Dinâmica de Sistemas Navais e Oceânicos

PNV3314 Dinâmica de Sistemas

Aula 7

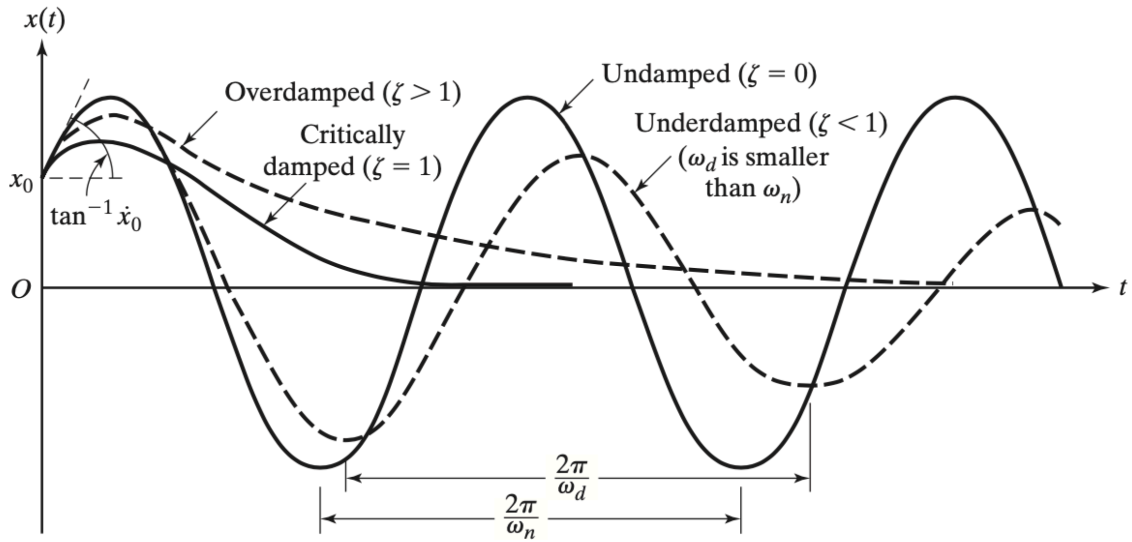
Revisão

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

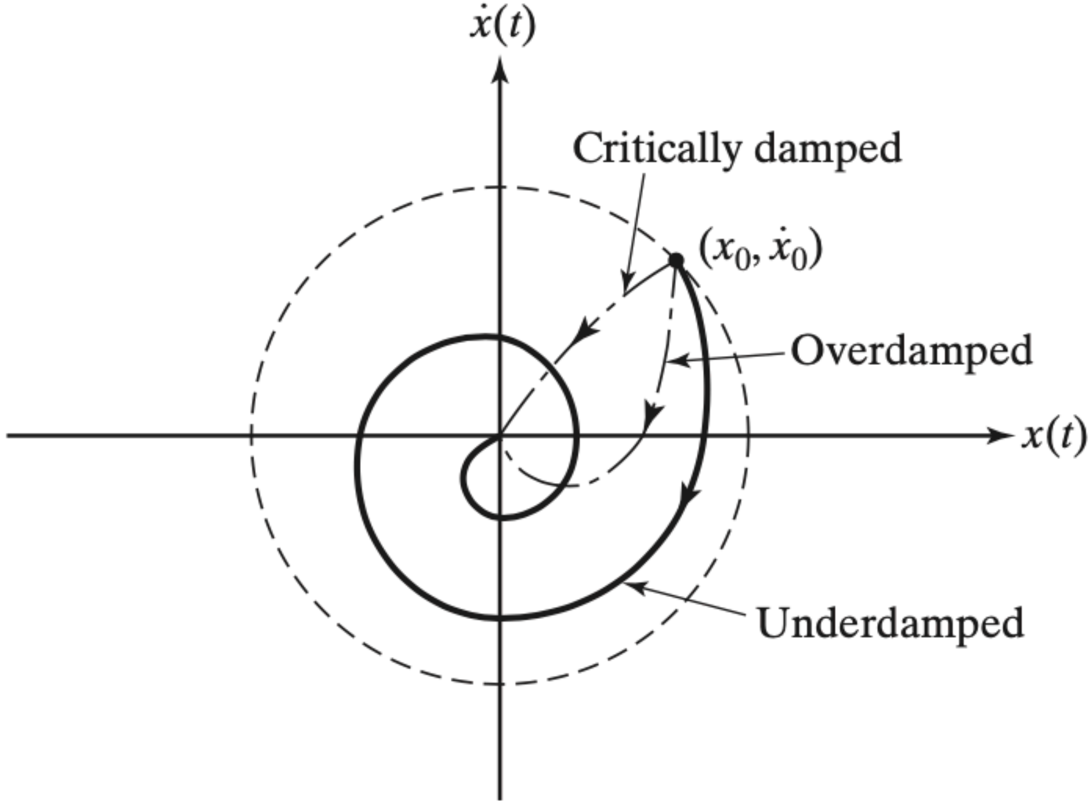
$$\zeta = c/c_c$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



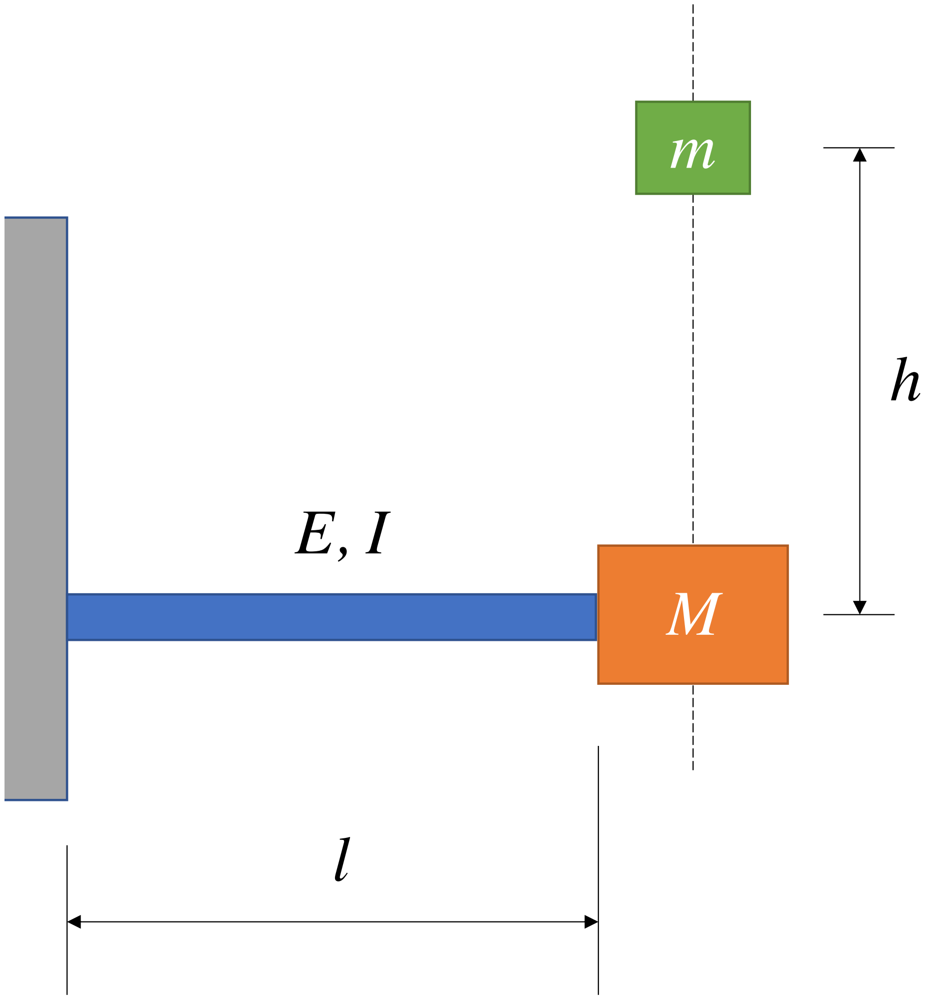
$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n$$

