

Lista 2

Mecânica dos Sólidos aplicada a Elementos de Máquinas

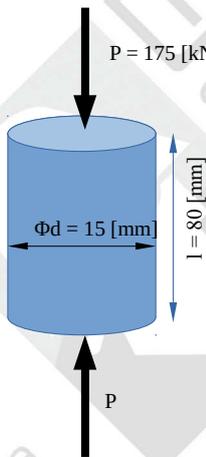
2.1 Exercícios propostos e resolvidos

Exercício 1) Uma barra de aço cilíndrica de 80 [mm] de comprimento e 15 [mm] de diâmetro é submetida a uma carga de compressão de 175 [kN]. O material é aço carbono. Determinar:

- A tensão de compressão;
- A deformação axial;
- A variação do comprimento ocorrida;
- O aumento do diâmetro da barra.

Solução:

a) A tensão de compressão é dada por:
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi \cdot d^2} = \frac{-175000 [N]}{\frac{\pi \times (15 [mm])^2}{4}} = -990,295 \left[\frac{N}{mm^2} \right]$$
$$\Rightarrow \sigma = -99,0295 \left[\frac{kgf}{mm^2} \right]$$



É importante trabalhar, de preferência, usando unidades do SI e fazendo os cálculos com 3 algarismos significativos. Resta agora um problema de unidades:

$$1 \left[\frac{kgf}{mm^2} \right] = \left[\frac{10 N}{(10^{-3} m)^2} \right] = 10 \times 10^6 \left[\frac{N}{m^2} \right] = 10 [MPa]$$

e portanto $\sigma = -990,295 [MPa]$

b) O valor da deformação $\varepsilon_\ell = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\ell_f - \ell_0}{\ell}$, também chamada de alongamento específico, é calculado usando-se a lei de Hooke:

$$\sigma = E_{aço} \cdot \varepsilon_\ell \Rightarrow \varepsilon_\ell = \frac{\sigma}{E_{aço}} = \frac{-990,295 [MPa]}{2,100 \times 10^5 [MPa]} = -4,716 \times 10^{-3} [-]$$

sem unidades e negativo, porque $\ell_f < \ell_0$ (compressão).

c) A variação do comprimento $\Delta \ell$ ocorrida neste caso pode ser calculada assim:

$$\varepsilon_\ell = \frac{\Delta \ell}{\ell} \Rightarrow \Delta \ell = \varepsilon_\ell \cdot \ell = -4,716 \times 10^{-3} [-] \times 80 [mm] = -0,377 [mm]$$

d) Por definição, o coeficiente de Poisson é:

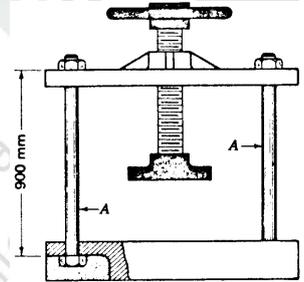
$$v = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_\ell} = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} \Rightarrow \Delta d = -\frac{v \cdot d \cdot \Delta \ell}{\ell} = -\frac{0,3 \times 15 [mm] \times (-0,377) [mm]}{80 [mm]} = 0,021 [mm]$$

portanto a barra aumentou 0,021 [mm] em diâmetro quando submetida à compressão.

Exercício 2) [2, pág. 73] Deve-se projetar uma prensa, de modo que o alongamento das duas colunas “A” sujeitas à tração não exceda 0,400 [mm].

a) Deve-se usar a prensa para cargas de até 44500 [N]. Determinar os diâmetros das colunas.

b) Caso se permita uma tensão máxima de 140 [MPa], as colunas oferecerão segurança?



Solução:

a) A equação de equilíbrio das forças verticais, supondo distribuição igual pelas colunas, é dada por :

$$P = P_{c1} + P_{c2} \Rightarrow P = 2 \cdot P_c$$

$$\text{ou } P_c = \frac{P}{2} \text{ e portanto } P_c = \frac{44500 [N]}{2} = 22250 [N]$$

Para o máximo deslocamento, tem-se $\Delta \ell = 0,400 [mm]$ e a deformação respectiva:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{0,400 [mm]}{900 [mm]} = 4,444 \times 10^{-4} [-]$$

Então se acha a área mínima para garantir esta deformação máxima:

$$\sigma = \frac{P_c}{A} = E_{aço} \cdot \varepsilon \Rightarrow A = \frac{P_c}{E_{aço} \cdot \varepsilon} = \frac{22250 [N]}{2,100 \times 10^{11} [Pa] \times 4,44 \cdot 10^{-4} [-]} = 2,384 \times 10^{-4} [m^2]$$

ou seja, as colunas devem ter diâmetro de :

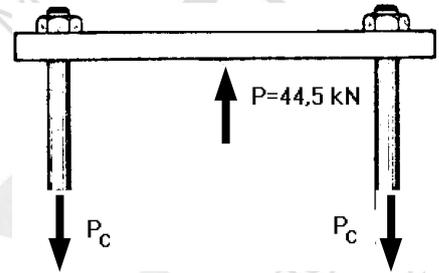
$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 2,384 \times 10^{-4}}{\pi}} = 0,0174 [m] = 17,4 [mm]$$

b) Neste caso, faz-se uma verificação quanto à resistência :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{22500 [N]}{\frac{\pi \times 17,4^2 \times 10^{-6}}{4} [m^2]} = 93,571 [MPa]$$

Como $\sigma_{max} = 140 [MPa]$ tem-se o coeficiente de segurança :

$S = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \frac{140 [MPa]}{93,571 [MPa]} = 1,496$ e, portanto, as colunas oferecem segurança quanto à resistência, pois $S > 1$. Em outras palavras, as colunas estão superdimensionadas. Esta é uma situação bastante comum, ou seja, a peça foi dimensionada quanto à deformação (ou rigidez) e resultou superdimensionada quanto à resistência (ou tensão). Eventualmente, em outros casos, essa situação pode inverter-se.



