Por que estudar Cálculo?

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023**

Este material foi editado a partir de notas preparadas pelos professores Alexandre Nolasco, Marcia Federson, Gabriela Planas

Nos exemplos a seguir veremos que a Matemática desenvolvida até o final do ensino médio NÃO é suficiente para resolver alguns problemas importantes com os quais nos deparamos.

Nos exemplos a seguir veremos que a Matemática desenvolvida até o final do ensino médio NÃO é suficiente para resolver alguns problemas importantes com os quais nos deparamos.

Começamos recordando um problema elementar de Física do Ensino Médio.

Exemplo (Lançamento Oblíquo de um Projétil)

Imagine que, em uma batalha, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos canhões tenham velocidade V_0 *ao sair do canhão e que o inimigo situa-se a uma distância* d *de nossos canhões.*

Exemplo (Lançamento Oblíquo de um Projétil)

Imagine que, em uma batalha, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos canhões tenham velocidade V_0 ao sair do canhão e que o inimigo situa-se a uma distância d de nossos canhões.

- *Qual é ângulo de disparo para que o alvo seja atingido?*

Exemplo (Lançamento Oblíquo de um Projétil)

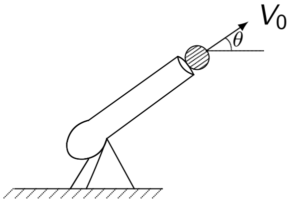
Imagine que, em uma batalha, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos canhões tenham velocidade V_0 ao sair do canhão e que o inimigo situa-se a uma distância d de nossos canhões.

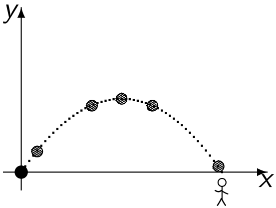
- *Qual é ângulo de disparo para que o alvo seja atingido?*
- *Qual é o alcance máximo de nossos canhões?*

Exemplo (Lançamento Oblíquo de um Projétil)

Imagine que, em uma batalha, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos canhões tenham velocidade V_0 ao sair do canhão e que o inimigo situa-se a uma distância d de nossos canhões.

- *Qual é ângulo de disparo para que o alvo seja atingido?*
- *Qual é o alcance máximo de nossos canhões?*
- *Qual é a altura máxima que o projétil alcançará?*


V_0
θ


y
x

Solução: Para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Faremos algumas suposições.

Solução: Para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Faremos algumas suposições.

Suponhamos que

- a resistência do ar seja desprezível,

Solução: Para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Faremos algumas suposições.

Suponhamos que

- a resistência do ar seja desprezível,
- a aceleração da gravidade seja constante,

Solução: Para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Faremos algumas suposições.

Suponhamos que

- a resistência do ar seja desprezível,
- a aceleração da gravidade seja constante,
- o ângulo de lançamento seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

Solução: Para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Faremos algumas suposições.

Suponhamos que

- a resistência do ar seja desprezível,
- a aceleração da gravidade seja constante,
- o ângulo de lançamento seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- a altura do canhão relativamente ao solo seja desprezível,

Solução: Para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Faremos algumas suposições.

Suponhamos que

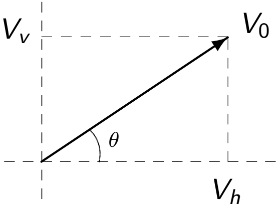
- a resistência do ar seja desprezível,
- a aceleração da gravidade seja constante,
- o ângulo de lançamento seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- a altura do canhão relativamente ao solo seja desprezível,
- a altitude seja constante no campo de batalha.

Sejam m a massa do projétil e V_0 a sua velocidade inicial.

A velocidade inicial V_0 do projétil pode ser decomposta em velocidade vertical e velocidade horizontal iniciais como segue:

Sejam m a massa do projétil e V_0 a sua velocidade inicial.

A velocidade inicial V_0 do projétil pode ser decomposta em velocidade vertical e velocidade horizontal iniciais como segue:



$$V_v^0 = V_0 \operatorname{sen}(\theta), \qquad V_h^0 = V_0 \cos(\theta).$$

Seja g a aceleração da gravidade.

Seja g a aceleração da gravidade.

Então a velocidade vertical dependerá do tempo através da relação

$$\boxed{V_v(t) = V_0 \operatorname{sen}(\theta) - gt}$$

e a velocidade horizontal será constante ao longo do tempo.

Seja g a aceleração da gravidade.

Então a velocidade vertical dependerá do tempo através da relação

$$\boxed{V_v(t) = V_0 \operatorname{sen}(\theta) - gt}$$

e a velocidade horizontal será constante ao longo do tempo.

O projétil atingirá a altura máxima no instante t_M tal que

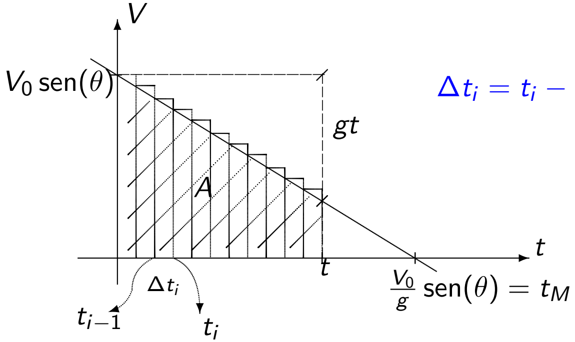
$V_v(t_M) = 0$, ou seja, quando tivermos

$$\boxed{t_M = \frac{V_0}{g} \operatorname{sen}(\theta).}$$

Como obter a altura do projétil como função do tempo?

Como obter a altura do projétil como função do tempo?

O gráfico da velocidade vertical como função do tempo é dado por



$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

em que $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ é uma divisão do intervalo $[0, t]$.

Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$.

Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$. Logo, o deslocamento vertical é aproximadamente igual a

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) \approx V_v(t_{i-1}) \Delta t_i.$$

Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$. Logo, o deslocamento vertical é aproximadamente igual a

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) \approx V_v(t_{i-1})\Delta t_i.$$

Assim, o deslocamento vertical correspondente ao intervalo de tempo $[0, t]$ será aproximadamente igual a

$$y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \approx \sum_{i=1}^{n} V_v(t_{i-1})\Delta t_i \approx A$$

Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$. Logo, o deslocamento vertical é aproximadamente igual a

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) \approx V_v(t_{i-1})\Delta t_i.$$

Assim, o deslocamento vertical correspondente ao intervalo de tempo $[0, t]$ será aproximadamente igual a

$$y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \approx \sum_{i=1}^{n} V_v(t_{i-1})\Delta t_i \approx A$$

ou seja, quando o comprimento dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ se aproximar de zero, y se aproximará da área A sob o gráfico da velocidade no intervalo $[0, t]$.

Como (área de um trapézio)

$$A = V_0 \operatorname{sen}(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2,$$

Como (área de um trapézio)

$$A = V_0 \operatorname{sen}(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2,$$

o deslocamento vertical do projétil ($=$ altura do projétil depois de decorridos t unidades de tempo ... MUV) é dado por

$$\boxed{y(t) = V_0 \operatorname{sen}(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2}$$

Como (área de um trapézio)

$$A = V_0 \operatorname{sen}(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2,$$

o deslocamento vertical do projétil (= altura do projétil depois de decorridos t unidades de tempo ... MUV) é dado por

$$\boxed{y(t) = V_0 \operatorname{sen}(\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2}$$

Por outro lado, o deslocamento horizontal ocorre com velocidade constante $V_h = V_0 \cos(\theta)$. Logo

$$\boxed{x(t) = V_0 \cos(\theta)\, t}$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical, estamos preparados para resolver o problema proposto.

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical, estamos preparados para resolver o problema proposto.

- O projétil alcança altura máxima em

$$t = t_M = \frac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical, estamos preparados para resolver o problema proposto.

- O projétil alcança altura máxima em

$$t = t_M = \frac{V_0}{g}\,\text{sen}(\theta).$$

Logo

$$y_M = y(t_M) \quad = \quad V_0\,\text{sen}(\theta)\,t_M - \frac{1}{2}g\,(t_M)^2$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical, estamos preparados para resolver o problema proposto.

- O projétil alcança altura máxima em

$$t = t_M = \frac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Logo

$$\begin{aligned} y_M = y(t_M) &= V_0\,\mathrm{sen}(\theta)\,t_M - \frac{1}{2}g\,(t_M)^2 \\ &= V_0\,\mathrm{sen}(\theta)\,\frac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta) - \frac{1}{2}\,g\,\frac{V_0^2}{g^2}\,\mathrm{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical, estamos preparados para resolver o problema proposto.

- O projétil alcança altura máxima em

$$t = t_M = \frac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Logo

$$\begin{aligned} y_M = y(t_M) &= V_0\,\mathrm{sen}(\theta)\,t_M - \frac{1}{2}g\,(t_M)^2 \\ &= V_0\,\mathrm{sen}(\theta)\,\frac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta) - \frac{1}{2}\,g\,\frac{V_0^2}{g^2}\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ &= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical, estamos preparados para resolver o problema proposto.

- O projétil alcança altura máxima em

$$t = t_M = \frac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Logo

$$\begin{aligned} y_M = y(t_M) &= V_0\,\mathrm{sen}(\theta)\,t_M - \frac{1}{2}g\,(t_M)^2 \\ &= V_0\,\mathrm{sen}(\theta)\,\frac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta) - \frac{1}{2}\,g\,\frac{V_0^2}{g^2}\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ &= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{y_M = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}^2(\theta).}$$

- O projétil atinge o seu alvo em $t = t_a$ tal que $y(t_a) = 0$.

- O projétil atinge o seu alvo em $t = t_a$ tal que $y(t_a) = 0$. Logo

$$t_a = 2\frac{V_0}{g}\text{sen}(\theta),$$

- O projétil atinge o seu alvo em $t = t_a$ tal que $y(t_a) = 0$. Logo

$$t_a = 2\frac{V_0}{g}\text{sen}(\theta),$$

o que implica que

$$x_a = x(t_a) = 2\frac{V_0^2}{g}\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

- O projétil atinge o seu alvo em $t = t_a$ tal que $y(t_a) = 0$. Logo

$$t_a = 2\frac{V_0}{g}\text{sen}(\theta),$$

o que implica que

$$x_a = x(t_a) = 2\frac{V_0^2}{g}\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

ou seja,

$$\boxed{x_a = \frac{V_0^2}{g}\text{sen}(2\theta).}$$

- O projétil atinge o seu alvo em $t = t_a$ tal que $y(t_a) = 0$. Logo

$$t_a = 2\frac{V_0}{g}\text{sen}(\theta),$$

o que implica que

$$x_a = x(t_a) = 2\frac{V_0^2}{g}\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

ou seja,

$$\boxed{x_a = \frac{V_0^2}{g}\text{sen}(2\theta).}$$

- O alcance do projétil é máximo quando $\theta = \pi/4$ (pois $\text{sen}(\pi/2) = 1$).

O que você observa sobre a Matemática deste exemplo?

O que você observa sobre a Matemática deste exemplo?

1. O procedimento para a obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente, mas requer uma melhor justificativa.

O que você observa sobre a Matemática deste exemplo?

1. O procedimento para a obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente, mas requer uma melhor justificativa.
2. O processo de fazer Δt_i pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.

O que você observa sobre a Matemática deste exemplo?

