Números, Equações, Inequações, Módulo

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023**

Os Números Racionais

Indicamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais respectivamente. Assim

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}\,;\; a, b \in \mathbb{Z}\,,\; b \neq 0 \right\}.$$

Indicamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais respectivamente. Assim

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \, ; \, a, b \in \mathbb{Z}\,, \; b \neq 0 \right\}.$$

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes.

Propriedades de um Corpo - Adição

Vamos assumir conhecidas as seguintes propriedades da adição de números racionais:

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) $\exists\ 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, $\forall\ x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) $\forall\ x \in \mathbb{Q}$, $\exists\ y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$.

Propriedades de um Corpo - Multiplicação

Vamos assumir conhecidas as seguintes propriedades da multiplicação de números racionais:

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx,$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) $\exists\ 1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, $\forall\ x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) $\forall\ x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0$, $\exists\ y \in Q, \left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$.

Propriedades de um Corpo - Distributiva

(D) (**distributiva da multiplicação**)

$$x(y + z) = xy + xz, \ \forall \ x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Propriedades de um Corpo - Distributiva

(D) (**distributiva da multiplicação**)

$$x(y+z) = xy + xz, \ \forall \ x, y, z \in \mathbb{Q}\,.$$

Vamos assumir conhecida a distributiva da multiplicação de números racionais.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado. Assim, além das propriedades anteriores, também valem:

(O1) (**reflexiva**) $x \leq x, \forall\, x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**antissimétrica**) $x \leq y \;\text{ e }\; y \leq x \implies x = y, \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leq y,\; y \leq z \implies x \leq z, \forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$;

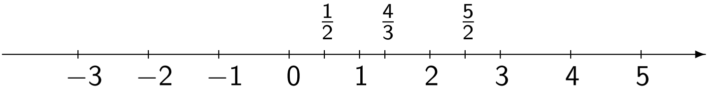
(O4) $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$;

(OA) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$;

(OM) $x \leq y$ e $z \geq 0 \implies xz \leq yz$.

$\mathbb{Q}$ não é completo

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.

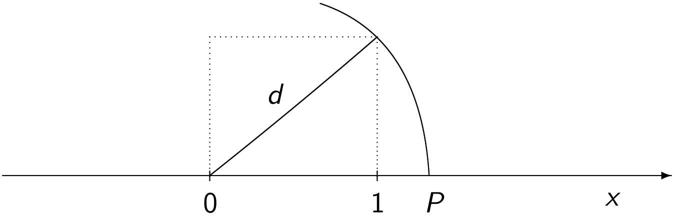


Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Nem todo ponto da reta real é racional.

Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d.



Mostraremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição 1

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então valem:

(a) *Se a for ímpar, então a^2 é ímpar;*

(b) *Se a^2 for par, então a é par.*

Prova:

(a) Se a for ímpar, então existirá $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k + 1$. Logo

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1, \end{aligned}$$

onde $\ell = 2k^2 + 2k$, e portanto a^2 também será ímpar.

(b) Suponha, por absurdo, que a não é par. Logo a é ímpar. Então, pela Proposição 1 (a), a^2 também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto a é par. $\square$

Proposição 2

A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $x^2 = 2$ tenha solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

ou seja,

$$a^2 = 2b^2$$

e, portanto a^2 é par. Segue da Proposição anterior, item (b), que a também é par. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.

Mas

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2b^2 \\ a = 2k \end{array}\right\} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2\,.$$

Portanto b^2 é par e, pela Proposição anterior, item (b), b também é par. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por 2) o que é uma contradição.

Logo não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2\,.$ $\square$

Proposição 3

Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. A equação $x^2 = p$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Proposição 4

Seja $p_1, p_2, \ldots p_n$ números primos distintos. A equação $x^2 = p_1 p_2 \ldots p_n$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Para provar estas duas proposições usaremos

Proposição 5 (Decomposição primária)

Se um número primo p divide um produto de números naturais, então p divide um dos números deste produto.

As duas proposições anteriores apresentam vários números irracionais:

$$\sqrt{p} \quad \text{e} \quad \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

onde p e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são primos distintos.

Proposição 6

Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. A equação $x^2 = p$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $x^2 = p$ tenha solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = p,$$

ou seja,

$$a^2 = pb^2$$

e, portanto p divide a^2. Segue da Decomposição primária que p também divide a. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = kp$.

Mas

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = pb^2 \\ a = kp \end{array}\right\} \implies pb^2 = k^2p^2 \implies b^2 = k^2p\,.$$

Portanto p divide b^2 e, pela Decomposição primária, p divide b. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por p) o que é uma contradição.