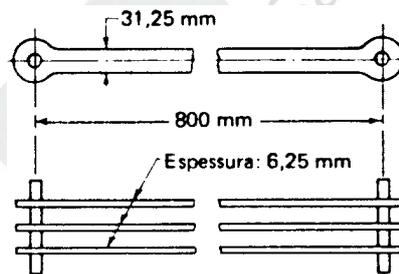
Fazendo-se agora o dimensionamento quanto à tensão:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_{min}} \Rightarrow A_{min} = \frac{22250[N]}{140 \times 10^6 [Pa]} = 158,928 \times 10^{-6} [m^2]$$

$$d_{min} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{min}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 158,928 \times 10^{-6} [m^2]}{\pi}} = 0,0142 [m] = 14,2 [mm]$$

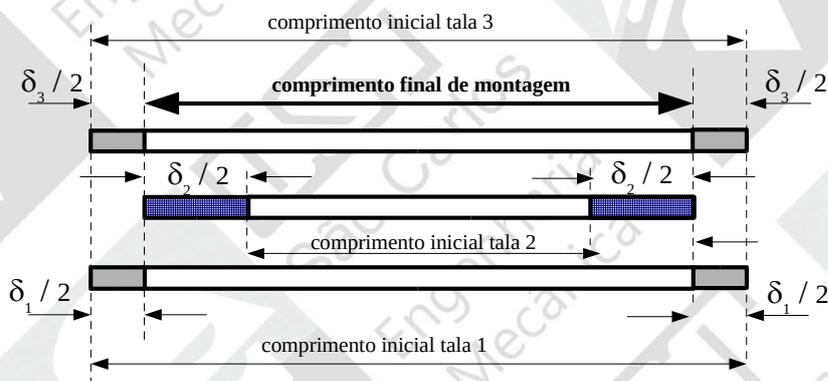
Se for adotado o d_{min} otimiza-se a tensão, porém se ultrapassa o deslocamento máximo permitido.

Exercício 3) [2, pág. 74] Uma corrente consiste de três barras de aço de 6,25 [mm] de espessura e 31,25 [mm] de largura, conforme mostra a figura. Durante a montagem, descobriu-se que uma das talas media somente 799,925 [mm] entre os centros dos furos e as outras mediam exatamente 800,000 [mm]. Determine a tensão em cada tala, após a montagem.



Solução:

Pode-se assumir a hipótese de que a tala menor seja aquela do meio, afim de evitar a ocorrência de flexão na corrente. Também se assume que as deformações são simétricas em relação a um eixo central paralelo aos pinos da corrente, conforme figura abaixo



Depois da montagem, a tala 2 (do meio) alonga-se de δ_2 (metade de cada lado) e as talas externas encurtam-se de δ_1 e δ_3 (também metade de cada lado e por convenção são negativos). Este exercício pede o cálculo de 3 variáveis δ_i e portanto são necessárias 3 equações.

A primeira delas é a equação que exprime a compatibilidade geométrica :

$$800,000 [mm] + \delta_1 = 799,925 [mm] + \delta_2 \Rightarrow \delta_2 - \delta_1 = 800,000 [mm] - 799,925 [mm] = 0,075 [mm] \quad \text{eq(1)}$$

Por outro lado, o equilíbrio das forças dá:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0 \quad \text{eq(2)}$$

e também, pela simetria :

$$F_1 = F_3 \quad \text{eq(3)}$$

porém mais tres incógnitas foram acrescentadas, necessitando-se agora 6 equações. Elas são encontradas lançando-se mão das equações de Hooke para as tres talas :

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 \quad \text{eq(4)}$$

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 \quad \text{eq(5)}$$

$$\sigma_3 = E_3 \cdot \varepsilon_3 \quad \text{eq(6)}$$

Obtém-se assim as 6 equações necessárias. Para a solução delas, é bom lembrar que as peças tem a mesma secção transversal e são feitas do mesmo material :

$$A_1 = A_2 = A_3 = A \text{ e também } E_1 = E_2 = E_3 = E$$

Das eqs (4) e eq (5)
$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1 = E \cdot \frac{\delta_1}{\ell_1} \text{ e } \sigma_2 = E \cdot \frac{\delta_2}{\ell_2}$$

Dividindo-se esta última eq. pela anterior , vem :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\delta_1 \cdot \ell_2}{\delta_2 \cdot \ell_1} \Rightarrow \frac{F_1 \cdot A_2}{F_2 \cdot A_1} = \frac{\delta_1 \cdot \ell_2}{\delta_2 \cdot \ell_1} \quad \text{eq(7)}$$

visto que as áreas das secções são iguais. Agora, das eqs (2) e (3) vem $F_2 = -2 \cdot F_1$, portanto:

$$\frac{F_1}{-2 \cdot F_1} = \frac{\delta_1 \cdot \ell_2}{\delta_2 \cdot \ell_1} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{\delta_1 \cdot \ell_2}{\delta_2 \cdot \ell_1} = \frac{\delta_1 \cdot 799,925 [mm]}{\delta_2 \cdot 800,000 [mm]} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \times 0,999906$$

e portanto :
$$-\frac{1}{2} = \frac{\delta_1 \times 0,999906}{\delta_2} \Rightarrow \delta_2 = -1,999812 \cdot \delta_1$$

combinando com eq (1) :

$$(-1,999812 \cdot \delta_1) - \delta_1 = 0,075 [mm] \Rightarrow \delta_1 = \delta_3 = \frac{0,075 [mm]}{-1,999812 - 1} = -0,025002 [mm]$$

$$\delta_2 = -1,999812 \cdot \delta_1 = -1,999812 \times (-0,025002 [mm]) = 0,049998 [mm]$$

Esta é a solução exata, calculada com um excesso de algarismos significativos para comparar com uma solução aproximada. Esta última é obtida assumindo $\ell_2 \simeq \ell_1 = \ell_3 = \ell$. E usando a eq (7) e fazendo $F_2 = -2 \cdot F_1$ vem :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta_1 \cdot \ell_2}{\delta_2 \cdot \ell_1} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \Rightarrow -\frac{F_1}{2 \cdot F_1} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \Rightarrow \delta_2 = -2 \cdot \delta_1$$

o que, combinado com eq (1), dá: $\delta_1 = -0,025 [mm]$ e $\delta_2 = 0,050 [mm]$.