Revisão



$\dot{x}(t)$
Critically damped
$(x_0, \dot{x}_0)$
Overdamped
$x(t)$
Underdamped

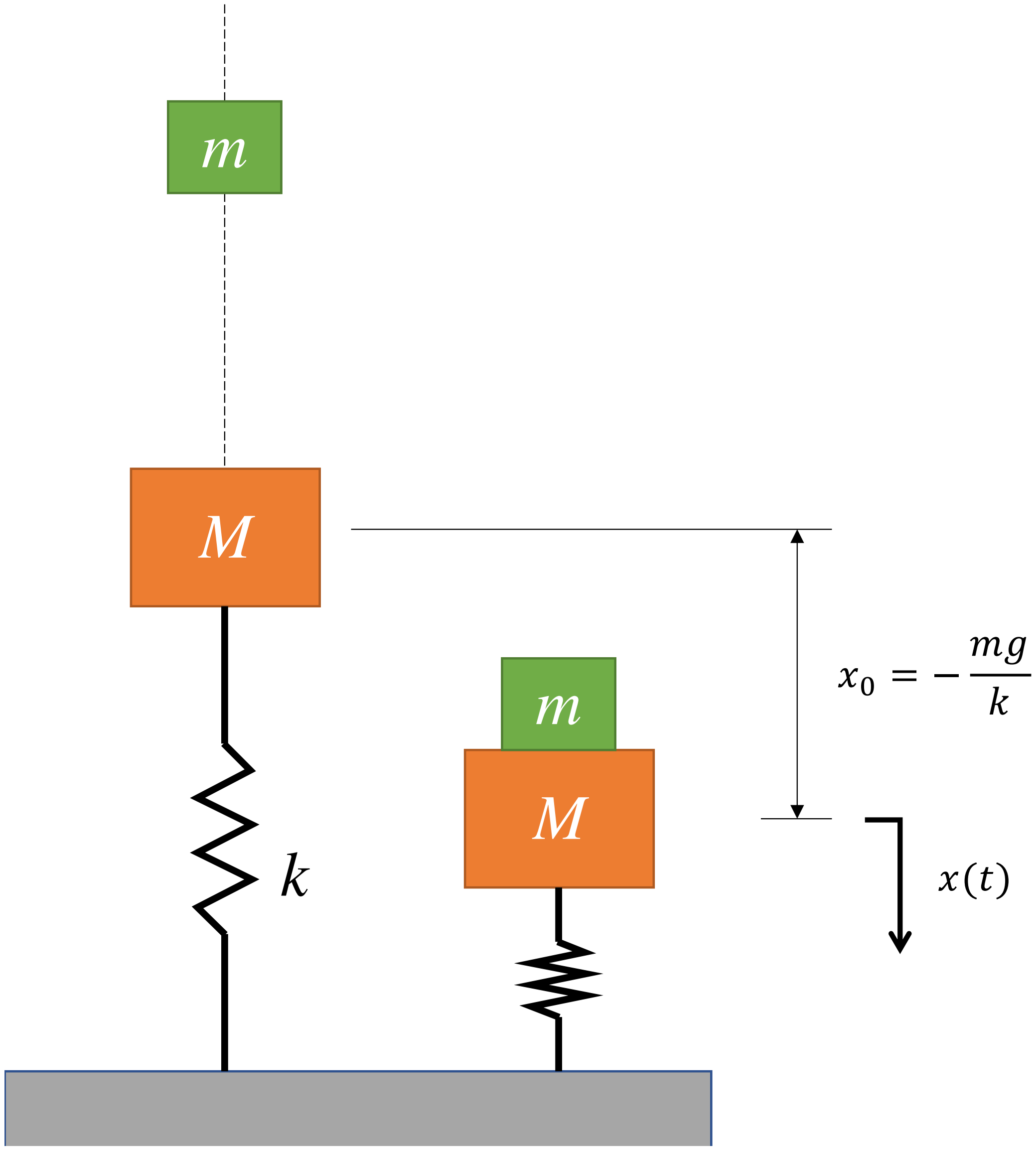
Exercícios



Exercício

Uma viga engastada suporta uma massa M na extremidade livre. Uma massa m cai de uma altura h e se adere à massa maior sem repicar.

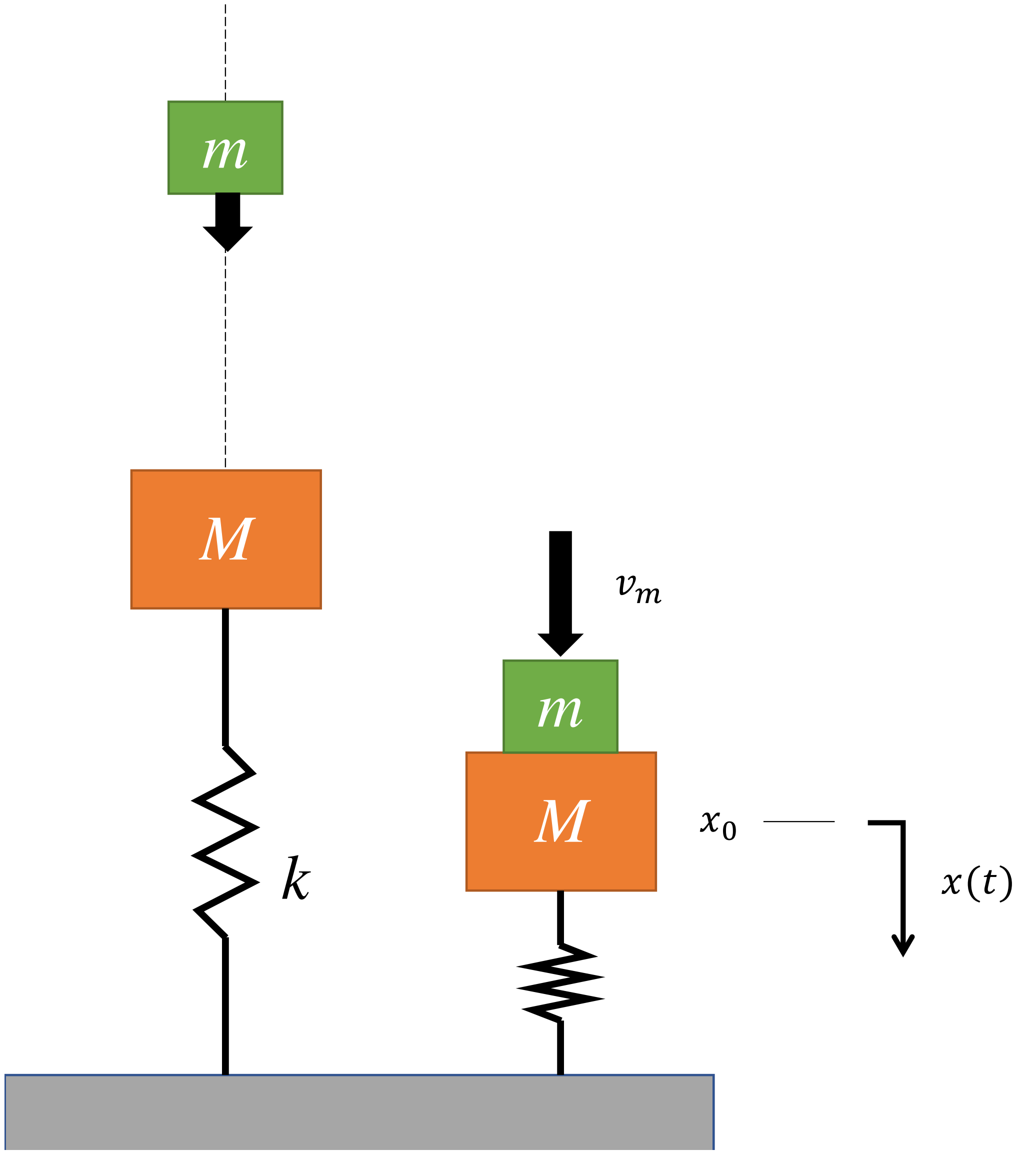
Determine o movimento transversal do sistema.



$k = \frac{3EI}{l^3}$ é a rigidez equivalente da viga em flexão.

A posição de equilíbrio estático do sistema é deslocada com a adição da nova massa.

A oscilação $x(t)$ será em volta desta nova posição de equilíbrio x_0.