Logo não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = p\,.$ $\square$

Proposição 7

Seja $p_1, p_2, \ldots p_n$ números primos distintos. A equação $x^2 = p_1 p_2 \ldots p_n$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $x^2 = p_1 p_2 \ldots p_n$ tenha solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = p_1 p_2 \ldots p_n,$$

ou seja,

$$a^2 = p_1 p_2 \ldots p_n b^2$$

e, portanto p_1 divide a^2. Segue da Decomposição primária que p_1 também divide a. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = kp_1$.

Mas

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= p_1 p_2 \dots p_n b^2 \\ a &= k p_1 \end{aligned}\right\} \implies p_1 p_2 \dots p_n b^2 = k^2 p_1^2$$

$$\implies p_2 \dots p_n b^2 = k^2 p_1$$

Portanto p_1 divide $p_2 \dots p_n b^2$. Como $p_1, p_2, \dots, p_n$ são primos distintos, pela Decomposição primária, p_1 divide b^2 e portanto b. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por p_1) o que é uma contradição.

Logo não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = p_1 p_2 \dots p_n$. $\square$

Definição 8

- *Diremos que um subconjunto A de um corpo ordenado $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é limitado superiormente se existe $L \in \mathbb{F}$ tal que $a \leq L$ para todo $a \in A$. Neste caso, L é chamado limitante superior de A.*
- *Se A for um conjunto limitado superiormente, um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ será chamado o supremo de A se for o menor limitante superior de A; ou seja, se $a \leq \sup(A)$ para todo $a \in A$ e, se $\mathbb{F} \ni f < \sup(A)$, existe $a \in A$ tal que $f < a$.*
- *Um corpo para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo é chamado um corpo ordenado completo.*

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo; ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado que não é completo.

Exemplo 9

O conjunto $A = \{q \in \mathbb{Q}; q > 0 \ \ e \ \ q^2 < 2\}$ *é limitado superiormente, porém não tem supremo em* $\mathbb{Q}$.

Exemplo 10

O conjunto $A = \{p \in \mathbb{Q}; p > 0 \ \text{ e } \ p^2 < 2\}$ *é limitado superiormente, porém não tem supremo em* $\mathbb{Q}$*.*

Prova: É claro que 2 é um limitante superior para A. Considere $B = \{p \in \mathbb{Q}; p > 0 \ \text{ e } \ p^2 > 2\}$. Dado $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, defina

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{1}$$

Observe que

$$q^2 - 2 = \frac{4(p+1)^2 - 2(p+2)^2}{(p+2)^2} = \frac{2(p^2 - 2)}{(p+2)^2}. \tag{2}$$

Segue de (1) e (2) que:

- $p \in A \Longrightarrow q > p$ e $q \in A$
- $p \in B \Longrightarrow q < p$ e $q \in B$

Portanto (justificar) A não tem supremo em $\mathbb{Q}$. $\square$

Teorema 11

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) e portanto é um corpo ordenado. Além disso* $\mathbb{R}$ *é completo.*

- Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.
- Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo.

Teorema 12

Sejam $x > 0$ e y números reais. Então existe natural n tal que $nx > y$.

Prova: Seja $A = \{nx; n \in \mathbb{N}\}$. Se a afirmação não for válida, então A é limitado superiormente, e portanto tem supremo, denotado aqui por S. Como $x > 0$,

$$S - x < S \Rightarrow S - x \text{ não é cota superior de } A.$$

Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S - x < mx$ e, portanto, $S < (m+1)x$, contradição!

Propriedade de Arquimedes

Teorema 13

$\frac{1}{n} \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Proposição 14

Para quaisquer x, y, z, w *no corpo ordenado* $\mathbb{R}$, *valem*

(a) $$\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq w \end{array}\right\} \implies x + z \leq y + w.$$

(b) $$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array}\right\} \implies xz \leq yw.$$

Prova: Vamos provar o item (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array}\right\} \overset{(OM)}{\implies} \left.\begin{array}{l} xz \leq yz \\ yz \leq yw \end{array}\right\} \overset{(O3)}{\implies} xz \leq yw.$$

Outras propriedades:

Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Então valem as seguintes propriedades:

- $x < y \iff x + z < y + z$;
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$;
- $z > 0 \iff -z < 0$;
- Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;
- Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{array}\right\} \implies xz < yw$;
- $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
- (**tricotomia**) $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;

Proposição 15 (Lei do anulamento do produto)

Para $a, b \in \mathbb{R}$, *vale a seguinte equivalência:*

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Prova.

$(\Longleftarrow)$ Por hipótese, $a = 0$ ou $b = 0$. Suponha que $a = 0$.

Proposição 15 (Lei do anulamento do produto)

Para $a, b \in \mathbb{R}$, vale a seguinte equivalência:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Prova.

($\Longleftarrow$) Por hipótese, $a = 0$ ou $b = 0$. Suponha que $a = 0$. Então $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Analogamente para o caso $b = 0$.

