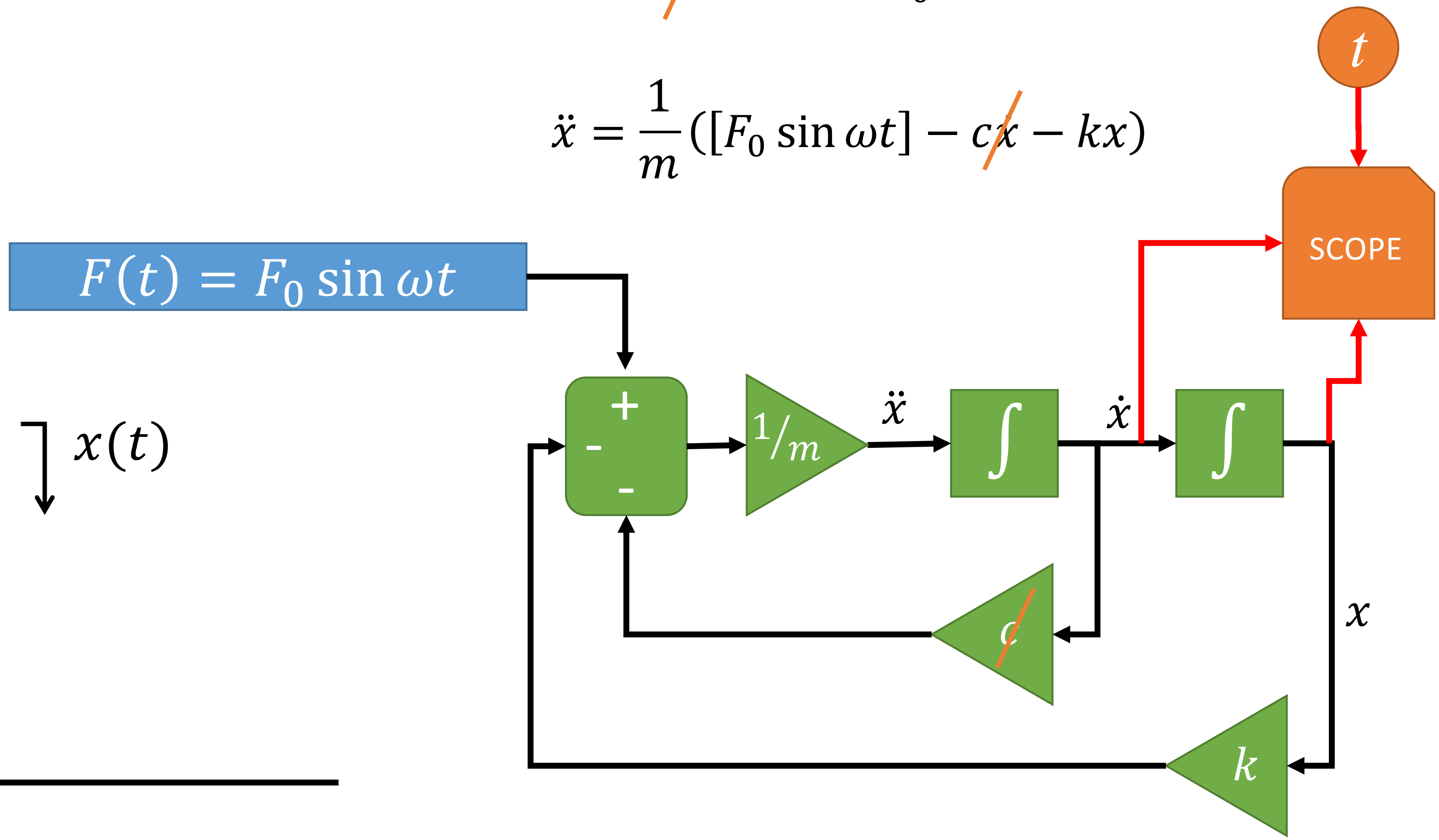


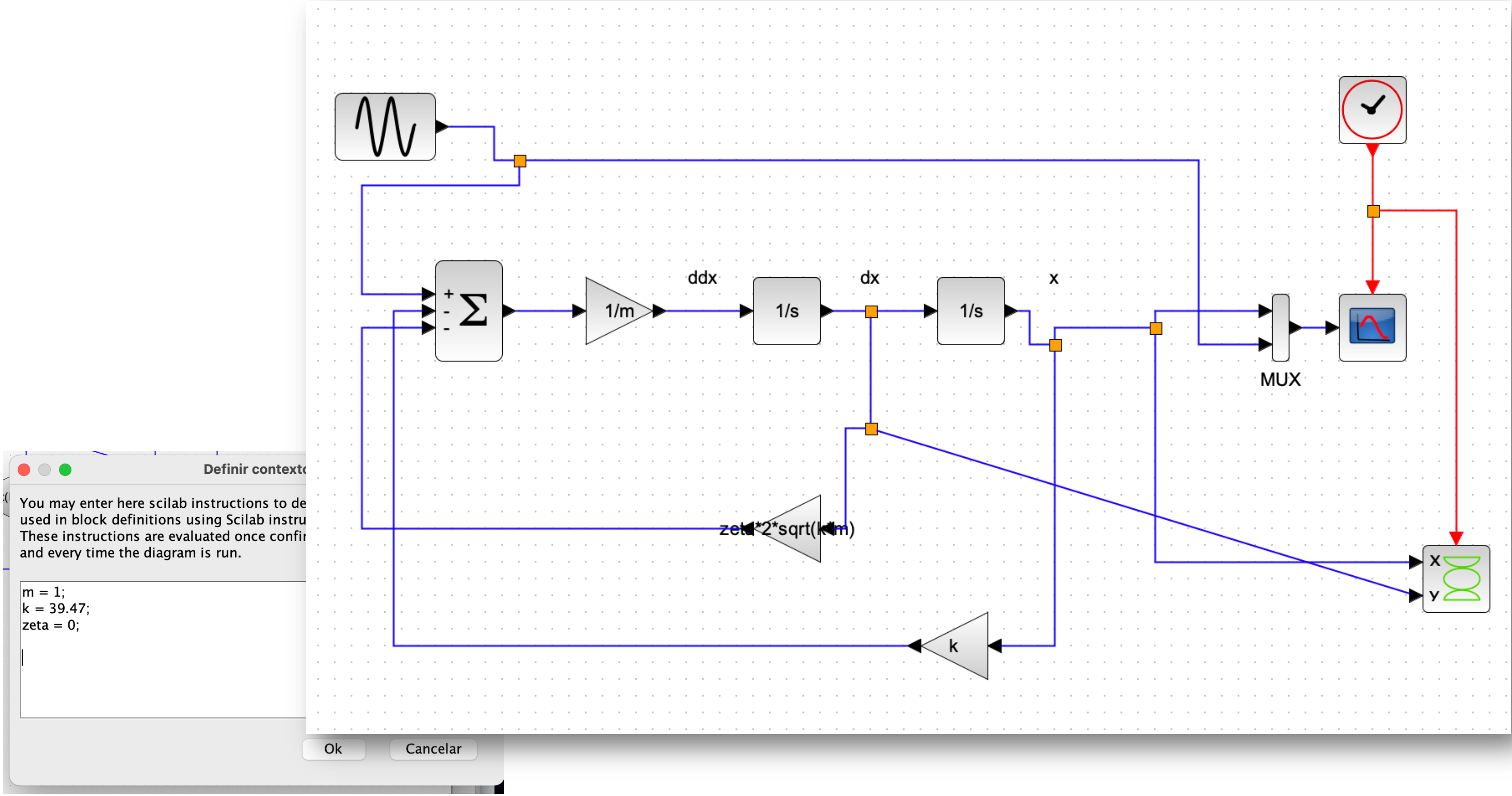
DECAIMENTO LIVRE AMORTECIDO

$$m\ddot{x} + \cancel{c}\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}([F_0 \sin \omega t] - c\cancel{\dot{x}} - kx)$$






Definir context
You may enter here scilab instructions to de
used in block definitions using Scilab instru
These instructions are evaluated once confir
and every time the diagram is run.
m = 1;
k = 39.47;
zeta = 0;
Ok
Cancelar
ddx
dx
x
1/m
1/s
1/s
MUX
k
zeta*2*sqrt(k*m)
X
Y