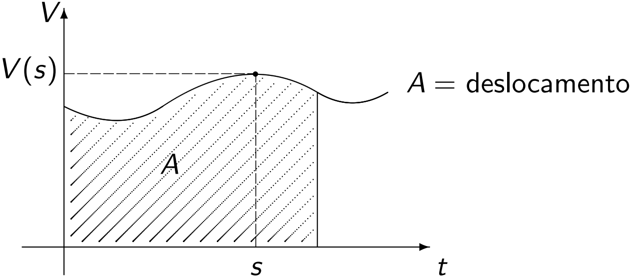
1. O procedimento para a obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente, mas requer uma melhor justificativa.
2. O processo de fazer Δt_i pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.
3. Se a velocidade depender do tempo de uma forma mais complicada, podemos não ser capazes de encontrar a área sob o gráfico A de forma tão simples.

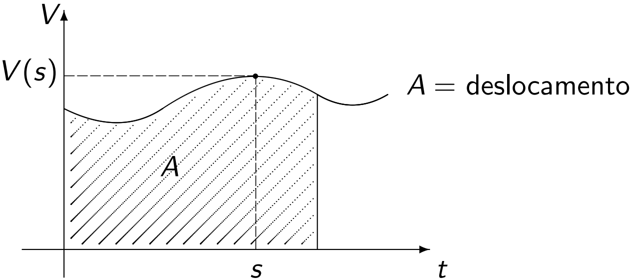
O que você observa sobre a Matemática deste exemplo?

1. O procedimento para a obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente, mas requer uma melhor justificativa.
2. O processo de fazer Δt_i pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.
3. Se a velocidade depender do tempo de uma forma mais complicada, podemos não ser capazes de encontrar a área sob o gráfico A de forma tão simples. Por exemplo, o projétil pode ser impulsionado durante o percurso (como ocorre no lançamento de foguetes).

O que você observa sobre a Matemática deste exemplo?

1. O procedimento para a obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente, mas requer uma melhor justificativa.
2. O processo de fazer Δt_i pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.
3. Se a velocidade depender do tempo de uma forma mais complicada, podemos não ser capazes de encontrar a área sob o gráfico A de forma tão simples. Por exemplo, o projétil pode ser impulsionado durante o percurso (como ocorre no lançamento de foguetes).
4. Deparamo-nos, então, com o problema de calcular a área sob o gráfico de uma função.


V
$V(s)$
A
s
t
$A =$ deslocamento



Precisamos, então, do conceito de **integral**.

5. Quando a massa do projétil depende do tempo, precisamos "ver" a 2ª lei de Newton como dependente do tempo também, a fim de equacionarmos o movimento e a velocidade instantânea, de modo que esta seja obtida como função do deslocamento.

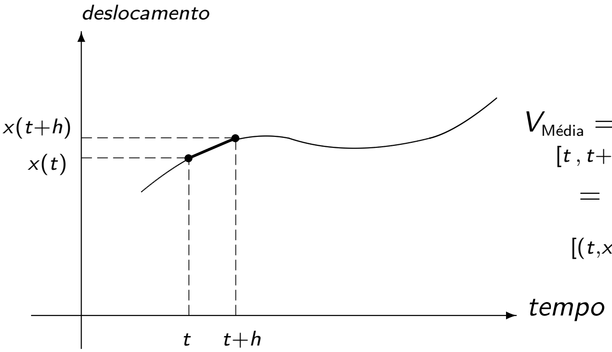
5. Quando a massa do projétil depende do tempo, precisamos "ver" a 2ª lei de Newton como dependente do tempo também, a fim de equacionarmos o movimento e a velocidade instantânea, de modo que esta seja obtida como função do deslocamento.
6. Para isso, precisamos da noção do conceito de derivada.

Exemplo

Conhecido o deslocamento como função do tempo determinar a velocidade instantânea para cada instante de tempo.

Exemplo

Conhecido o deslocamento como função do tempo determinar a velocidade instantânea para cada instante de tempo.



$$\underset{[t\,,\,t+h]}{V_{\text{Média}}} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

$$= \text{ inclinação do segmento}$$

$$[(t,x(t)),(t+h\,,x(t+h))]$$

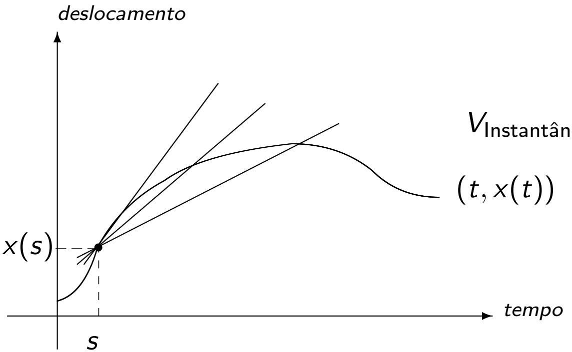
A velocidade média V_m no intervalo $[t, t+h]$ é dada por

$$\boxed{V_m = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}}$$

A velocidade média V_m no intervalo $[t, t+h]$ é dada por

$$\boxed{V_m = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}}$$

e é a inclinação do segmento $[(t, x(t)), (t+h, x(t+h))]$



$V_{\text{Instantânea}} =$ inclinação da reta tangente ao gráfico de $x(\cdot)$ em $t = s$

A velocidade instantânea V_i no instante t é dada por

$$\boxed{V_i = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}}$$

e é a inclinação da reta tangente ao gráfico de x no instante t.

A velocidade instantânea V_i no instante t é dada por

$$\boxed{V_i = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}}$$

e é a inclinação da reta tangente ao gráfico de x no instante t.

- Aqui precisamos da noção de limite para definir a velocidade instantânea.

A velocidade instantânea V_i no instante t é dada por

$$\boxed{V_i = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}}$$

e é a inclinação da reta tangente ao gráfico de x no instante t.

- Aqui precisamos da noção de limite para definir a velocidade instantânea.
- O limite que define a velocidade instantânea é chamado derivada de x no instante t.

Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme.

Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme.

Se um corpo se mover ao longo de uma reta, deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t,$$

Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme.

