Universidade de São Paulo
Instituto De Ciências Matemáticas e de Computação

Prof. Jorge Bazán

Probabilidade condicional e independência

Estatística I - SME0320

São Carlos
2023/01

Capítulo 1

ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

1.1. Probabilidade Condicional

Definição (Probabilidade Condicional): Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral S. A probabilidade condicional de A dado que B aconteceu é dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.1}$$

A probabilidade condicional também é uma medida de probabilidade e, portanto, satisfaz os axiomas da probabilidade e os teoremas que foram derivados.

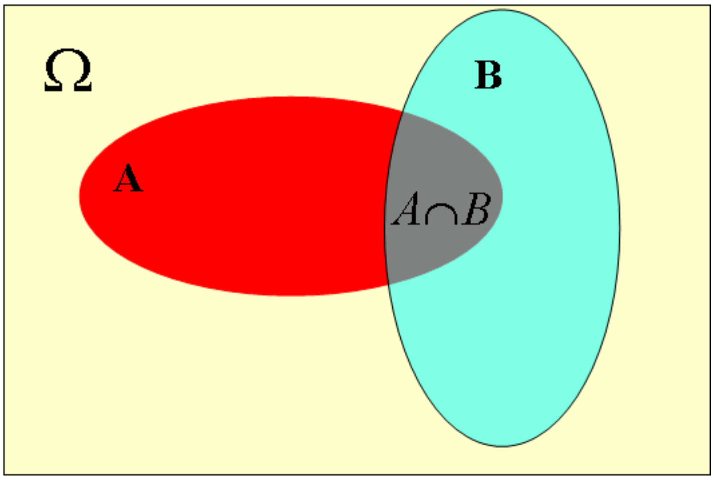

Figura 1.1: Definição de probabilidade condicional

Exemplo 1: Ao lançarmos um par de dados corretos, qual é a probabilidade de que somente a face de um dos dados seja par, sabendo-se que a soma das duas faces é maior que 8?

Solução: Sejam os eventos:

- A: Somente uma das faces é par;
- B: A soma das duas faces é maior que 8.

Neste caso, $n\,(A \cap B) = 6$ e $n\,(B) = 10$. Então

$$P\,(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{10}.$$

1.1.1. Regra do produto

Dados os eventos A e B de um mesmo espaço amostral, a probabilidade de que ambos aconteçam é dado por

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B). \tag{1.2}$$

Propriedades: Dados A, B e C em Ω, então:

(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$

(ii) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid (A \cap B))$

Exemplo 2: Um lote contêm 10 peças das quais 4 são defeituosas. Se retirarmos 3 peças, uma a uma e sem reposição, qual a probabilidade de que somente uma das três peças tenha defeito?

Solução: Seja o evento D_i, na qual $i = 1, 2, 3$, a i-ésima peça que apresenta defeito. Assim,

$$\begin{aligned} P\,(\text{somente uma tenha defeito}) &= P\left(D_1B_2B_3\right) + P\left(B_1D_2B_3\right) + P\left(B_1B_2D_3\right) \\ &= 4/10 \times 6/9 \times 5/8 + 6/10 \times 4/9 \times 5/8 + 6/10 \times 5/9 \times 4/8 = 1/2 \end{aligned}$$

1.1.2. Probabilidade total

Regra da probabilidade total: Seja $B_1, \ldots, B_n$ uma coleção de eventos que formam uma partição do espaço amostral Ω, isto é, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Seja A outro evento definido sobre Ω, então

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i). \tag{1.3}$$

Obs.: Note que $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$. Aplicando a propriedade distributiva, temos $A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$, união disjunta, e aplicando o terceiro axioma, temos

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i).$$

Finalmente, aplicando a regra do produto a cada termo da soma, para uma partição de Ω em dois eventos B e B^C, obtemos

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P\left(B^C\right) P\left(A \mid B^C\right).$$

1.1.3. Regra de Bayes

Considerando as mesmas condições da probabilidade total, cumpre-se que

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)} \tag{1.4}$$

Por definição de probabilidade condicional, $P(B_j \mid A) = \dfrac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$, e aplicando a regra do produto no numerador e a probabilidade total no denominador, obtemos a regra de Bayes.

A fórmula permite calcular facilmente probabilidades condicionais, $P(B_j \mid A) = \dfrac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$, chamadas probabilidades a posteriori, obtidas caso conheçamos as probabilidades a priori $P(B_j)$, e condicionais $P(A \mid B_j)$.

