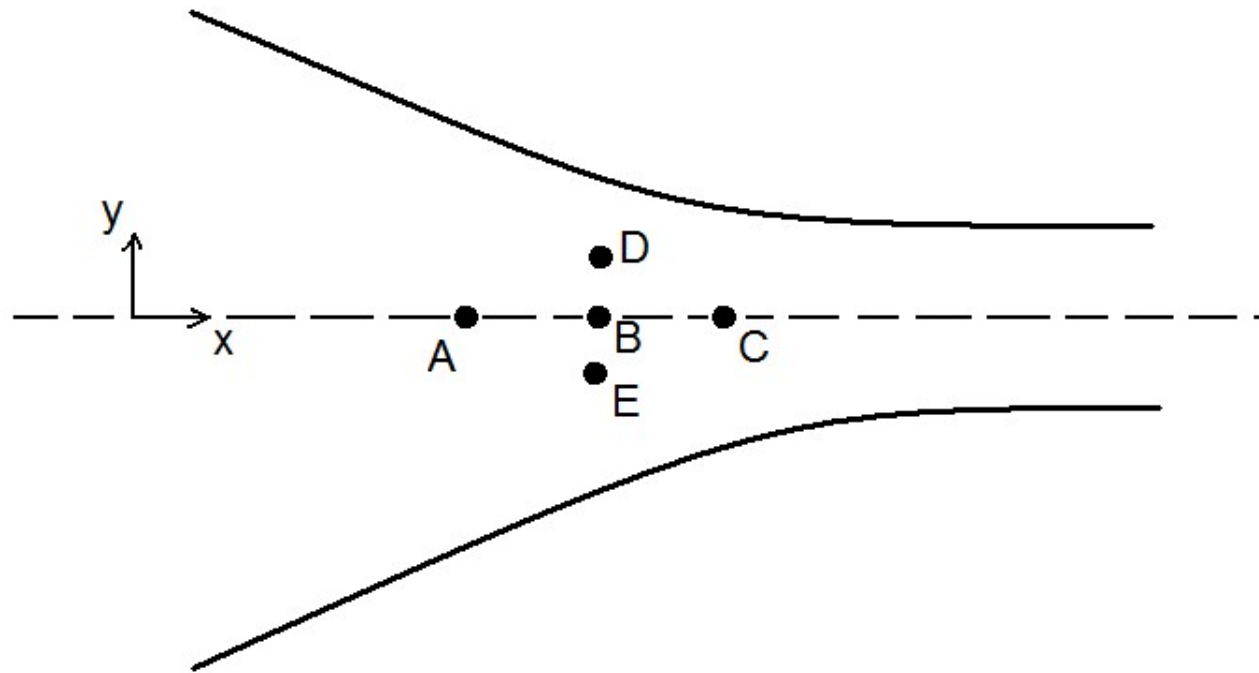


PME3330 – Mecânica dos Fluidos II

Exercícios - Cinemática

1) A medida da componente x do vetor de velocidade, nos pontos A, B e C, separados um dos outros por 5mm, fornece os valores 11,3 ; 12,6 ; e 13,5 m/s, no escoamento plano, incompressível, permanente e simétrico. Estime a componente y da velocidade no ponto D, 4 mm acima do ponto B, e a aceleração no ponto B.



Da continuidade para um escoamento incompressível:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Por simetria, $v_E = -v_D$. Logo:

$$\frac{u_C - u_A}{0,010} + \frac{v_D - v_E}{0,008} = 0 \Rightarrow \frac{u_C - u_A}{0,010} + \frac{2v_D}{0,008} = 0 \Rightarrow \frac{13,5 - 11,3}{0,010} + \frac{2v_D}{0,008} = 0$$

Solução: $v_D = -0,88 \text{ m/s}$

A aceleração $\vec{a}$ em B é dada por:

$$a_x = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_0 + u \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v}_0 \frac{\partial u}{\partial y} = 12,6 \frac{13,5 - 11,3}{0,010}$$

$$a_y = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_0 + u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_0 + \underbrace{v}_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Solução: $a_{xB} = 2772 \text{ m/s}^2$, $a_{yB} = 0$

