Matrizes

1.1.1 - Matrizes

MBA – Harvard Business School

Primeiro semestre	**Segundo semestre**
Finanças 1	Finanças 2
Marketing	Estratégia
Liderança Organizacional	Negociação
Apresentação e Relatórios	Economia Internacional
Tecnologia de operações	Liderança Corporativa

1.1.1 - Matrizes

MBA – Harvard Business School

Primeiro semestre	**Segundo semestre**
Finanças 1	Finanças 2
Marketing	Estratégia
Liderança Organizacional	Negociação
Apresentação e Relatórios	Economia Interna
Tecnologia de operações	Liderança Corporativa

Linha

Coluna

1.1.1 - Matrizes

Dólar comercial: agosto/2004

Data	Compra	Venda
02/08/2004	3,0458	3,0466
03/08/2004	3,0542	3,0550
04/08/2004	3,0571	3,0579
05/08/2004	3,0629	3,0637
06/08/2004	3,0481	3,0489

$$\begin{pmatrix} 02 & 3{,}0458 & 3{,}0466 \\ 03 & 3{,}0542 & 3{,}0550 \\ 04 & 3{,}0571 & 3{,}0579 \\ 05 & 3{,}0629 & 3{,}0637 \\ 06 & 3{,}0481 & 3{,}0489 \end{pmatrix}$$

Elementos de uma matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz } 5 \times 3$$

Linha

Coluna

MATRIZ

Seqüência de números reais distribuídos em m linhas e n colunas formando uma tabela:

LINHAS

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{mxn}]$$

COLUNAS

Tipos especiais de matrizes

Igualdade de matrizes

- Duas matrizes, A e B, são iguais se todos os elementos de A forem iguais a todos os elementos de B.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 6 & -1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 6 & -1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualdade de matrizes

- Obter x, y, z e w que tornam as matrizes iguais

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz linha e matriz coluna

Matriz linha

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Co-vetor

Matriz coluna

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vetor

Matriz quadrada

É uma matriz $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 6 & -1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

É uma matriz quadrada tal que todos os elementos fora da diagonal são nulos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Exemplos:}$$

$$I_{1\times 1} = (1) \qquad I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

$$\text{Exemplos:}$$

$$I_{1\times 1} = (3) \qquad I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

$$0_{n\times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Exemplos:}$$

$$0_{1\times 1} = (0) \quad 0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Exemplos :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = (3)$$

Matriz antissimétrica

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0)$$

Matriz triangular inferior

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1.3 – Operações matriciais

Soma de matrizes

Produto por um escalar

Produto de matrizes

Soma de matrizes

Operação entre duas matrizes com o mesmo número de linhas e colunas.

$$\text{Exemplo}:$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Produto por um escalar

Operação entre uma matriz e um número (real).

$$\text{Exemplo}:$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{1.2 + (-2).5 + 4.(-1) = -12}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{1.2 + (-2).5 + 4.(-1) = -12}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$1.0 + (-2).3 + 4.4 = 10$$

$$A.B = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad 4} \\ 3 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{1.0 + (-2).3 + 4.4 = 10}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{1.6 + (-2).(-3) + 4.1 = 16}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad 4} \\ 3 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{1.6 + (-2).(-3) + 4.1 = 16}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad 4} \\ 3 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 16 \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{3.2 + 0.5 + (-1).(-1) = 7}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 16 \\ & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{3.2 + 0.5 + (-1).(-1) = 7}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ \boxed{3 \quad 0 \quad -1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 16 \\ 7 & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{3.0 + 0.3 + (-1).4 = -4}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 16 \\ 7 & & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{3.0 + 0.3 + (-1).4 = -4}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 16 \\ 7 & -4 & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{3.6+0.(-3)+(-1).1=17}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ \boxed{3 \quad 0 \quad -1}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ 5 & 3 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 10 & 16\\ 7 & -4 & \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Operação entre uma matriz $n \times p$ por uma matriz $p \times m$.

Exemplo:

$$\boxed{3.6 + 0.(-3) + (-1).1 = 17}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 16 \\ 7 & -4 & 17 \end{pmatrix}$$

Potência de uma matriz

$$A^n = A \cdot A \cdot A \ldots A \;\; (n \text{ vezes})$$

Matriz transposta

Troca linhas por colunas em uma matriz.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \\ 6 & 8 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Traço de uma matriz

Soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada.

Exemplos:

$$Tr\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2+3=5 \qquad Tr\begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 6 & -1 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Matriz inversa

Uma matriz A^{-1} é a matriz inversa de uma matriz quadrada A se $A^{-1}A = I$.

Exemplo :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz idempotente

$$A^2 = A$$

$$\text{Exemplo}:$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz nilpotente

$$A^2 = 0$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz ortogonal

$$A^t = A^{-1}$$

Exemplo: $$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$