Exemplo 3: Sabe-se que 70 % dos pacientes de um hospital são mulheres e que 20 % delas são fumantes. Por outro lado, 40 % dos pacientes homens são fumantes. Se escolhermos ao acaso um paciente do hospital,

(a) qual é a probabilidade de que seja fumante?

(b) se for fumante, qual é a probabilidade de que seja mulher?

Solução (a): Sejam os eventos:

- $F = \{\text{pacientefumante}\}$
- $H = \{\text{Que o paciente seja homem}\}$
- $M = \{\text{Que o paciente seja mulher}\}$

Então a probabilidade de ser fumante é calculada por

$$P(F) = P(M)\,P(F \mid M) + P(H)\,P(F \mid H)$$

Sabemos que: $P(M) = 0,7$, $P(H) = 0,3$, $P(F \mid M) = 0,2$ e $P(F \mid H) = 0,4$. Substituindo os valores na fórmula anterior, obtemos:

$$P(F) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,4 = 0,26$$

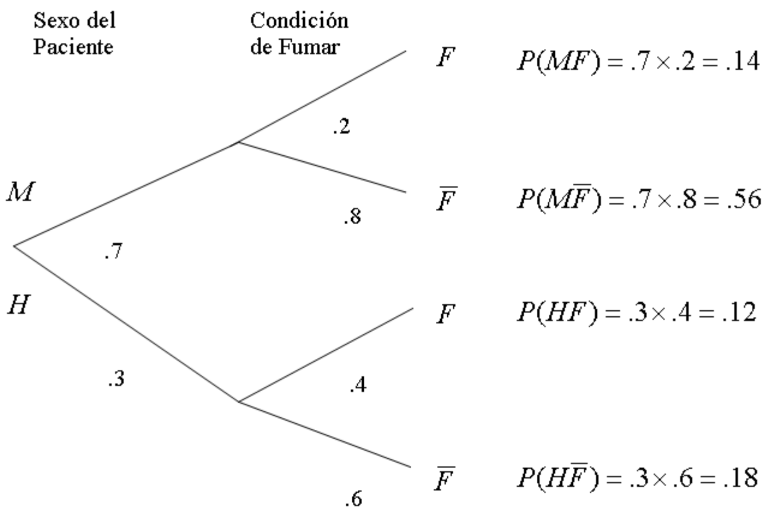

Figura 1.2: Diagrama de árvore para o Exemplo 3.

Finalmente, temos que

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M)P(F/M) \cap F}{P(F)} = \frac{0,7 \times 0,2}{0,26} = \frac{0,14}{0,26} = 0,54.$$

1.2. Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes se o fato de um deles acontecer, não afeta a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ ou } P(B \mid A) = P(B). \tag{1.5}$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a seguinte definição

Dois eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Propriedades: As seguintes situações são equivalentes:

- Os eventos A e B são independentes.

- Os eventos A e B^C são independentes.
- Os eventos A^C e B são independentes.
- Os eventos A^C e B^C são independentes.

Exemplo 4: Um atirador faz dois disparos a um alvo. A probabilidade de que ele acerte o alvo é $0,8$, independentemente do disparo que faz. Qual a probabilidade de que o atirador:

(a) acerte ambos disparos?

(b) acerte somente um dos disparos?

(c) acerte pelo menos un disparo?

(d) Não acerte nenhum dos disparos?

Solução: Sejam os eventos $A_i = \{\text{Que o atirador acerte no alvo quando dispara } i\}$, $i = 1, 2$. Aplicando diretamente as propriedades de eventos independentes, obtemos:

(a) $P\left(A_1 \cap A_2\right) = P(A_1)P(A_2) = 0,8 \times 0,8 = 0,64.$

(b) $P\left(A_1 \cap A_2^C\right) + P\left(A_1^C \cap A_2\right) = P(A_1)P\left(A_2^C\right) + P\left(A_1^C\right)P(A_2) = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,8 = 0,32.$

(c) $P\left(A_1 \cup A_2\right) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,8 + 0,8 - 0,8 \times 0,8 = 0,96.$

(d) $P\left(A_1^C \cap A_2^C\right) = P\left(A_1^C\right)P\left(A_2^C\right) = 0,2 \times 0,2 = 0,04.$