Se um corpo se mover ao longo de uma reta, deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t,$$

então a velocidade média, em cada intervalo $[t, t+h]$, será obtida fazendo-se

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0.$$

Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme.

Se um corpo se mover ao longo de uma reta, deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t,$$

então a velocidade média, em cada intervalo $[t, t + h]$, será obtida fazendo-se

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0.$$

Assim, a velocidade instantânea em cada instante será v_0.

Movimento Uniformemente Variado

Movimento Uniformemente Variado

Se um corpo se mover ao longo de uma reta, deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

Movimento Uniformemente Variado

Se um corpo se mover ao longo de uma reta, deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

então a velocidade média, em cada intervalo de tempo $[t, t+h]$, é

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0 + at + \frac{a}{2} h.$$

Movimento Uniformemente Variado

Se um corpo se mover ao longo de uma reta, deslocando-se segundo a equação

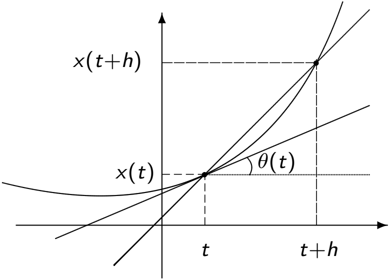
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

então a velocidade média, em cada intervalo de tempo $[t, t + h]$, é

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v_0 + at + \frac{a}{2} h.$$

Logo, da expressão acima fazendo $h > 0$ cada vez menor, a velocidade $v(t)$ no instante t é

$$v(t) = v_0 + at.$$



$$\mathrm{tg}(\theta(t)) = v(t)$$

A aceleração média no intervalo $[t, t+h]$ é obtida da velocidade da seguinte forma

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = a.$$

A aceleração média no intervalo $[t, t+h]$ é obtida da velocidade da seguinte forma

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = a.$$

Então, fazendo $h > 0$ cada vez menor, a aceleração em cada instante t é a.

A aceleração média no intervalo $[t, t+h]$ é obtida da velocidade da seguinte forma

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = a.$$

Então, fazendo $h > 0$ cada vez menor, a aceleração em cada instante t é a.

- Quando o movimento tem expressões mais complicadas como determinar a velocidade e a aceleração?

A aceleração média no intervalo $[t, t+h]$ é obtida da velocidade da seguinte forma

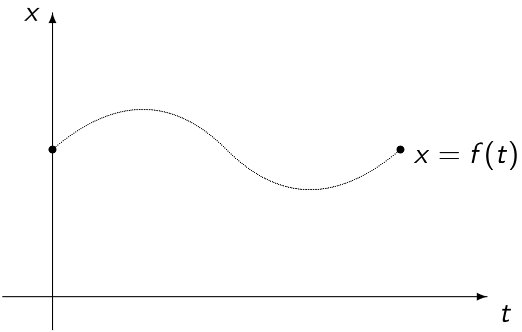
$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = a.$$

Então, fazendo $h > 0$ cada vez menor, a aceleração em cada instante t é a.

- Quando o movimento tem expressões mais complicadas como determinar a velocidade e a aceleração?
- Novamente vamos precisar das noções de limite e derivada.

Exemplo

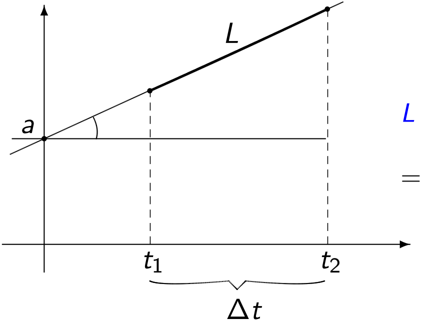
Cálculo do comprimento de uma curva dada como gráfico de uma função.



Vamos considerar alguns casos particulares.

Vamos considerar alguns casos particulares.

O gráfico da f é um segmento de reta $(y = a + bt)$.

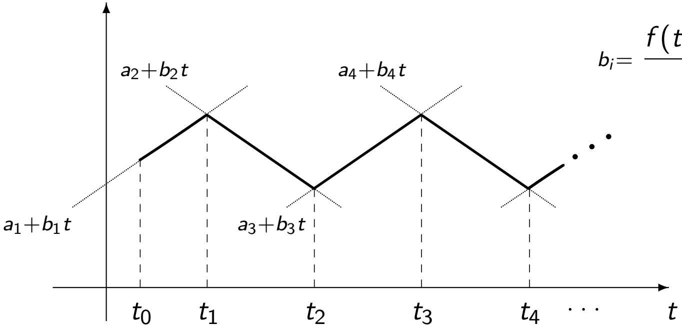


$$\{\,(t, f(t)) : t_1 \leq t \leq t_2\,\}$$

$$L = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + b^2(t_2 - t_1)^2}$$

$$= \sqrt{1 + b^2}(t_2 - t_1) = \sqrt{1 + b^2}\,\Delta t$$

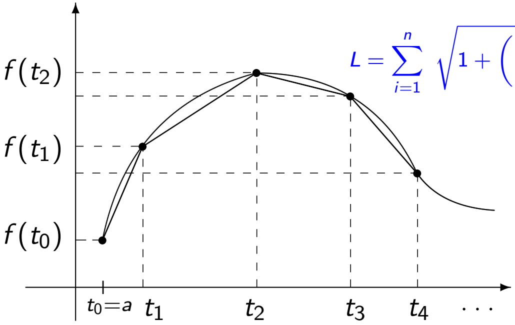
O gráfico da f é uma poligonal.



$$b_i = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + b_i^2}\,(t_i - t_{i-1}).$$

No caso geral, temos:



$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{(f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)^2} (t_i - t_{i-1})$$

fornece uma aproximação para

o comprimento da curva se

$(t_i - t_{i-1})$ é pequeno $1 \leq i \leq n$.

Para se obter o valor exato de L, vamos precisar introduzir as noções de limite, derivada e integral:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt.}$$

Exemplo

A área de uma circunferência.