($\Longrightarrow$) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos $a = 0$ ou $a \neq 0$.

Proposição 15 (Lei do anulamento do produto)

Para $a, b \in \mathbb{R}$, vale a seguinte equivalência:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Prova.

($\Longleftarrow$) Por hipótese, $a = 0$ ou $b = 0$. Suponha que $a = 0$. Então $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Analogamente para o caso $b = 0$.

($\Longrightarrow$) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos $a = 0$ ou $a \neq 0$.
Suponha $a \neq 0$. Então, existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$.

Proposição 15 (Lei do anulamento do produto)

Para $a, b \in \mathbb{R}$, vale a seguinte equivalência:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Prova.

($\Longleftarrow$) Por hipótese, $a = 0$ ou $b = 0$. Suponha que $a = 0$.

Então $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Analogamente para o caso $b = 0$.

($\Longrightarrow$) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos $a = 0$ ou $a \neq 0$.

Suponha $a \neq 0$. Então, existe $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}$.

Por hipótese, $a \cdot b = 0$.

Proposição 15 (Lei do anulamento do produto)

Para $a, b \in \mathbb{R}$, *vale a seguinte equivalência:*

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Prova.

($\Longleftarrow$) Por hipótese, $a = 0$ ou $b = 0$. Suponha que $a = 0$. Então $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Analogamente para o caso $b = 0$.

($\Longrightarrow$) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos $a = 0$ ou $a \neq 0$.
Suponha $a \neq 0$. Então, existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$.
Por hipótese, $a \cdot b = 0$. Multiplicando por $\frac{1}{a}$, obtemos

$$\frac{1}{a} \cdot a \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0 \implies 1 \cdot b = 0 \implies b = 0.$$

Para resolver uma equação ou inequação em x é necessário encontrar o conjunto dos números reais x que satisfazem a equação ou inequação.

Exemplo 16

Resolva a inequação $-3(4-x) \leq 12$.

Resolução: Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\frac{1}{3}$, obtemos

$$-4 + x \leq 4.$$

Daí, somando 4 em ambos os lados, temos $x \leq 8$. $\square$

Exemplo 17

Resolva a inequação $\pi x + 1729 < 4x + 1$.

Resolução: Vamos começar adicionando o oposto de $1729 + 4x$ aos dois lados da inequação. Assim, temos

$$\pi x + 1729 - 1729 - 4x < 4x + 1 - 1729 - 4x,$$

ou seja, $\pi x - 4x < 1 - 1729$, que também pode ser escrita como

$$(\pi - 4)x < -1728.$$

Agora, multiplicando a última inequação pelo inverso de $\pi - 4$, que é negativo, obtemos $x > -\dfrac{1728}{\pi - 4}$ ou seja $x > \dfrac{1728}{4 - \pi}$. $\square$

Exemplo 18

Qual é o sinal de $\dfrac{x+1}{1-x}$ *em função de* x*?*

Resolução: Temos:

- O numerador é positivo quando $x > -1$, negativo quando $x < -1$ e zero quando $x = -1$.
- O denominador é positivo quando $x < 1$, negativo quando $x > 1$ e zero quando $x = 1$.

Portanto a fração será positiva quando $-1 < x < 1$, negativa quando $x < -1$ ou $x > 1$ e zero quando $x = -1$. $\square$

Definição 19

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo** *ou valor absoluto de x é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Observação: Segue da definição acima que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0 \qquad \text{e} \qquad -|x| \leq x \leq |x|.$$

Exemplo 20

A equação $|x| = r$*, com* $r \geq 0$*, tem como soluções os elementos do conjunto* $\{r, -r\}$.

Exemplo 21

A equação $|ax - b| = r$*, com* $r \geq 0$ *e* $a \neq 0$*, tem como soluções os elementos do conjunto* $\left\{ \dfrac{b+r}{a}, \dfrac{b-r}{a} \right\}$.

Exemplo 22

Resolva a equação $|2x + 1| = 3$.

Resolução: Temos $2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 = -3$, o que nos leva à solução $x = 1$ ou $x = -2$. $\square$

Definição 23

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. A **distância** *de P a Q (ou de x a y) é dada por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a* **medida** *do segmento PQ.*

Observação: Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0.

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 será menor do que r, com $r > 0$, se e somente se, x estiver entre $-r$ e r.

Exemplo 24

Seja com $r > 0$. *Então*

$$\boxed{|x| < r \iff -r < x < r}$$

Resolução: Seja $|x| < r$. Analisando o sinal de x, temos

- $x \geq 0 \implies r > |x| = x$,
- $x < 0 \implies r > |x| = -x \implies -r < x$.