A diferença entre os dois resultados tem erro de apenas $\frac{0,0500 - 0,049997}{0,0500} \times 100 = 0,006\%$

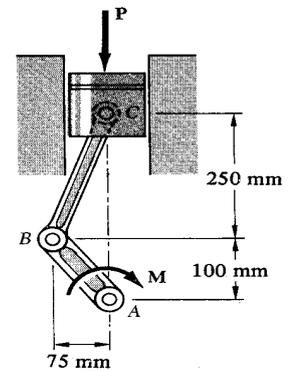
Finalmente, as tensões serão:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = E \cdot \varepsilon_1 = \frac{2,100 \times 10^5 [MPa] \times (-0,025 [mm])}{800,000 [mm]} = -6,562 [MPa]$$

$$\sigma_2 = E \cdot \varepsilon_2 = \frac{2,100 \times 10^5 [MPa] \times 0,050 [mm]}{799,925 [mm]} = 13,126 [MPa]$$

Exercício 4) [1, pág. 127] Um momento de torção M de 1500 [N.m] é aplicado ao eixo da manivela para se ter o equilíbrio no esquema de motor mostrado na figura. Para a posição indicada, determine:

- A força P necessária para manter o sistema em equilíbrio.
- A tensão normal na barra BC , a qual tem secção transversal uniforme de área igual a $470 \text{ [mm}^2\text{]}$.



Solução:

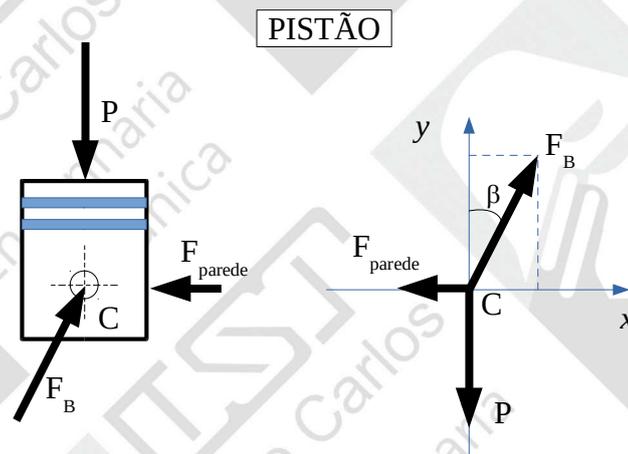
Trata-se de um sistema pistão/biela/manivela. Inicialmente se faz uma análise global do sistema; depois, isola-se cada componente (pistão, biela e manivela) e estuda-se o equilíbrio dos esforços aplicados; a seguir são calculados estes esforços e finalmente as tensões atuantes são determinadas.

a) Análise global do problema

Como se trata de um motor, nota-se que a combustão imprime uma força vertical P no pistão. A força peso é desprezada. O pino do pistão transmite à biela uma força axial F_B no ponto C (ver figuras seguintes). Esta força F_B , por sua vez, é transmitida ao munhão da manivela (girabrequim) em B . No girabrequim F_B é equilibrada em A pela reação R e pelo momento de torção $M_{i\text{ ext}}$.

b) Análise de cada componente isolado. Equilíbrio dos esforços aplicados.

b₁) Pistão

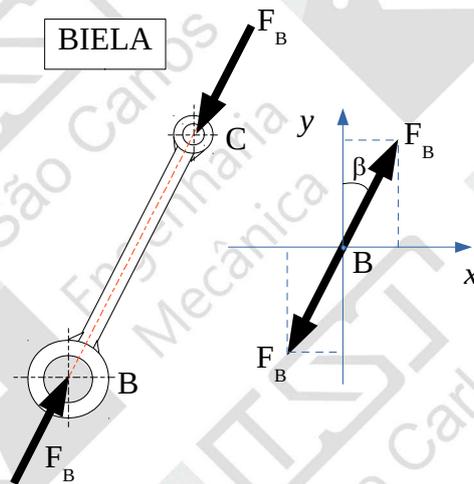


Faz-se inicialmente um esquema do componente isolado, em perspectiva ou vistas relevantes. A seguir todos os esforços tem que ser alocados :

- esforços externos (forças e momentos). Neste caso, só existe a força P ;
- esforços de campo (gravidade, elétrico, etc.). Aqui as forças peso foram desprezadas;
- esforços de contato com outros componentes (força normal, atrito, etc.). Existe o contato do pistão com a parede. Como o atrito não será considerado, a reação da parede é perpendicular (normal) ao pistão;
- esforços vinculares. O pino entre o pistão e a biela somente consegue transmitir força axial, denotada como F_B .

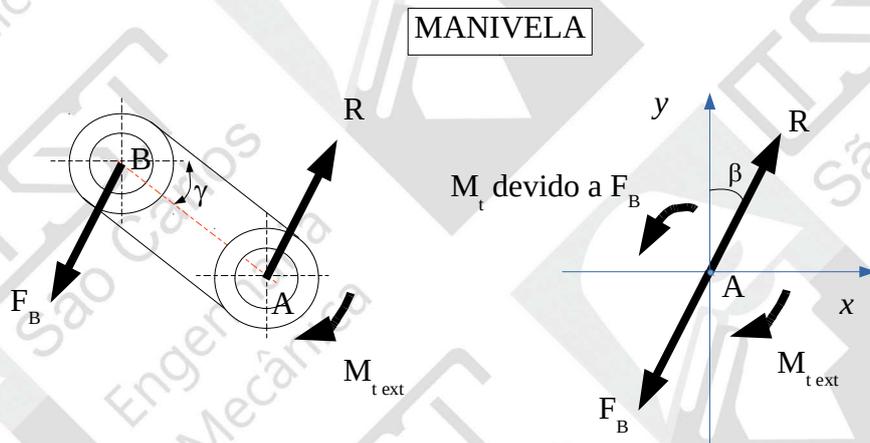
Escolhe-se um ponto relevante para estudar o equilíbrio (CG, vínculo, etc.). A Figura acima mostra o estudo do equilíbrio no centro C do pino.