Exemplo

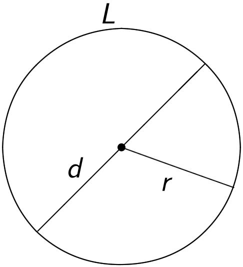
A área de uma circunferência.

O quociente entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro é um número real denotado por π.

Exemplo

A área de uma circunferência.

O quociente entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro é um número real denotado por π.



$$L = \pi\, d = 2\pi\, r$$

Vamos determinar a área da circunferência de raio r.

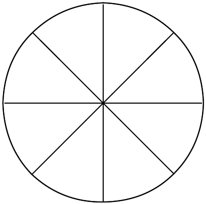
Vamos determinar a área da circunferência de raio r.

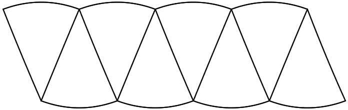
A idéia de Archimedes (287-212 a.c.) foi dividir a circunferência em setores de área igual e reagrupá-los da seguinte forma:

Vamos determinar a área da circunferência de raio r.

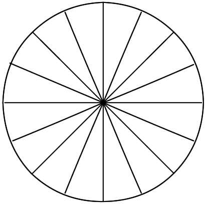
A idéia de Archimedes (287-212 a.c.) foi dividir a circunferência em setores de área igual e reagrupá-los da seguinte forma:

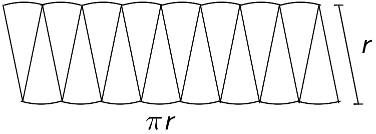
8 Setores





16 Setores





- Quanto maior o número de setores na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.

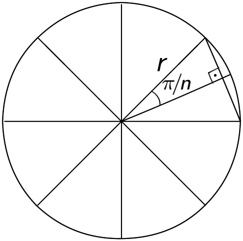
- Quanto maior o número de setores na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.

- A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite.

- Quanto maior o número de setores na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.
- A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite.
- Uma segunda forma de se argumentar.

- Quanto maior o número de setores na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.
- A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite.
- Uma segunda forma de se argumentar.
- Se dividimos a circunferência em n setores iguais, teremos:

- Quanto maior o número de setores na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.
- A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite.
- Uma segunda forma de se argumentar.
- Se dividimos a circunferência em n setores iguais, teremos:



Note que

$$A \quad \sim \quad 2n \,.\, \frac{1}{2} \,.\, r \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \,.\, r \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Note que

$$A \sim 2n \, . \, \frac{1}{2} \, . \, r \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \, . \, r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2 \, . \, \frac{\mathrm{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \, . \, \cos(\pi/n).$$

Note que

$$A \sim 2n \,.\, \frac{1}{2} \,.\, r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \,.\, r \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2 \,.\, \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \,.\, \cos(\pi/n).$$

Para n suficientemente grande, $\cos(\pi/n) \sim 1$ e $\boxed{\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \sim 1}$

(primeiro limite fundamental).

Note que

$$A \sim 2n \, . \, \frac{1}{2} \, . \, r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \, . \, r \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2 \, . \, \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \, . \, \cos(\pi/n).$$

Para n suficientemente grande, $\cos(\pi/n) \sim 1$ e $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \sim 1$ (primeiro limite fundamental). Logo,

$$\boxed{A = \pi r^2.}$$

Note que

$$A \sim 2n \,.\, \frac{1}{2} \,.\, r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \,.\, r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2 \,.\, \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \,.\, \cos(\pi/n).$$

Para n suficientemente grande, $\cos(\pi/n) \sim 1$ e $\boxed{\frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \sim 1}$ (primeiro limite fundamental). Logo,

$$\boxed{A = \pi r^2.}$$

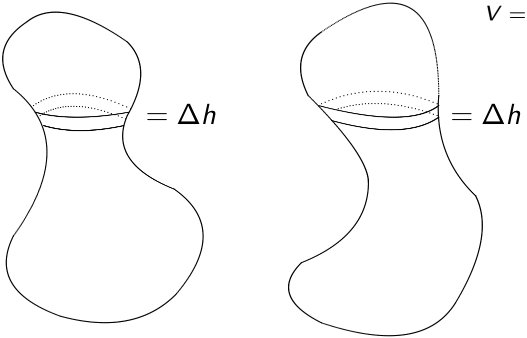
Portanto, precisamos entender o processo de passagem ao limite para encontrarmos soluções para problemas simples como o cálculo da área de um círculo.

Exemplo

O volume da esfera e o Princípio de Cavalieri.

Exemplo

O volume da esfera e o Princípio de Cavalieri.



$V = \sum$ volumes das seções cilíndricas

Se seções tiverem mesma área,

os volumes deverão coincidir.

Aqui, precisamos do processo de passagem ao limite para mostrar que o volume do sólido pode ser aproximado pela soma dos volumes das seções.

Aqui, precisamos do processo de passagem ao limite para mostrar que o volume do sólido pode ser aproximado pela soma dos volumes das seções.

Este resultado é axiomatizado no seguite princípio.

Aqui, precisamos do processo de passagem ao limite para mostrar que o volume do sólido pode ser aproximado pela soma dos volumes das seções.

Este resultado é axiomatizado no seguite princípio.

Teorema (Princípio de Cavalieri)

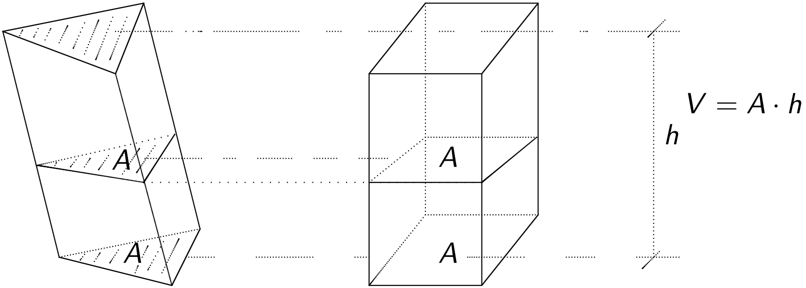
São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então estes sólidos tem o mesmo volume.