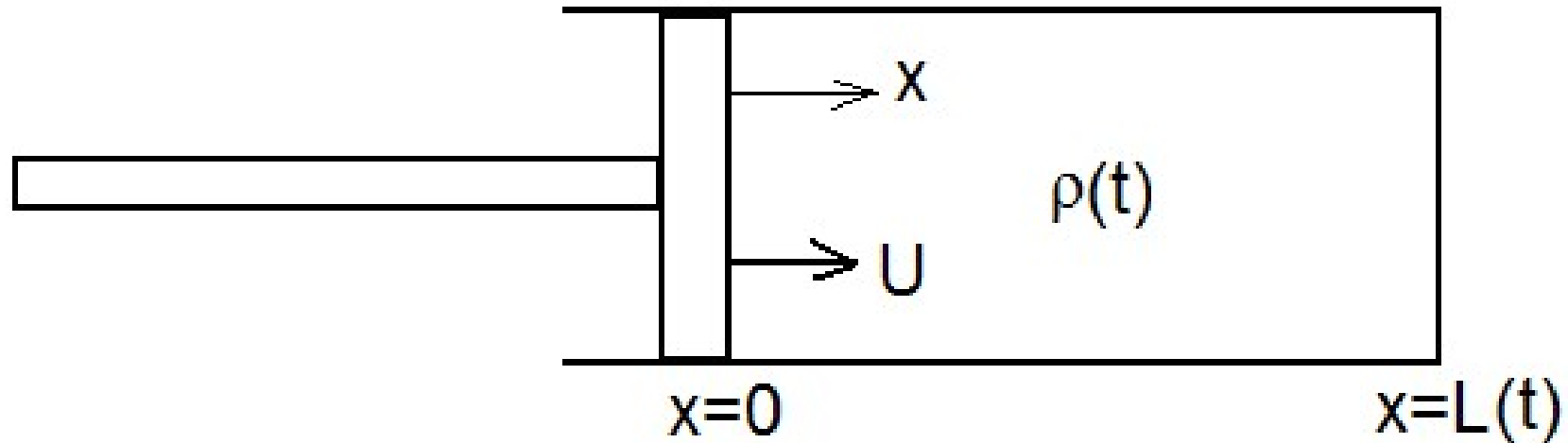
2) Extraído de M. C. Potter e D. C. Wiggert, “Mecânica dos Fluidos”: A densidade do ar na atmosfera varia de acordo com $\rho(z) = 1,23e^{-0,0001z}$ (kg/m³). O ar fluindo sobre a montanha tem um vetor da velocidade $\vec{u} = 20\vec{i} + 10\vec{k}$ (m/s) na localização de interesse, na qual $z = 3000$ m. Encontre a derivada substantiva de ρ para uma partícula nessa posição.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_0 + u \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x}}_0 + v \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial y}}_0 + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 10 \times 1,23e^{-0,0001 \times 3000} \times (-0,0001)$$

Solução: $D\rho/Dt = -9,11 \times 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$

3) Extraído de F. M. White, “Mecânica dos Fluidos”: Um pistão comprime gás em um cilindro. O pistão se move com velocidade constante U . Sejam ρ_0 e L_0 a massa específica e o comprimento no instante $t_0=0$. Considere que a velocidade do gás varia linearmente desde $u=U$ na face do pistão até $u=0$ em $x=L$. Se ρ varia apenas com t , encontre $\rho(t)$.



Se a velocidade do gás varia linearmente, $u = C_1 x + C_0$ com $u = U$ para $x = 0$ e $u = 0$ para $x = L$. Assim:

$$u = U \left(1 - \frac{x}{L} \right).$$

Por outro lado, o próprio comprimento L é dado por $L = L_0 - U t$. Assim:

$$u = U \left(1 - \frac{x}{L_0 - U t} \right)$$

Da equação da continuidade $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$, temos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0.$$

Porém, como $\rho = \rho(t)$ (não varia com x), temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{U}{L_0 - Ut} = 0$$

Logo:

$$\frac{1}{\rho} d\rho = \frac{U}{L_0 - Ut} dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} d\rho = \int_0^t \frac{U}{L_0 - Ut} dt$$

Integrando:

$$[\ln \rho]_{\rho_0}^{\rho} = [-\ln(L_0 - Ut)]_0^t$$

Que resulta:

$$\ln \rho - \ln \rho_0 = -\ln(L_0 - Ut) + \ln L_0 \quad \Rightarrow \quad \text{Solução: } \boxed{\rho = \frac{\rho_0 L_0}{L_0 - Ut}}$$

4) Extraído de F. M. White, “Mecânica dos Fluidos”: Se o escoamento for bidimensional e incompressível, a camada limite laminar numa placa plana pode ser aproximada por: $u = U \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$ onde $\delta = C \sqrt{x}$.

Encontre a expressão de v .

A equação de continuidade fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Pela expressão de u , obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \left(-\frac{y}{C} x^{-3/2} + \frac{y^2}{C^2} x^{-2} \right)$$

Logo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \left(-\frac{y}{C} x^{-3/2} + \frac{y^2}{C^2} x^{-2} \right) = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Integrando em y :

$$v = U \left(\frac{y^2}{2C} x^{-3/2} - \frac{x^{-2}}{C^2} \frac{y^3}{3} \right) + f(x)$$

Como $v=0$ para $y=0$, resulta $f(x)=0$:

$$\text{Solução: } v = U \left(\frac{y^2}{2C} x^{-3/2} - \frac{x^{-2}}{C^2} \frac{y^3}{3} \right)$$