b₂) Biela



A biela é um componente simples, que só transmite a força axial F_B . Somente em casos de altíssimas rotações, as forças inerciais passam a ser importantes em bielas. O equilíbrio no ponto B é mostrado acima.

b₃) Manivela

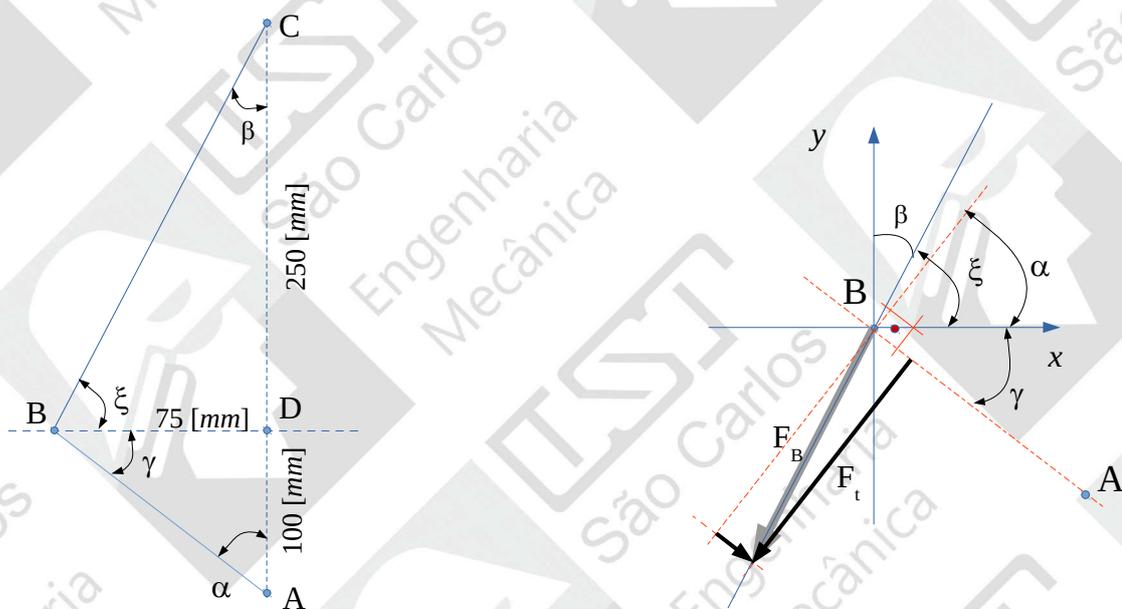


- esforços externos (forças e momentos). Existe o momento de torção externo $M_{t\text{ext}}$;
- esforços de campo (gravidade, elétrico, etc.). Aqui as forças peso foram desprezadas;
- esforços de contato com outros componentes (força normal, atrito, etc.). Inexistentes neste caso;
- esforços vinculares. O pino entre a biela e a manivela (ponto B) recebe F_B , e o munhão do girabrequim (ponto A) recebe a reação R do mancal.

O equilíbrio em A é mostrado acima à direita.

c) Cálculo dos esforços

Para o equacionamento e cálculo dos esforços será usada a configuração geométrica do sistema mostrada na figura abaixo.



Pela geometria fornecida, a distância AB vale:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{100^2[\text{mm}] + 75^2[\text{mm}]} = 125[\text{mm}]$$

Por sua vez, o momento de torção externo produz uma força tangencial em B de valor igual a:

$$M_{\text{ext}} = F_t \cdot \overline{AB} \Rightarrow F_t = \frac{M_{\text{ext}}}{\overline{AB}} = \frac{1500[\text{N} \cdot \text{m}]}{0,125[\text{m}]} = 12000[\text{N}]$$

A configuração mostrada na figura esquerda acima permite calcular:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{75}{100}\right) = 36,870^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ - \alpha = 53,130^\circ$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{75}{250}\right) = 16,699^\circ \Rightarrow \xi = 90^\circ - \beta = 73,301^\circ$$

Por outro lado, a força da biela F_B aplicada na manivela pode ser decomposta nas direções tangencial e radial da manivela, conforme a figura acima à direita:

$$F_t = F_B \cdot \cos(\xi - \alpha) \Rightarrow F_B = \frac{F_t}{\cos(\xi - \alpha)} = \frac{12000[\text{N}]}{\cos(73,301^\circ - 36,870^\circ)} = 14914,751[\text{N}]$$

O equilíbrio no ponto C dá:

$$P = F_B \cdot \cos\beta = 14914,751[\text{N}] \times \cos(16,699^\circ) = 14285,789[\text{N}]$$

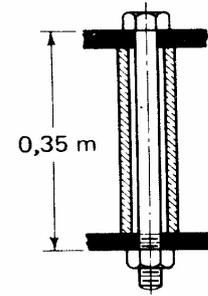
Este é o valor da força vertical P que equilibra o sistema.

d) Cálculo da tensão atuante.

Finalmente, a tensão normal (compressão) atuante na biela é dada por:

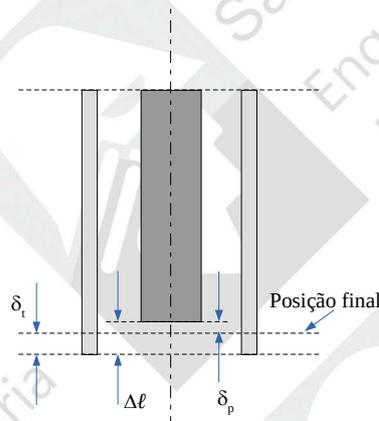
$$\sigma = \frac{14285,789[\text{N}]}{470[\text{mm}^2]} = \frac{14285,789[\text{N}]}{470 \times 10^{-6}[\text{m}^2]} = 30,395 \times 10^6[\text{N}/\text{m}^2] = 30,395[\text{MPa}]$$

Exercício 5) [2, pág. 75] Um parafuso de aço de diâmetro nominal de 20 [mm] e passo de 2,5 [mm] (distância de fio a fio da rosca, na direção axial) e um tubo de alumínio de 40 [mm] e 22 [mm] de diâmetros externo e interno, respectivamente, atua como espaçador para duas placas, conforme indica a figura. Gira-se a porca, eliminando-se toda a folga. Em seguida, dá-se um aperto adicional correspondente a um terço de volta. Calcule a tensão resultante no parafuso e no tubo, desprezando a deformação das placas, da cabeça e da porca do parafuso.