Aplicações:

Volume de um prisma triangular.

Aplicações:

Volume de um prisma triangular.



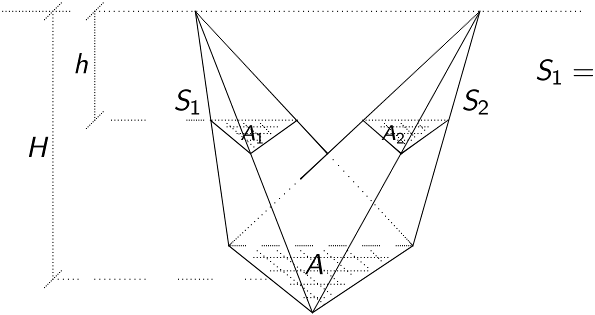
Volume de uma pirâmide triangular.

Volume de uma pirâmide triangular.

Observe, primeiramente, que pelo *Princípio de Cavalieri*, podemos mover livremente o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo ao plano da base sem alterar o seu volume.

Volume de uma pirâmide triangular.

Observe, primeiramente, que pelo *Princípio de Cavalieri*, podemos mover livremente o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo ao plano da base sem alterar o seu volume.



$S_1 = S_2$

Como o volume de um prisma com área da base A e altura h é

$$V_{\text{Prisma}} = A.h,$$

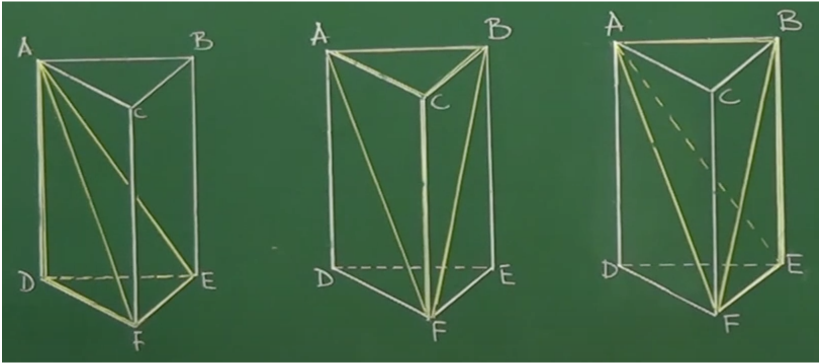
Como o volume de um prisma com área da base A e altura h é

$$V_{\text{Prisma}} = A.h,$$

aplicando o resultado acima à figura abaixo, obtemos

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A \cdot h$$

pois o prisma pode ser dividido em três pirâmides de mesmo volume



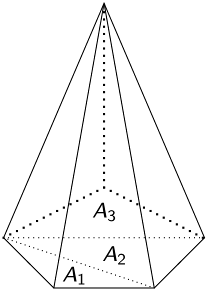
Volume de uma pirâmide qualquer.

Volume de uma pirâmide qualquer.

O volume de uma pirâmide qualquer é obtido observando que uma pirâmide qualquer é a união de pirâmides triangulares. Assim, temos:

Volume de uma pirâmide qualquer.

O volume de uma pirâmide qualquer é obtido observando que uma pirâmide qualquer é a união de pirâmides triangulares. Assim, temos:



$$V = \frac{1}{3}\, A_1\, h + \frac{1}{3}\, A_2\, h + \frac{1}{3}\, A_3\, h = \frac{1}{3}\, A\, h$$

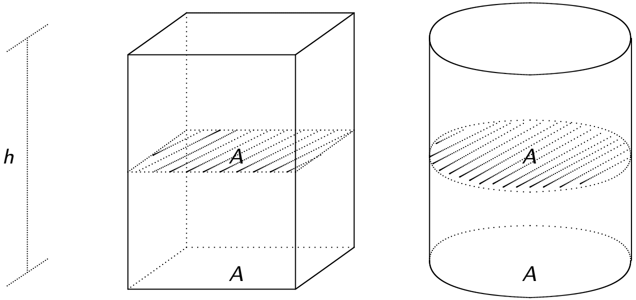
Volume de um cone e de um cilindro.

Volume de um cone e de um cilindro.

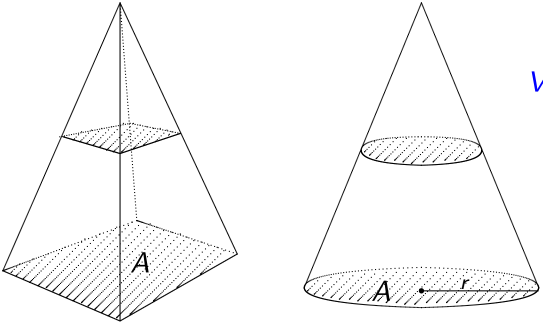
Para encontrar o volume de um cilindro e o volume de um cone, basta observarmos as figuras abaixo.

Volume de um cone e de um cilindro.

Para encontrar o volume de um cilindro e o volume de um cone, basta observarmos as figuras abaixo.



$$V = A \cdot h$$



$$V_c = \frac{1}{3}\, A \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\, \pi\, r^2 \cdot h$$

Volume da Esfera.

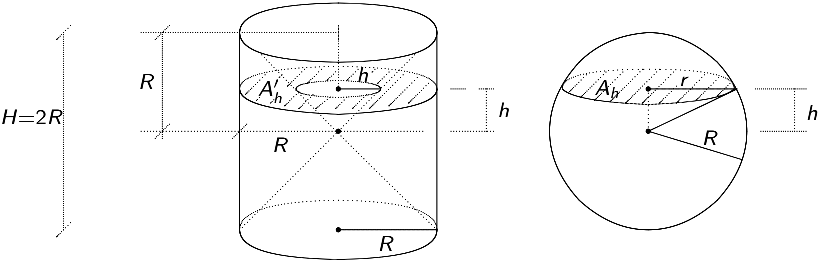
Volume da Esfera.