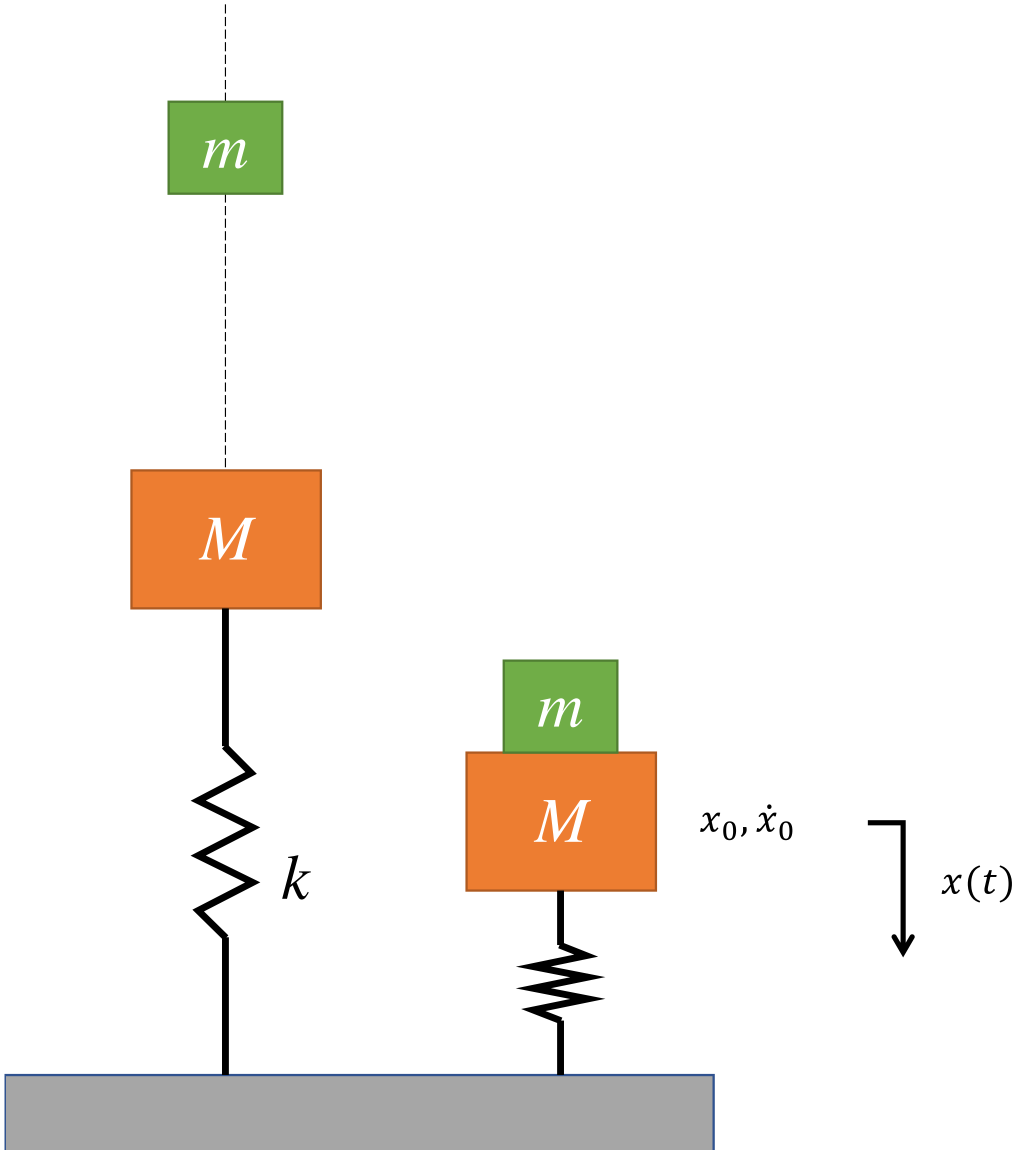
A massa m atinge a massa M com velocidade $v_m = \sqrt{2gh}$.

Conservando a quantidade de movimento...

$$m v_m = (M + m)\dot{x}_0$$

a velocidade inicial do sistema é

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M + m}\right) v_m = \left(\frac{m}{M + m}\right)\sqrt{2gh}$$

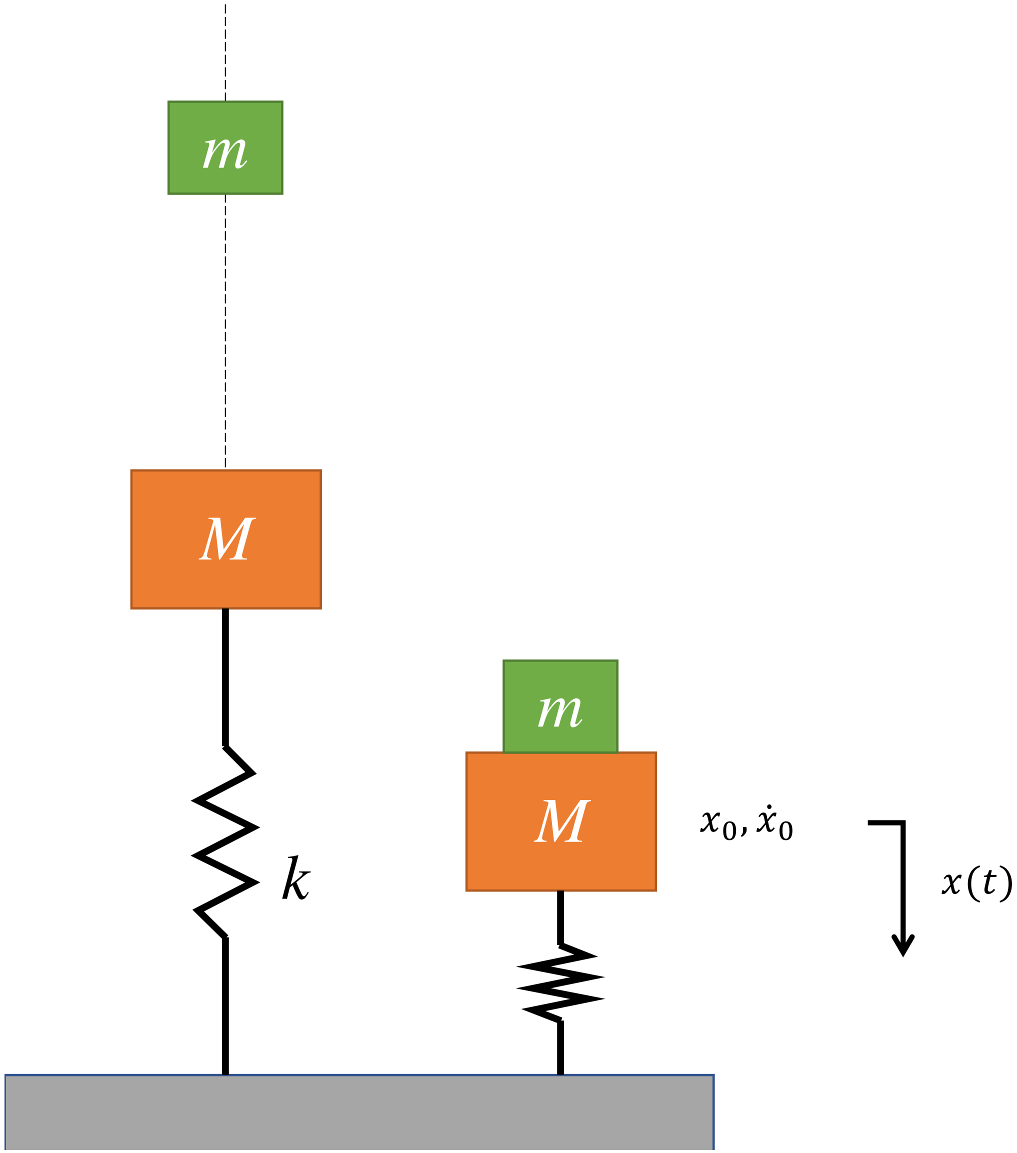


Já temos as duas condições iniciais para delocamento...

$$x_0 = -\frac{mg}{k}$$

e velocidade...

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M+m}\right)\sqrt{2gh}$$



Considerando a oscilação transversal como um movimento harmônico não amortecido...

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

onde...