Solução:

Depois do aperto adicional, o parafuso será tracionado e o tubo será comprimido. O aperto de 1/3 de volta corresponde a : $\Delta \ell = \frac{\text{passo}}{3} = \frac{2,5[\text{mm}]}{3} = 0,833[\text{mm}]$



A equação de compatibilidade geométrica, conforme a figura, lembrando-se que δ_t é negativo, é dada por:

$$350,000[\text{mm}] - 0,833[\text{mm}] + \delta_p = 350,000[\text{mm}] + \delta_t \Rightarrow \delta_p - \delta_t = 0,833[\text{mm}] \quad \text{eq(1)}$$

A equação de equilíbrio de forças é:

$$F_p + F_t = 0 \quad \text{eq(2)}$$

Segundo a Teoria da Elasticidade:

$$\sigma_p = E_{\text{aço}} \cdot \varepsilon_p \Rightarrow \sigma_p = \frac{F_p}{A_p} = E_{\text{aço}} \cdot \frac{\delta_p}{\ell} \quad \text{eq(3)}$$

e também da mesma forma:

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = E_{\text{alumínio}} \cdot \frac{\delta_t}{\ell} \quad \text{eq(4)}$$

Dividindo-se a equação (3) pela equação (4) e considerando-se a equação (2):

$$\frac{A_t}{A_p} = \frac{F_t}{F_p} \cdot \frac{E_{\text{aço}}}{E_{\text{alumínio}}} \cdot \frac{\delta_p}{\delta_t} \Rightarrow \frac{\delta_p}{\delta_t} = - \frac{A_t \cdot E_{\text{alumínio}}}{A_p \cdot E_{\text{aço}}} \quad \text{eq(5)}$$

As áreas das secções são as seguintes:

$$A_t = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi \times ((0,040[m])^2 - (0,022[m])^2)}{4} = 8,765 \times 10^{-4} [m^2]$$

$$A_p = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \times 0,020^2 [m^2]}{4} = 3,142 \times 10^{-4} [m^2]$$

Substituindo-se na equação anterior:

$$\frac{\delta_p}{\delta_t} = -\frac{A_t \cdot E_{\text{alumínio}}}{A_p \cdot E_{\text{aço}}} = -\frac{8,765 \times 10^{-4} [m^2] \times 7,100 \times 10^4 [MPa]}{3,142 \times 10^{-4} [m^2] \times 2,070 \times 10^5 [MPa]} = -0,957 [-]$$

Substituindo-se na Equação (1):

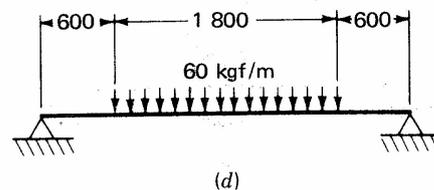
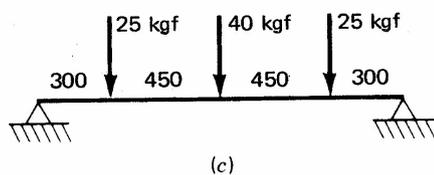
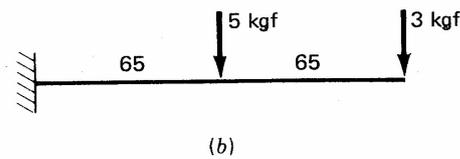
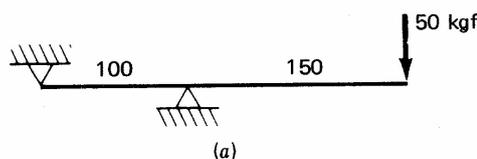
$$(-0,957 \cdot \delta_t) - \delta_t = 0,833 [mm] \Rightarrow \delta_t = \frac{0,833 [mm]}{(-0,957 - 1)} = -0,426 [mm] \text{ e } \delta_p = 0,407 [mm]$$

Com os valores dos deslocamentos calculam-se as tensões:

$$\sigma_p = 2,070 \times 10^5 \times [MPa] \times \frac{0,407 [mm]}{350 [mm]} = 240,711 [MPa]$$

$$\sigma_t = 7,100 \times 10^4 \times [MPa] \times \frac{-0,426 [mm]}{350 [mm]} = -86,417 [MPa]$$

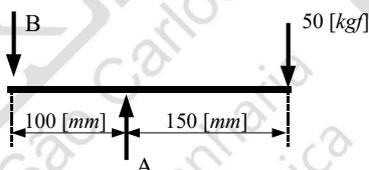
Exercício 6) [2, pág. 75] Calcule as reações nos apoios e trace os diagramas de força cortante e de momento de flexão para cada uma das vigas mostradas nas figuras abaixo.



Solução:

Os exercícios deste tipo seguem sempre a mesma rotina. Escrevem-se as equações de equilíbrio que são a seguir resolvidas para serem obtidas as reações dos apoios. Uma vez que estas são calculadas, passa-se à determinação dos diagramas de força cortante e momentos de flexão e de torção. É preciso se prestar atenção para convenções de sinais dos vários diagramas de esforços e de tensões.