Para calcular o volume da esfera de raio R, vamos construir um cilindro reto de raio da base R e altura $2R$ e retiramos deles os dois cones centrais formados pela união do centro do cilindro à borda da base e do topo do cilindro (figura a seguir).

Volume da Esfera.

Para calcular o volume da esfera de raio R, vamos construir um cilindro reto de raio da base R e altura $2R$ e retiramos deles os dois cones centrais formados pela união do centro do cilindro à borda da base e do topo do cilindro (figura a seguir).

Se apoiarmos a esfera no plano da base do cilindro e secionarmos ambos os sólidos por um plano paralelo ao plano da base do cilindro (conforme figura), obteremos um anel (ao secionar o cilindro sem o cone central) de área A'_h e uma circunferência de área A_h.


$H=2R$
R
h
A'_h
h
R
R
A_h
r
h
R

Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h.$$

Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h.$$

Segue do *Princípio de Cavalieri* que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais.

Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h.$$

Segue do *Princípio de Cavalieri* que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais. Assim, obtemos

$$V_E = \pi R^2 \cdot H - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{H}{2}$$

Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h.$$

Segue do *Princípio de Cavalieri* que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais. Assim, obtemos

$$V_E = \pi R^2 \cdot H - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{H}{2} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h.$$

Segue do *Princípio de Cavalieri* que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais. Assim, obtemos

$$V_E = \pi R^2 \cdot H - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{H}{2} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h.$$

Segue do *Princípio de Cavalieri* que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais. Assim, obtemos

$$V_E = \pi R^2 \cdot H - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{H}{2} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

e, portanto,

$$\boxed{V_E = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Exemplo

Quanta borracha é necessária para fazer uma câmara de ar com raio menor $10cm$*, raio maior* $50cm$ *e espessura* $0,1cm$*.*

Exemplo

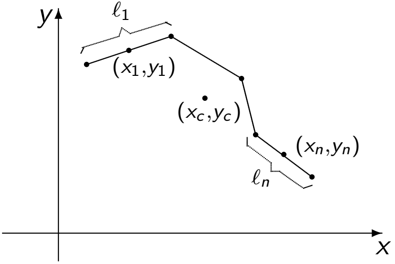
Quanta borracha é necessária para fazer uma câmara de ar com raio menor $10cm$*, raio maior* $50cm$ *e espessura* $0,1cm$*.*

- Para resolver este problema introduzimos a noção de centro de massa de uma poligonal plana (c denota a densidade linear).

Exemplo

Quanta borracha é necessária para fazer uma câmara de ar com raio menor $10cm$, *raio maior* $50cm$ *e espessura* $0,1cm$.

- Para resolver este problema introduzimos a noção de centro de massa de uma poligonal plana (c denota a densidade linear).
- Inicialmente definimos o ponto médio de um segmento como o seu centro de massa. Assim o centro de massa de uma poligonal é dado por:



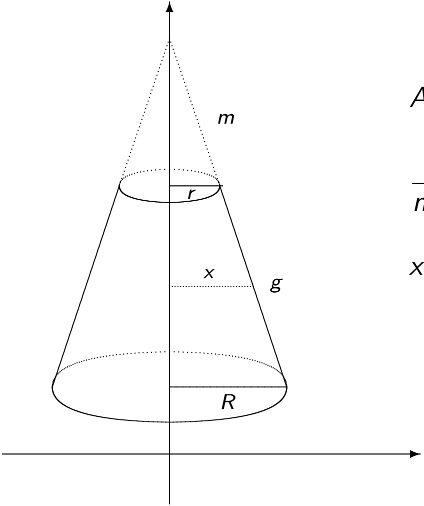
$$x_c = \frac{c \cdot \ell_1 \cdot x_1 + \cdots + c \cdot \ell_n \cdot x_n}{c \cdot \ell_1 + \cdots + c \cdot \ell_n}$$

$$= \frac{\ell_1 \cdot x_1 + \cdots + \ell_n \cdot x_n}{\ell_1 + \cdots + \ell_n}$$

$$y_c = \frac{c \cdot \ell_1 \cdot y_1 + \cdots + c \cdot \ell_n \cdot y_n}{c \cdot \ell_1 + \cdots + c \cdot \ell_n}$$

$$= \frac{\ell_1 \cdot y_1 + \cdots + \ell_n \cdot y_n}{\ell_1 + \cdots + \ell_n}$$

A área lateral de um tronco de cone é obtida da seguinte forma:



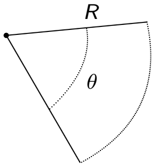
$$A_T = ?$$

$$\frac{R}{m+g} = \frac{r}{m} = \frac{R-r}{g}$$

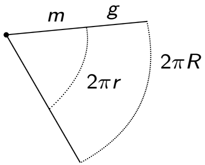
$$x = \frac{R+r}{2}$$

Vamos usar:

- Comprimento do arco de um setor circular de raio R e ângulo θ é θR
- Área de um setor circular de raio R e ângulo θ é $\frac{\theta}{2} R^2$



Note que neste caso $\theta = \frac{2\pi R}{(m+g)} = \frac{2\pi r}{m}$.



$$A_E = \frac{2\pi R}{(m+g)} \frac{1}{2}(m+g)^2 = \pi R(m+g)$$

$$A_I = \frac{2\pi r}{m} \frac{1}{2} m^2 = \pi r m$$

Assim a área lateral A_T do tronco de cone é dada por

$$\begin{aligned} A_T &= \pi R(m+g) - \pi r m \\ &= \pi R g + \pi(R-r)m \\ &= \pi(R+r)g \\ &= 2\pi \frac{R+r}{2} g \end{aligned}$$

Assim a área lateral A_T do tronco de cone é dada por

$$
\begin{aligned}
A_T &= \pi R(m+g) - \pi rm \\
&= \pi Rg + \pi(R-r)m \\
&= \pi(R+r)g \\
&= 2\pi\tfrac{R+r}{2}g
\end{aligned}
$$

e desta forma

$$\boxed{A_T = 2\pi xg}$$

em que x é a coordenada do centro de gravidade do segmento ou a distância do centro de gravidade do segmento ao eixo de rotação.