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3(M+m)}}$$

Exercício para casa

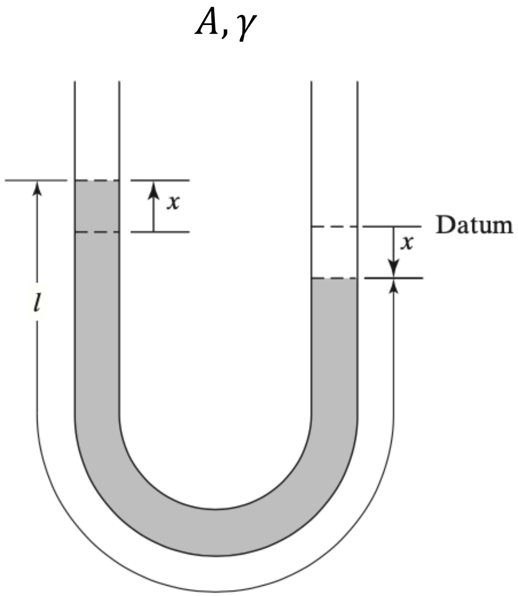
Para um movimento harmônico não amortecido descrito por

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0)$$

Prove que

$$A_0 = A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \right)$$



Exercício

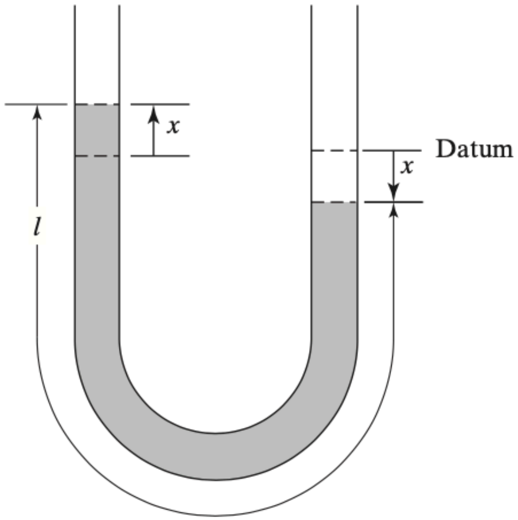
A pressão no tudo de descarga de um dos pistões de um motor diesel de 4 tempos será medida por um manômetro de tubo em U com mercúrio.

Determine o comprimento mínimo do tubo em U para que a frequência natural de oscilação da coluna de mercúrio seja 3,5 vezes mais lenta que a frequência da flutuação da pressão quando o motor estiver a 600rpm.

Nota: A frequência da flutuação da pressão na exaustão de um motor de 4 tempos é:

$$\frac{\text{Núm. cilindros} \times \text{RPM}}{2}$$

A, l, γ



Vamos calcular a frequência natural da coluna de mercúrio pelo balanço de energia.

Variação da Energia Potencial:

U = [Peso X Desloc.] sobe + [Peso X Desloc.] desce

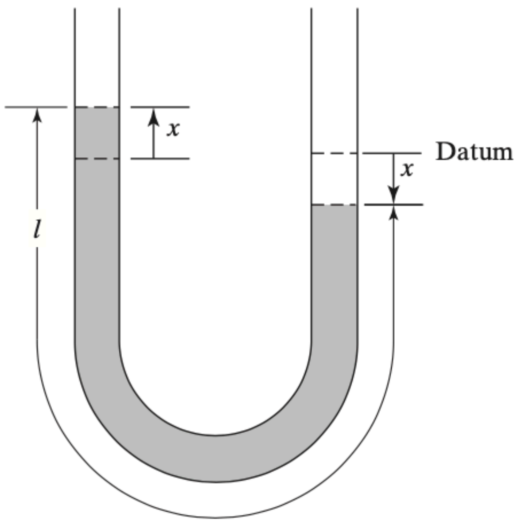
$$U = (Ax\gamma)\frac{x}{2} + (Ax\gamma)\frac{x}{2} = A\gamma x^2$$

Variação da Energia Cinética:

T = ½ [Massa merc.] x $(\text{Vel})^2$

$$T = \frac{1}{2}\frac{Al\gamma}{g}\dot{x}^2$$

A, l, γ



Assumindo oscilação harmônica não amortecida...

$$x(t) = X \cos \omega_n t$$

Com as energias expressas como:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \qquad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = U_{\max} \cos^2 \omega_n t \qquad T = T_{\max} \sin^2 \omega_n t$$

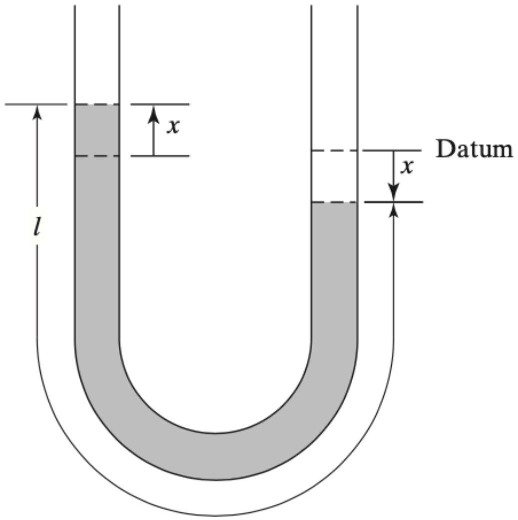
Igualando...

$$U_{\max} = A \gamma X^2 \qquad T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{A \gamma l \omega_n^2}{g} X^2$$

Resulta na frequência natural do manômetro

$$\omega_n = \left(\frac{2g}{l} \right)^{1/2}$$

A, l, γ



No nosso problema...

A frequência no tubo de descarga do motor:

$$\omega_m = \frac{1 \times 600\text{rpm}}{2} = 300\,\frac{2\pi}{60} = 10\pi \text{ rad/s}$$

Para que a frequência natural do manômetro seja $\frac{\omega_m}{3{,}5} = 9$ rad/s...

$$\omega_n = \left(\frac{2g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} = 9$$

$$l = 0{,}243\text{m}$$

Raízes da equação característica

Representação gráfica do local das raízes

Raízes da equação característica

Equação do movimento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Equação característica

$$ms^2 + cs + k = 0$$

...dividindo por m

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Raízes da eq. característica

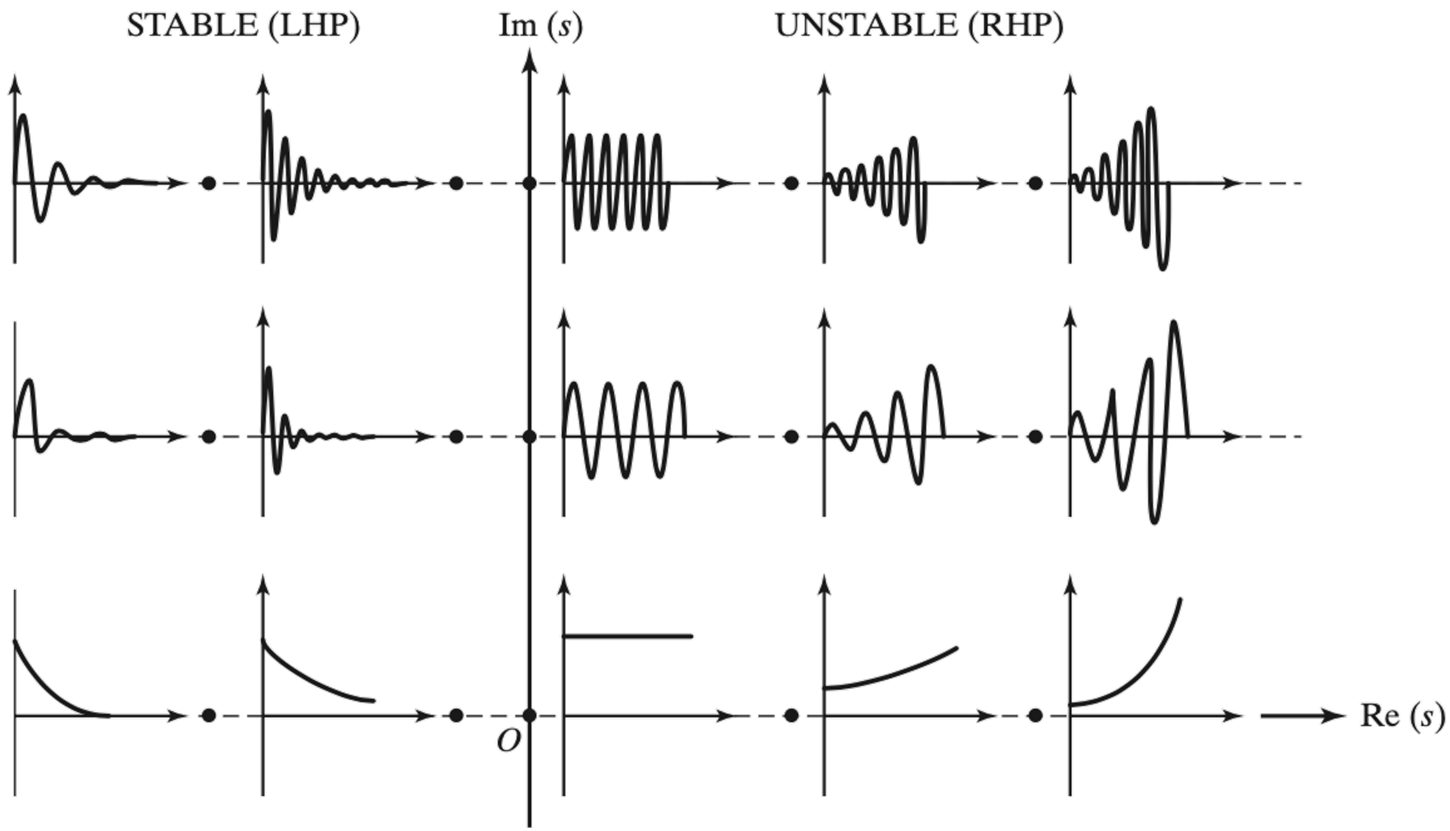
$$s_1, s_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2\,m}$$

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Solução harmônica é do tipo

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

Local das raízes: plano-s



Interpretando...