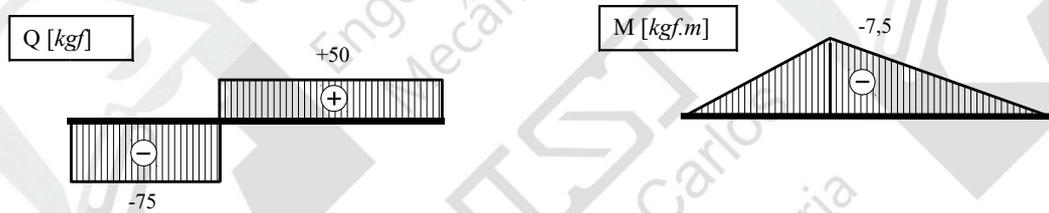
a) i) cálculo de reações



$$\begin{cases} \sum F_V = 0 \Rightarrow A = B + 50 [kgf] \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 0,100 [m] \times B = 50 [kgf] \times 0,150 [m] \\ \Rightarrow B = 75 [kgf] \text{ e } A = 125 [kgf] \end{cases}$$

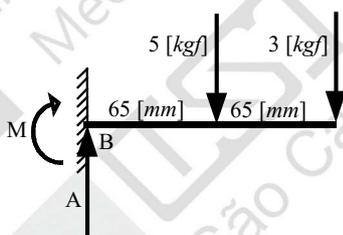
As equações de equilíbrio carregam uma coerência de forma inerente. Se por acaso alguma reação vincular for assumida com sentido errado, o valor calculado resultará negativo. Deve-se voltar ao diagrama e indicar o sentido correto para evitar a propagação do erro.

ii) Diagramas



De acordo com as regras de convenção de sinal, no diagrama de força cortante, considera-se positiva a força que provoca um binário no sentido horário e, também por convenção, os valores positivos são desenhados acima da linha elástica. Já no diagrama de momento de flexão convencionam-se como positivo o momento que provoca tração nas fibras abaixo da linha elástica e, também por convenção, o desenho se faz sempre no lado tracionado da peça.

b) i) Cálculo das reações:

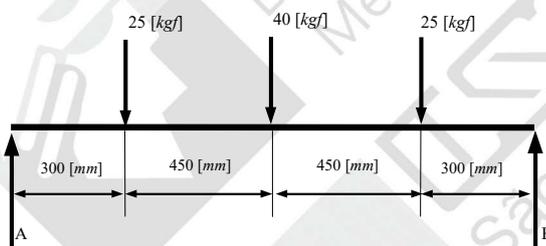


$$\begin{cases} \sum F_V = 0 \Rightarrow A = 5[\text{kgf}] + 3[\text{kgf}] = 8[\text{kgf}] \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow M = 5[\text{kgf}] \times 0,065[\text{m}] + 3[\text{kgf}] \times 0,130[\text{m}] = \\ M = 0,715[\text{kgf} \cdot \text{m}] \end{cases}$$

ii) Diagramas

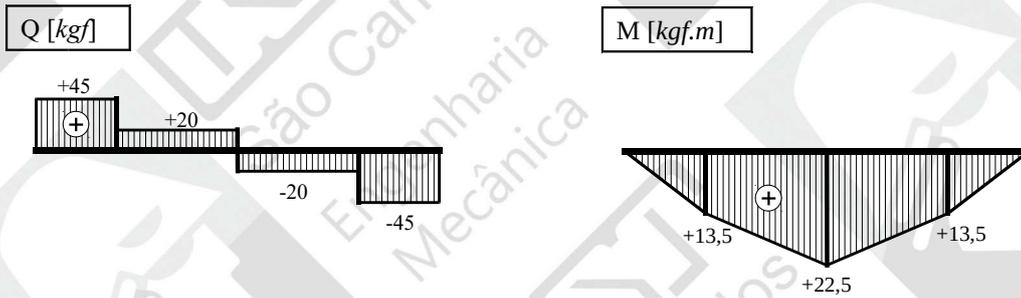


c) i) Cálculo das reações:

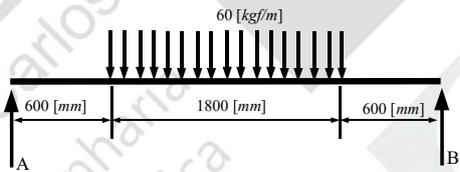


$$\begin{cases} \sum F_V = 0 \Rightarrow A + B = 25[\text{kgf}] + 40[\text{kgf}] + 25[\text{kgf}] = 90[\text{kgf}] \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow B \times 1,500[\text{m}] = 25[\text{kgf}] \times 0,300[\text{m}] + 40[\text{kgf}] \times 0,750[\text{m}] + 25[\text{kgf}] \times 1,200[\text{m}] \\ \Rightarrow B = \frac{67,5[\text{kgf} \cdot \text{m}]}{1,500[\text{m}]} = 45[\text{kgf}] \quad A = 45[\text{kgf}] \end{cases}$$

ii) Diagramas

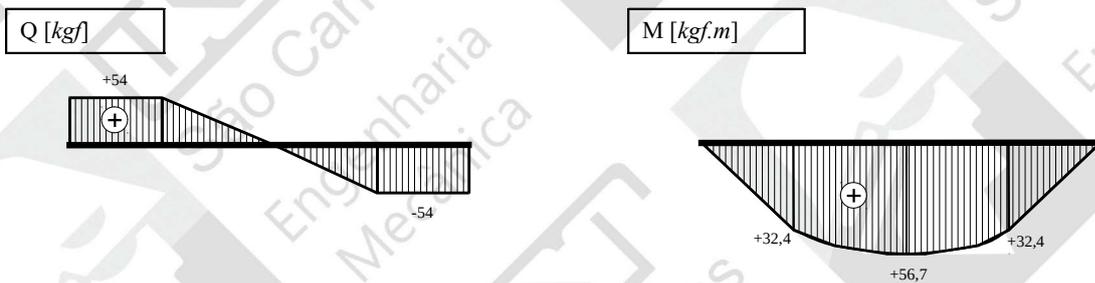


d) i) Cálculo das reações:



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow A + B = 60 [kgf \cdot m] \times 1,800 [m] = 108 [kgf] \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow B \times 3,000 [m] = 60 [kgf \cdot m] \times 1,800 [m] \times 1,500 [m] \\ B = \frac{108 [kgf] \times 1,500 [m]}{3 [m]} = 54 [kgf] ; A = 54 [kgf] \end{cases}$$