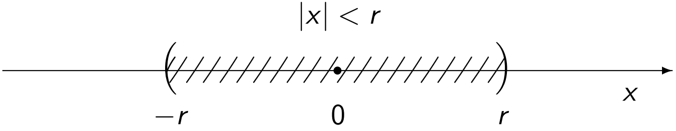
Portanto $-r < x < r$.

Agora, suponhamos que $-r < x < r$. Então

- $x \geq 0 \implies |x| = x < r$,
- $x < 0 \implies -x = |x| < r$.

Portanto $|x| < r$. $\square$

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



O intervalo $(-r, r)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}$ que distam de 0 menos que r (bola de raio r em torno de 0).

Exemplo 25

Resolva a inequação $|ax - b| < r$ *na variável* x*, com* $r > 0$ *e* $a \neq 0$.

Resolução: De forma similar ao exemplo anterior, temos

$$-r < ax - b < r.$$

Somando b aos termos da inequação, obtemos

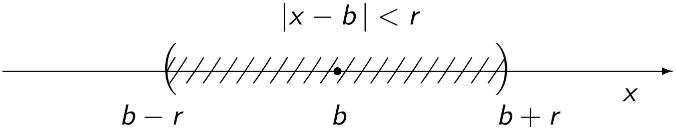
$$b - r < ax < b + r.$$

Logo,

- $a > 0 \implies \dfrac{b-r}{a} < x < \dfrac{b+r}{a}$;
- $a < 0 \implies \dfrac{b+r}{a} < x < \dfrac{b-r}{a}$.

$\square$

No caso particular em que $a = 1$, se a distância de x a b for menor do que r, isto é, se $|x - b| < r$, com $r > 0$, então x estará entre $b - r$ e $b + r$. Geometricamente, temos



Exemplo 26

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|xy| = |x|\,|y|\,.}$$

Exemplo 27

Para quaisquer $x \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{-|x| \leq x \leq |x|.}$$

Exemplo 28 (Desigualdade triangular)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|.}$$

Resolução: Somando

$$\begin{array}{rcccl} -|x| & \leq & x & \leq & |x| \\ -|y| & \leq & y & \leq & |y| \\ \hline -|x|-|y| & \leq & x+y & \leq & |x|+|y| \end{array}$$

$\square$

Exemplo 29 (Redução de distâncias)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{\,\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |\,x - y\,|\,.}$$

Resolução: Isto é equivalente a

$$-|\,x - y\,| \leq |x| - |y| \leq |\,x - y\,|$$

E observe que cada uma dessas desigualdades resultam diretamente da desigualdade triangular. $\square$

Exemplo 30

Descreva o valor de $|x+1|+|x-1|$ *sem utilizar o módulo.*

- Se $x \geq 1$, então $\begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$ e, portanto, $|x+1|+|x-1| = x+1+x-1 = 2x.$
- Se $-1 \leq x < 1$, então $\begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|x+1|+|x-1| = x+1-x+1 = 2.$
- Se $x < -1$, então $\begin{cases} |x+1| = -x-1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|x+1|+|x-1| = -x-1-x+1 = -2x.$

Logo $|x+1|+|x-1| = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ -2x, & x < -1. \end{cases}$ $\square$

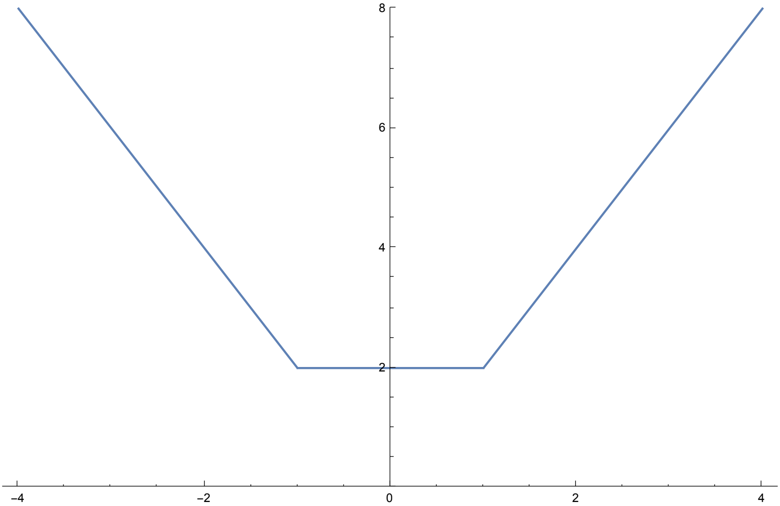


Figure: Gráfico de $|x+1|+|x-1|$

Definição 31

Um **intervalo** *em* $\mathbb{R}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que tem uma das seguintes formas:*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ **intervalo fechado**,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ **intervalo aberto**,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$,
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$,
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Exemplo 32

$$\{x \in \mathbb{R}\,;\, 2x - 3 < x + 1\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < 4\} = (-\infty, 4).$$