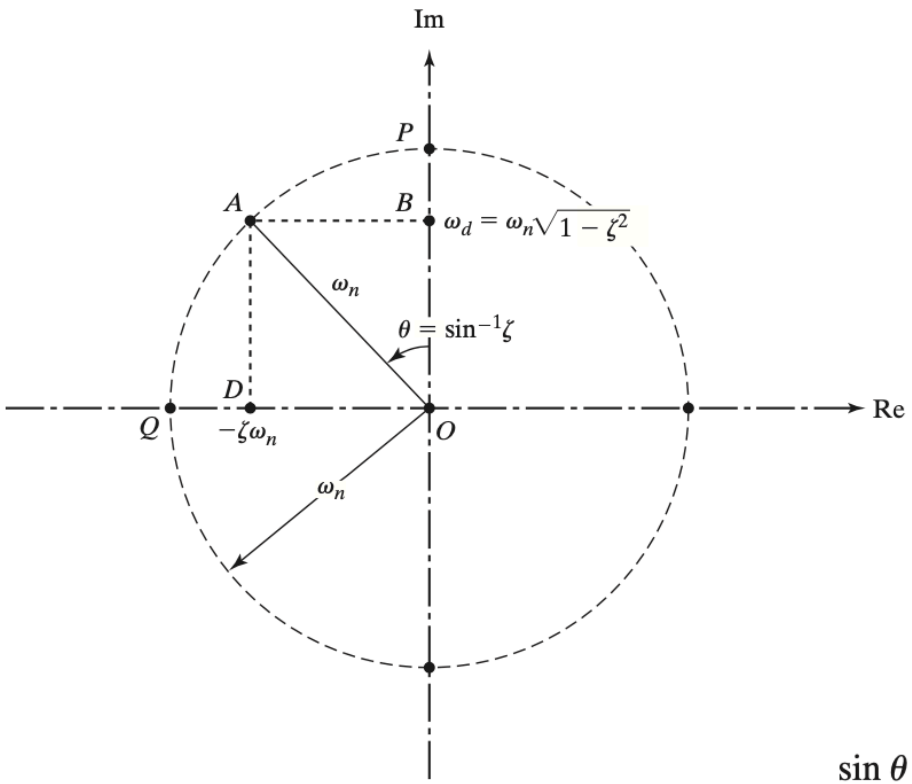


FIGURE 2.33 Interpretations of ω_n, ω_d, and ζ.

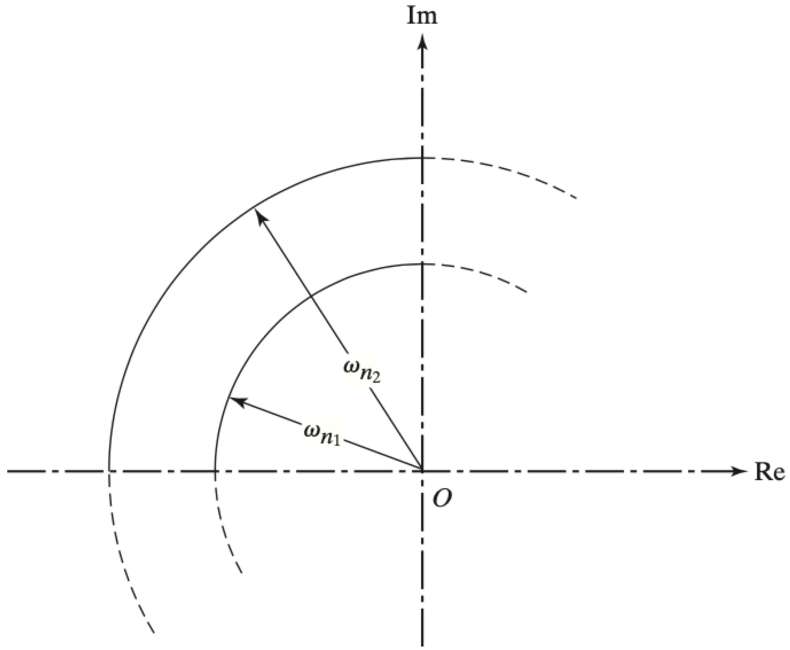


FIGURE 2.34 ω_n in s-plane.

$$\sin\theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

Interpretando...

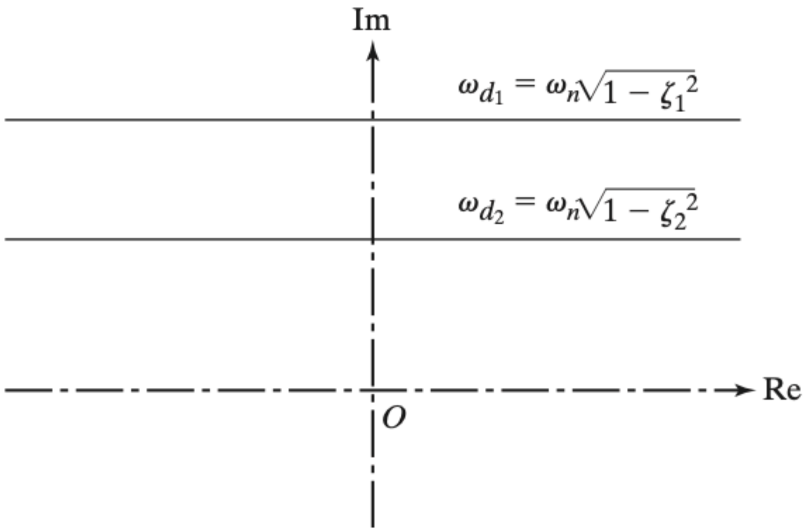


FIGURE 2.35 ω_d in s-plane.

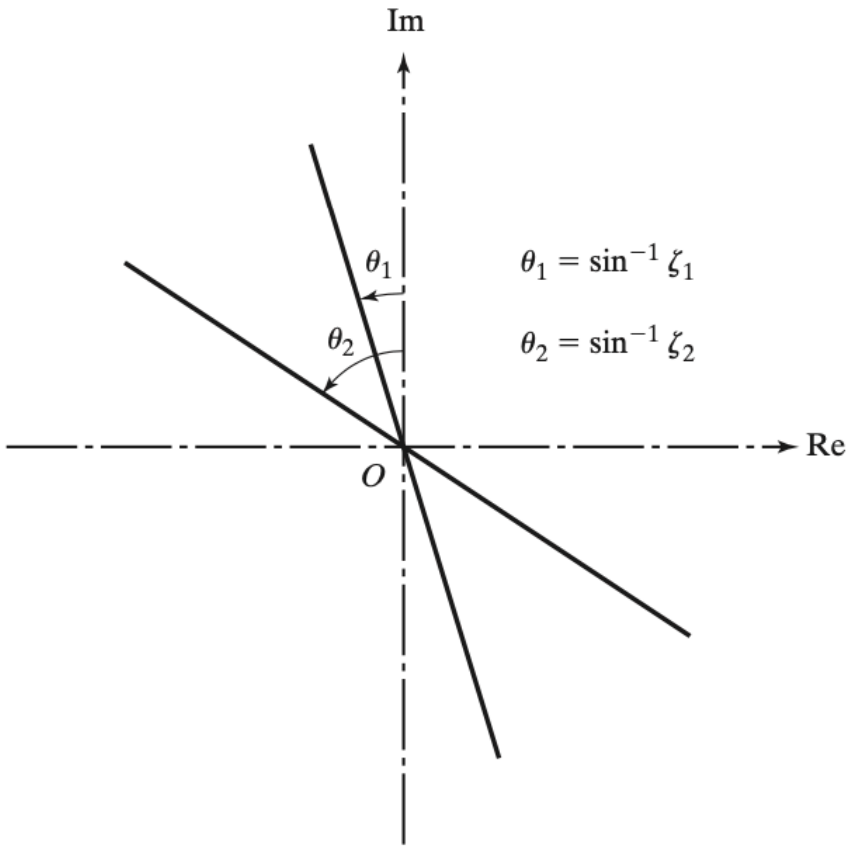


FIGURE 2.36 ζ in s-plane.