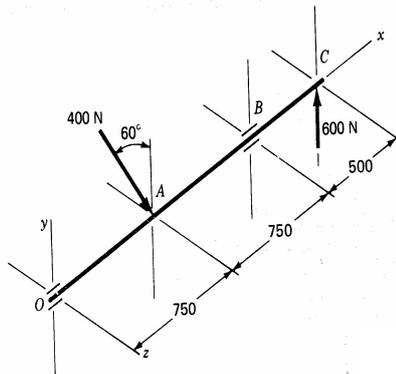
ii) Diagramas



O cálculo do momento de flexão máximo é dado por:

$$M_{f_{max}} = 54 [kgf] \times 1,5 [m] - (60 [kgf \cdot m] \times 0,450 [m]) = 56,700 [kgf \cdot m]$$

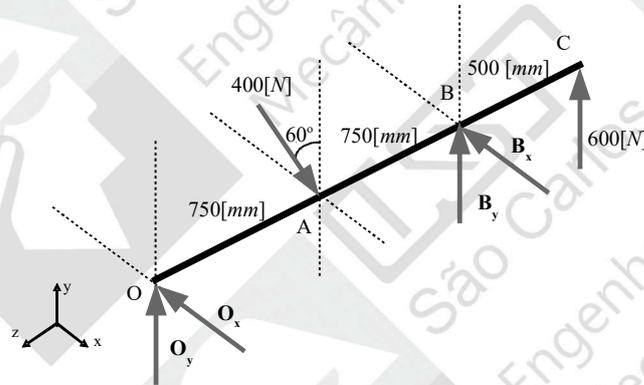
Exercício 7) [2, pág. 78] A figura abaixo representa um eixo com parte em balanço, apoiado nos mancais O e B e carregado com forças em A e C. Determine o valor e a localização da tensão normal máxima, sabendo-se que o eixo tem diâmetro constante de 15 [mm].



Solução:

Cálculo das reações nos mancais:

Como os sentidos das forças não são conhecidos, adotam-se sentidos adequados para equilibrar o sistema, o que nem sempre é evidente. A força que resultar em valor negativo, indica que o sentido adotado é contrário ao correto.

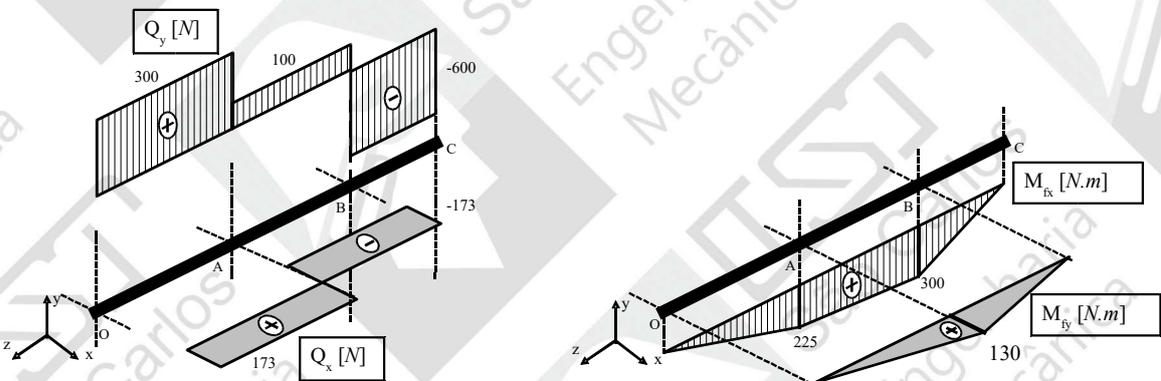


$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow -O_x + 400[N] \times \text{sen } 60^\circ - B_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow O_y - 400[N] \times \text{cos } 60^\circ + B_y + 600[N] = 0 \\ \sum M_x^O = 0 \Rightarrow -400[N] \times \text{cos } 60^\circ \times 0,750[m] + B_y \times 1,500[m] + 600[N] \times 2,000[m] = 0 \\ \sum M_y^O = 0 \Rightarrow -400[N] \times \text{sen } 60^\circ \times 0,750[m] + B_x \times 1,500[m] = 0 \end{cases}$$

A solução destas equações resulta em:

$$B_x = 173,205[N] \quad ; \quad B_y = -700,000[N] \quad ; \quad O_x = 173,205[N] \quad ; \quad O_y = 300,000[N]$$

É importante que se use sempre a seguinte nomenclatura: a secção transversal do eixo está contida no plano xy e o eixo tem seu comprimento ao longo do eixo z . Têm-se esforços em dois planos (xz e yz ou horizontal H e vertical V), portanto ter-se-ão dois diagramas de força cortante (Q_x e Q_y , ou cortante horizontal e cortante vertical) e dois diagramas de momento de flexão (M_{fy} e M_{fx} , ou momento de flexão horizontal e momento de flexão vertical). No presente caso não se tem esforços normais P_z .



No caso mais geral a tensão normal tem contribuição do esforço normal e dos momentos de flexão.

Ela é dada por:
$$\sigma_N = \frac{P_z}{A} + \frac{M_{fx}}{J_x} + \frac{M_{fy}}{J_y}$$

e a equação da linha neutra é dada por:

$$y = -\left(\frac{M_{fy} \cdot J_x}{M_{fx} \cdot J_y}\right) \cdot x - \frac{P_z \cdot J_x}{A \cdot M_{fx}}$$

O termo $-\left(\frac{M_{fy} \cdot J_x}{M_{fx} \cdot J_y}\right)$ representa a inclinação da linha

neutra e o termo $-\frac{P_z \cdot J_x}{A \cdot M_{fx}}$ é a intersecção da linha

neutra com eixo y quando a coordenada x é nula (ponto D na figura). No ponto T tem-se a maior tensão de tração (σ_T) e no ponto C a maior tensão de compressão (σ_C). No caso particular de secção circular, $J_x = J_y = J$ e estes pontos têm coordenadas:

$$x_{T,C} = \pm \frac{M_{fy}}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}} \cdot r, \quad \text{e} \quad y_{T,C} = \pm \frac{M_{fx}}{\sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}} \cdot r \quad \text{sendo } r = D/2.$$

Os pontos T e C podem ser ligados por uma linha que é perpendicular à linha neutra e passa pelo CG. Ao longo desta linha a tensão normal varia linearmente desde σ_C até σ_T . Esta mesma linha faz

com o eixo x um ângulo $\theta = \arctg\left(\frac{M_{fy}}{M_{fx}}\right)$. O ângulo θ varia ao longo do eixo z .