Note, ainda, que $2\pi x$ é a distância que o centro de gravidade percorre ao girarmos o segmento em torno do eixo de rotação para produzir o tronco de cone.

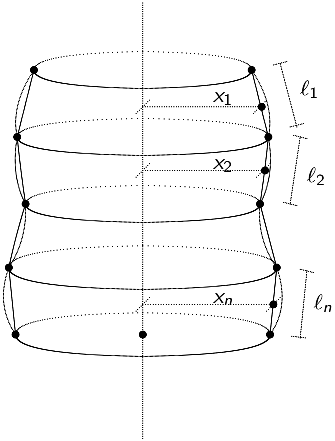
Note, ainda, que $2\pi x$ é a distância que o centro de gravidade percorre ao girarmos o segmento em torno do eixo de rotação para produzir o tronco de cone.

Desta forma a área da superfície obtida ao girarmos um segmento em torno de um eixo de rotação (tronco de cone) é o produto da distância percorrida pelo centro de massa do segmento pelo comprimento do segmento.

Note, ainda, que $2\pi x$ é a distância que o centro de gravidade percorre ao girarmos o segmento em torno do eixo de rotação para produzir o tronco de cone.

Desta forma a área da superfície obtida ao girarmos um segmento em torno de um eixo de rotação (tronco de cone) é o produto da distância percorrida pelo centro de massa do segmento pelo comprimento do segmento.

Isto se generaliza facilmente para a superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo de rotação pois esta superfície é formada pela justaposição de diversos troncos de cone



$$A = 2\pi\, x_1 \cdot \ell_1 + \cdots + 2\pi\, x_n \cdot \ell_n$$

$$= 2\pi \ \frac{(x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n)}{\ell_1 + \cdots + \ell_n} \ \cdot \ L$$

$$= 2\pi\, x_c \cdot L, \quad L = \ell_1 + \cdots + \ell_n$$

Um processo de passagem (tomando mais e mais pontos sobre a curva) ao limite resulta no resultado seguinte.

Um processo de passagem (tomando mais e mais pontos sobre a curva) ao limite resulta no resultado seguinte.

Teorema (Teorema de Pappus)

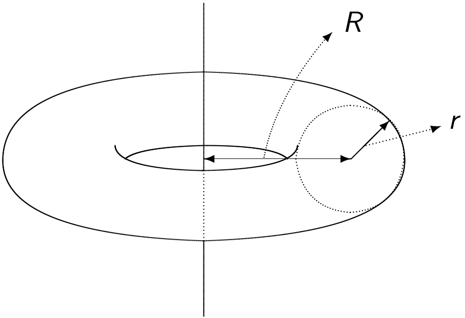
Se uma linha plana girar em torno de um eixo de seu plano, então a área da superfície gerada será igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu centro de massa.

Exemplo

Voltando ao problema da câmara de ar.

Exemplo

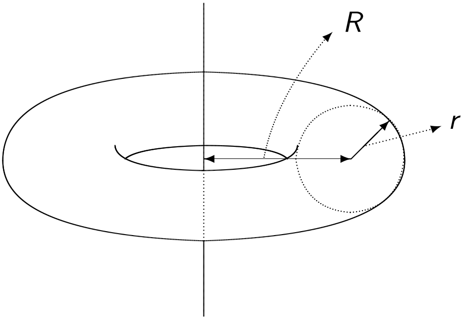
Voltando ao problema da câmara de ar.



$$A_c = 2\pi r \cdot 2\pi R$$
$$= 4\pi^2 Rr$$

Exemplo

Voltando ao problema da câmara de ar.



$$A_c = 2\pi r \cdot 2\pi R$$
$$= 4\pi^2 Rr$$

O volume de borracha necessário para construir tal câmara é, aproximadamente,

$$V = 4\pi^2 \cdot 50cm^3.$$

Como aprender Cálculo?

Como aprender Cálculo?

Não há uma receita de como aprender cálculo. Mas algumas dicas podem ajudar:

Como aprender Cálculo?

Não há uma receita de como aprender cálculo. Mas algumas dicas podem ajudar:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.

Como aprender Cálculo?

Não há uma receita de como aprender cálculo. Mas algumas dicas podem ajudar:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atenta e pacientemente, procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados.

Como aprender Cálculo?

Não há uma receita de como aprender cálculo. Mas algumas dicas podem ajudar:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atenta e pacientemente, procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.

Como aprender Cálculo?

Não há uma receita de como aprender cálculo. Mas algumas dicas podem ajudar:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atenta e pacientemente, procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.
- Acompanhe os exemplos passo a passo procurando desvendar o porquê de cada passagem e tentando enxergar porque o autor adotou esta solução.

Como aprender Cálculo?

Não há uma receita de como aprender cálculo. Mas algumas dicas podem ajudar:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atenta e pacientemente, procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.
- Acompanhe os exemplos passo a passo procurando desvendar o porquê de cada passagem e tentando enxergar porque o autor adotou esta solução. Tente soluções alternativas.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios).

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
- É muito importante frequentar as monitorias, ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
- É muito importante frequentar as monitorias, ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.
- Não desista de um exercício se a sua solução não for óbvia.

- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
- É muito importante frequentar as monitorias, ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.
- Não desista de um exercício se a sua solução não for óbvia. Insista e descubra o prazer de desvendar os pequenos mistérios do cálculo.