Interpretando...

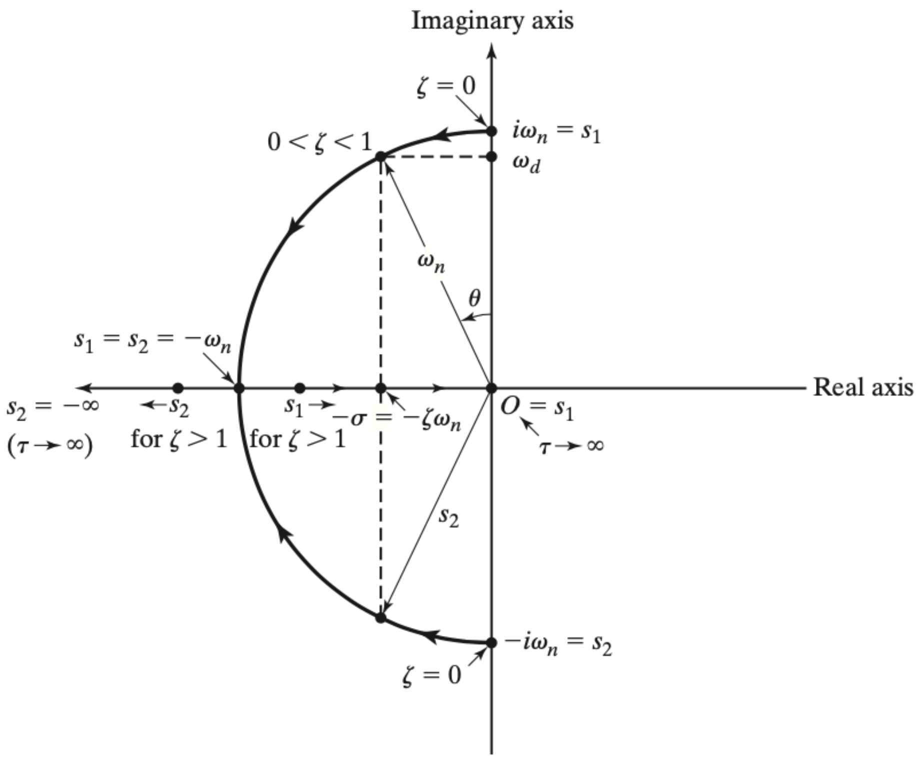


FIGURE 2.38 Root locus plot with variation of damping ratio ζ.

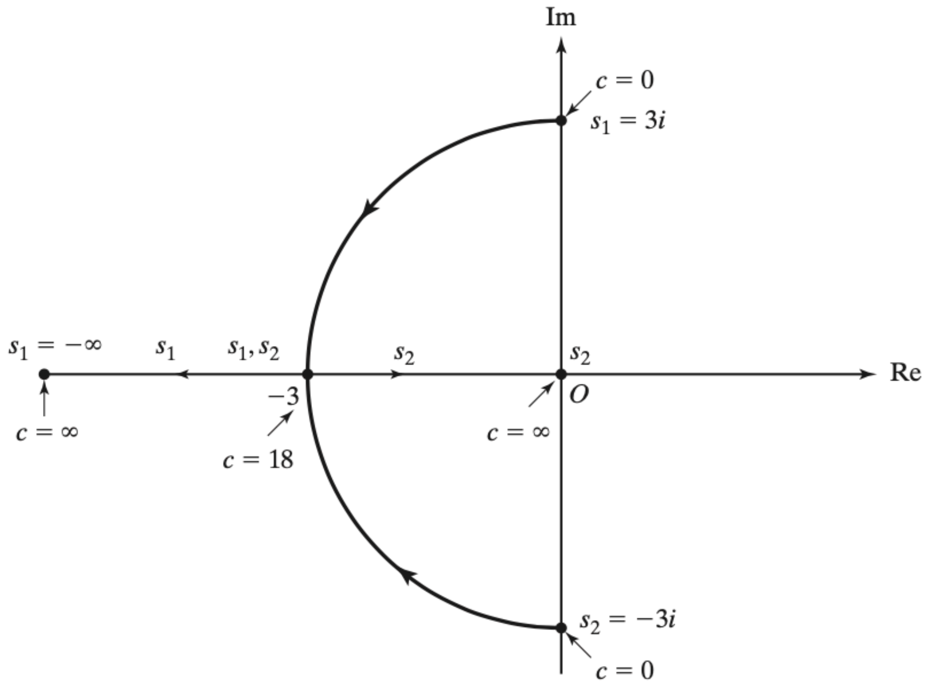


FIGURE 2.39 Root locus plot with variation of damping constant (c).

Interpretando...

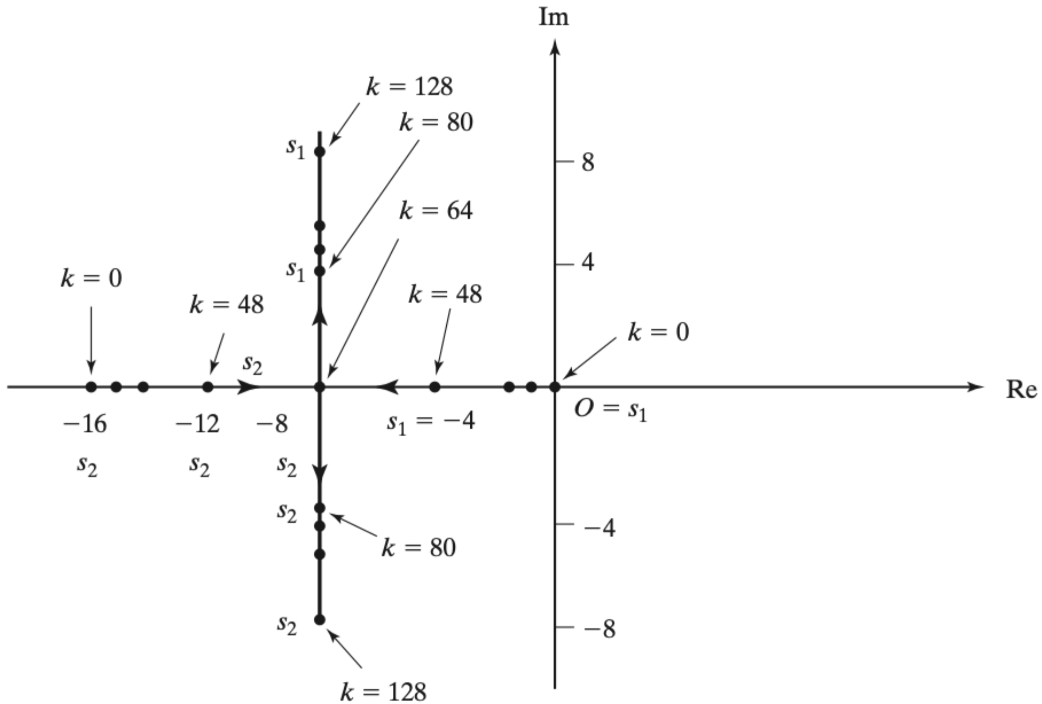


FIGURE 2.40 Root locus plot with variation of spring constant (k).

Interpretando...

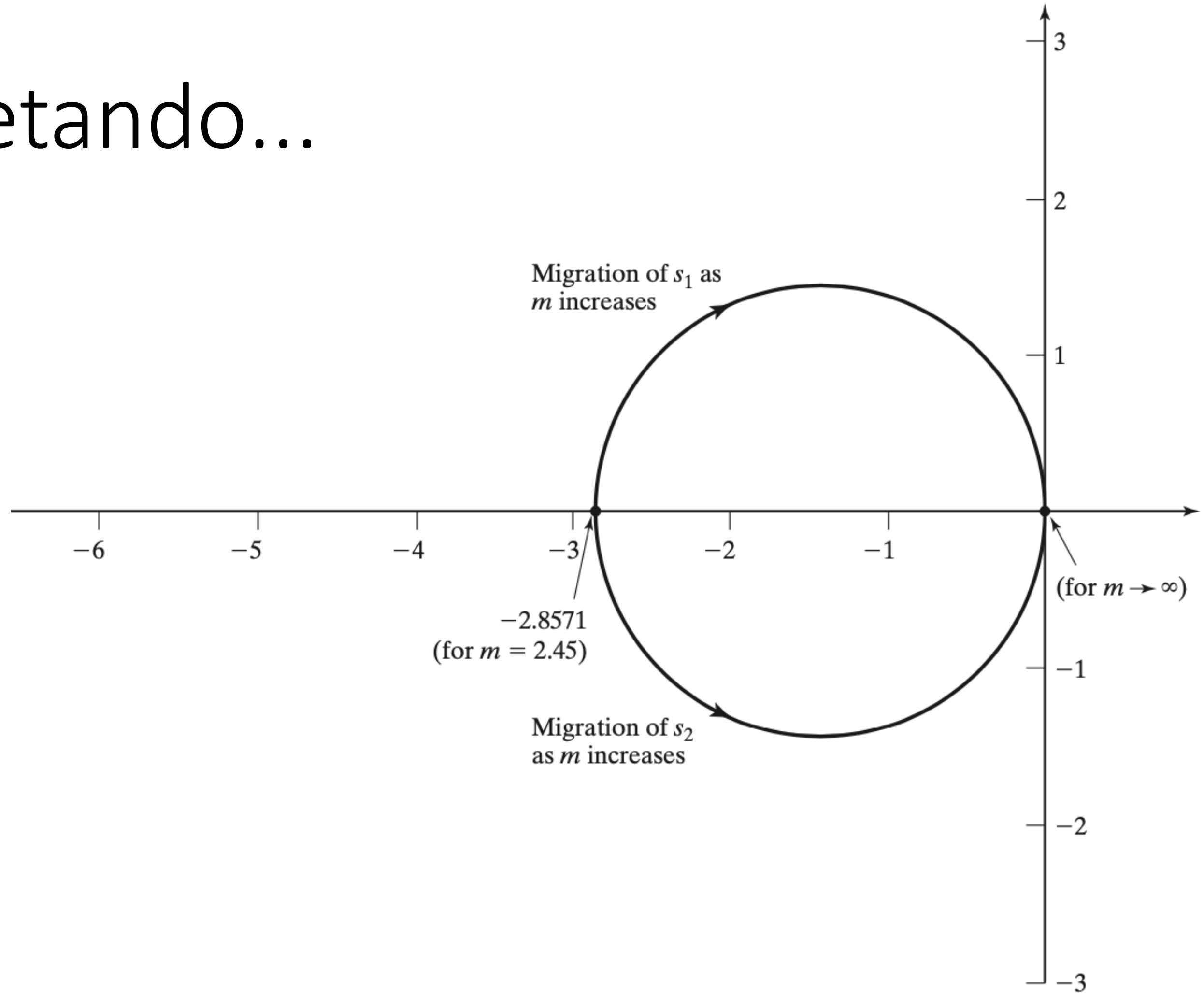
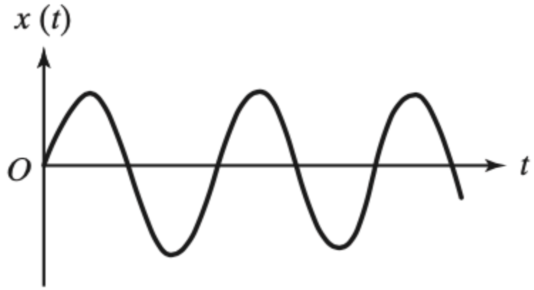


FIGURE 2.41 Root locus plot with variation of mass (m).

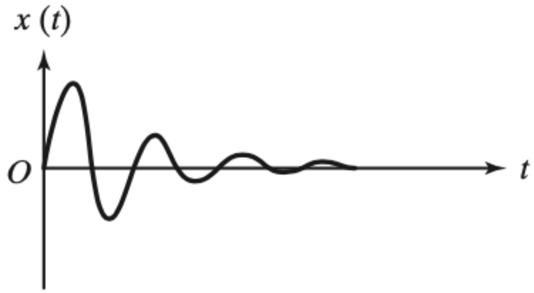
Estabilidade de sistemas

Tipos de estabilidade



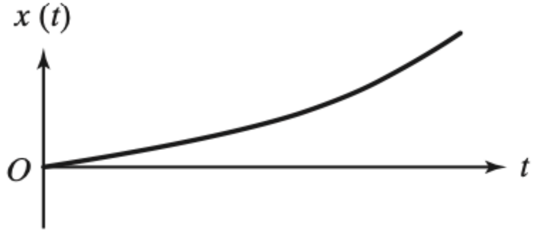
Stable system

(a)



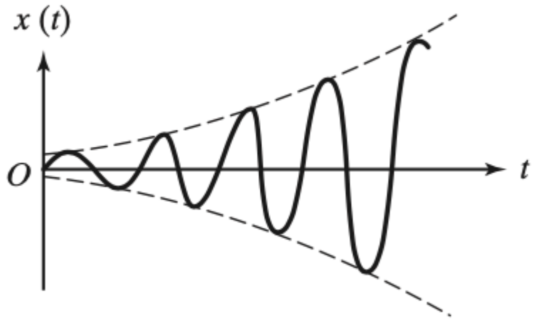
Asymptotically stable system

(b)



Unstable system (with divergent instability)

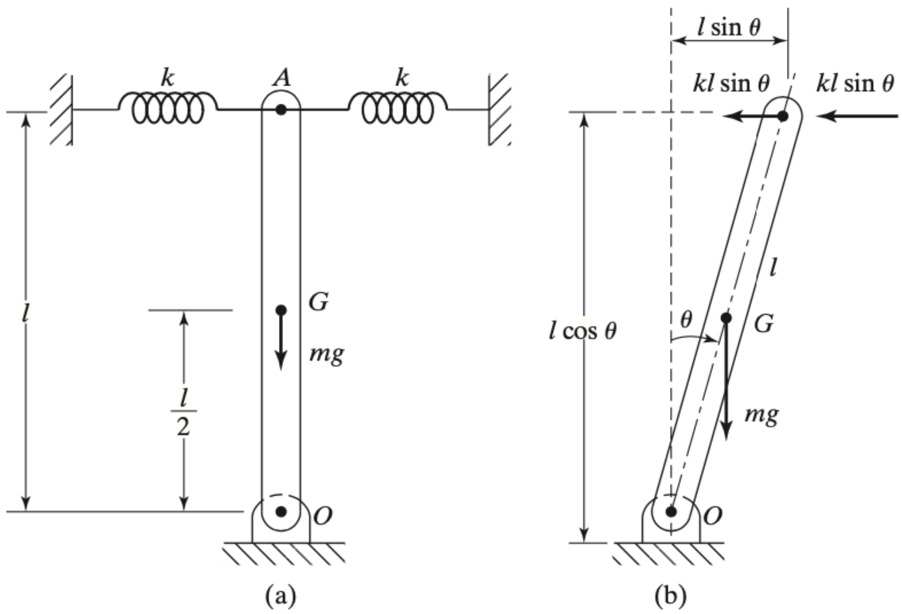
(c)



Unstable system (with flutter instability)

(d)

Exemplo: estabilidade do pêndulo invertido



$$J_0 \ddot{\theta} = (ml^2/3)\ddot{\theta}$$

Equação do movimento

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + (2kl \sin\theta) l \cos\theta - W\frac{l}{2}\sin\theta = 0$$

Para pequenas oscilações...

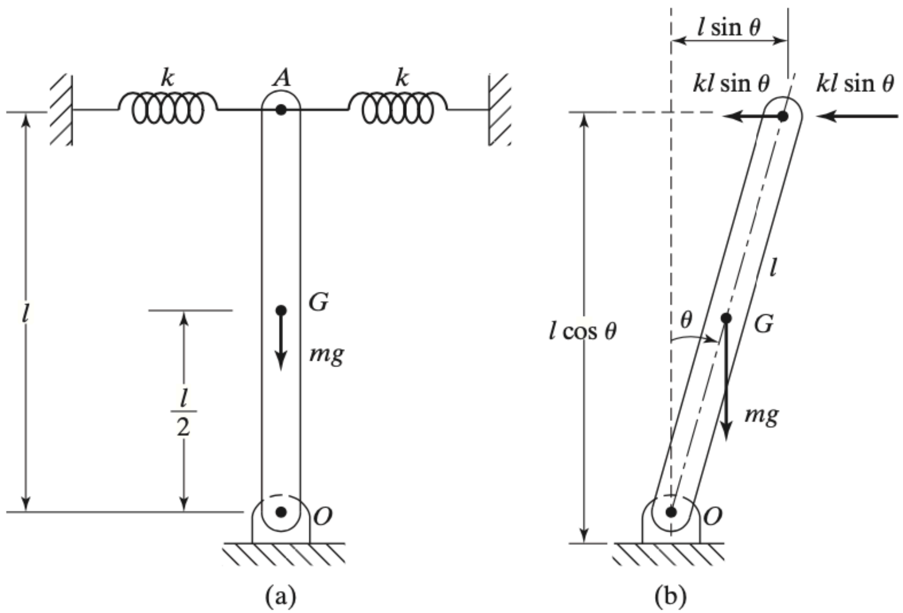
$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + 2kl^2\theta - \frac{Wl}{2}\theta = 0$$

Trocando variáveis

$$\ddot{\theta} + \alpha^2\theta = 0$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{12kl^2 - 3Wl}{2ml^2}\right)$$

Exemplo: estabilidade do pêndulo invertido



Equação característica

$$s^2 + \alpha^2 = 0 \qquad \alpha^2 = \left(\frac{12kl^2 - 3Wl}{2ml^2}\right)$$

Solução depende do sinal de \alpha

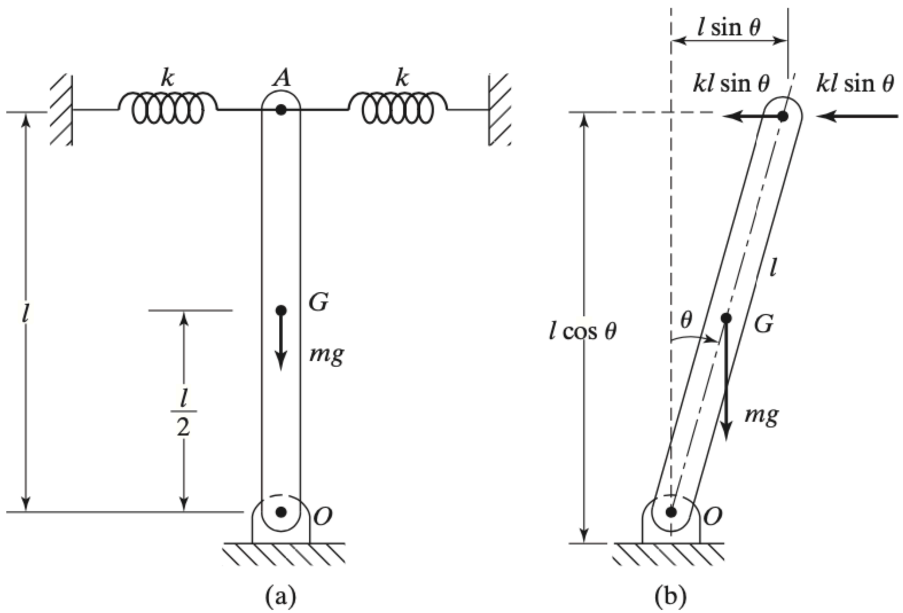
Caso 1 $\quad (12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 > 0,$

Sistema estável com oscilação estável

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

$$\omega_n = \left(\frac{12kl^2 - 3Wl}{2ml^2}\right)^{1/2}$$

Exemplo: estabilidade do pêndulo invertido



$$s^2 + \alpha^2 = 0$$

Caso 2 $\quad (12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 = 0$

Sistema se reduz a $\quad \ddot{\theta} = 0$

Integrando duas vezes... $\quad \theta(t) = C_1 t + C_2$

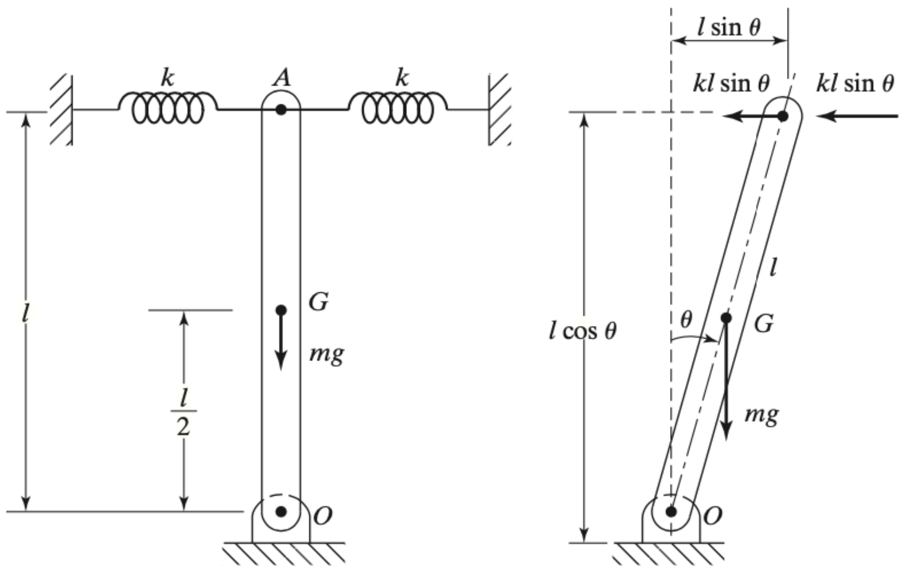
Com as CI de desl. e vel. $\quad \theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

Sistema instável

$\dot{\theta}_0 \neq 0$ Desloc. cresce com t

$\dot{\theta}_0 = 0$ Equil. estático em $\theta = \theta_0$

Exemplo: estabilidade do pêndulo invertido



$$s^2 + \alpha^2 = 0$$

Caso 3 $\quad (12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 < 0$

Solução será do tipo $\quad \theta(t) = B_1 e^{\alpha t} + B_2 e^{-\alpha t}$

Sistema instável com oscilação instável

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha}[(\alpha\theta_0 + \dot{\theta}_0)e^{\alpha t} + (\alpha\theta_0 - \dot{\theta}_0)e^{-\alpha t}]$$

Amp. cresce exponencialmente com t.

Alguma semelhança com a estabilidade de banda e roll?

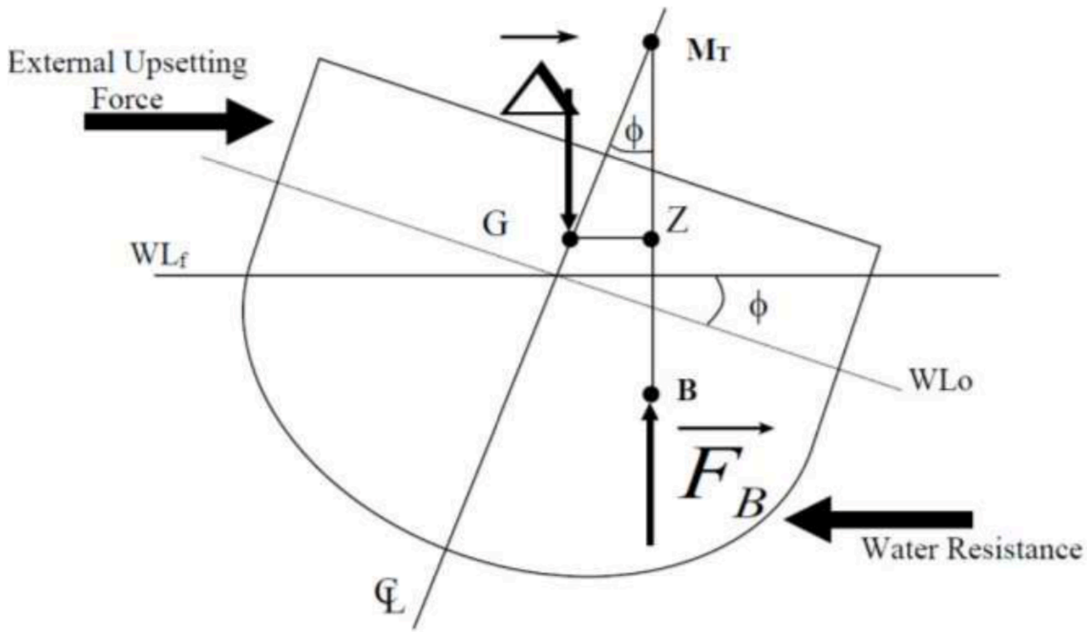


Figure 2.1: Heeled Ship due to an external moment