No caso particular deste exercício, se tem $P_z = 0$, o que implica que a linha neutra passa pelo CG (ponto D coincide com CG) e, portanto, os valores de tensão σ_T e σ_C são iguais em módulo. Substituindo na equação da tensão normal para o caso geral tem-se:

$$\sigma_{N,T} = \frac{r}{J} \cdot M_R \quad \sigma_{N,C} = -\frac{r}{J} \cdot M_R \quad M_R = \sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}$$

Se não existir força normal ($P_z = 0$), a tensão normal é totalmente devida à flexão. M_R é obtido ao projetarem-se os momentos de flexão no plano formado pelo eixo z e pela direção normal à linha neutra (direção do segmento CT). No plano formado pelo eixo z e pela linha neutra o momento de flexão projetado será nulo. Deve-se observar que a análise realizada acima vale para uma seção transversal qualquer do eixo. Para o cálculo da máxima tensão normal atuando sobre o eixo é necessária a determinação da posição, ao longo do eixo, onde ocorre o maior valor de M_R .

Voltando ao exercício proposto, na seção que passa pelo ponto A tem-se:

$$M_{RA} = \sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2} = 259,250 [N \cdot m]$$

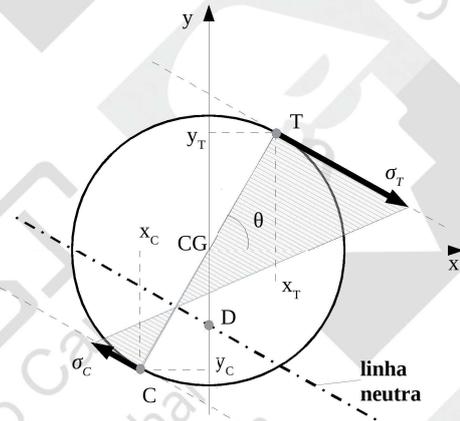
E em B tem-se: $M_{RB} = M_{fx} = 300,000 [N \cdot m]$

Desta forma, a máxima tensão ocorrerá na seção B e seus valores serão:

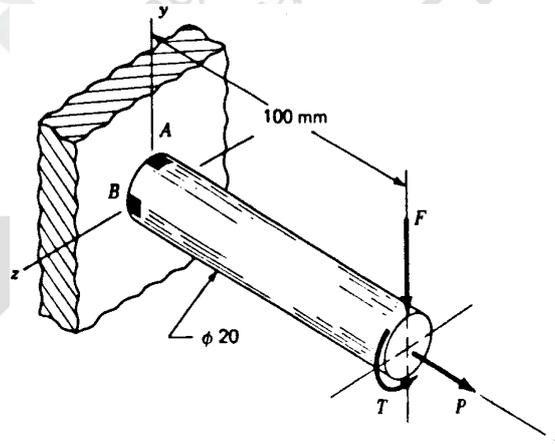
$$\sigma_T = \frac{r \cdot M_R}{J} = \frac{d \cdot 64 \cdot M_R}{2 \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot M_R}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \times 300 [N \cdot m]}{\pi \cdot (15 \times 10^{-3} [m])^3} = 905,413 [MPa]$$

$$\sigma_C = -905,413 [MPa]$$

É interessante notar que no ponto B, como $M_{fy} = 0$, tem-se $x_T = x_C = 0$.

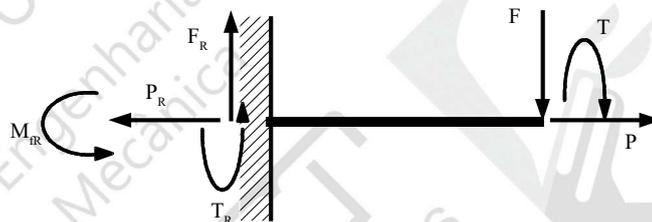


Exercício 8) [2, pág. 82] Determine as tensões nos pontos A e B da viga engastada mostrada na figura abaixo. O elemento de tensão que contém o ponto A fica na parte superior da superfície da viga e é paralelo ao plano xz. O elemento de tensão que contém o ponto B, fica na lateral da superfície da viga e é paralelo ao plano xy. O carregamento consiste das forças $F = 0,55$ [kN] e $P = 8$ [kN], e do torque (momento de torção) $T = 30$ [N.m]. Desenhe ambos os elementos de tensão, identificando os eixos e as tensões com suas intensidades e direções adequadas. Calcule também as tensões principais e suas direções.

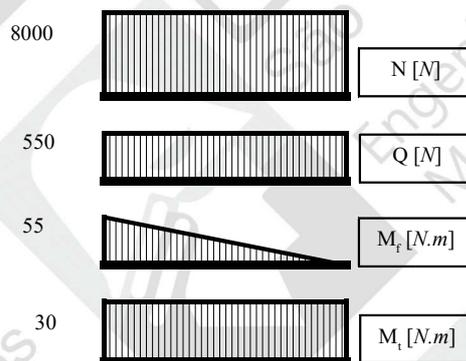


Solução:

As reações de apoio no engastamento são mostradas na figura abaixo. Além dos esforços contrários àqueles aplicados, existe também um momento de flexão de reação no engastamento.



Os diagramas dos esforços solicitantes são bastante simples e podem ser vistos abaixo.

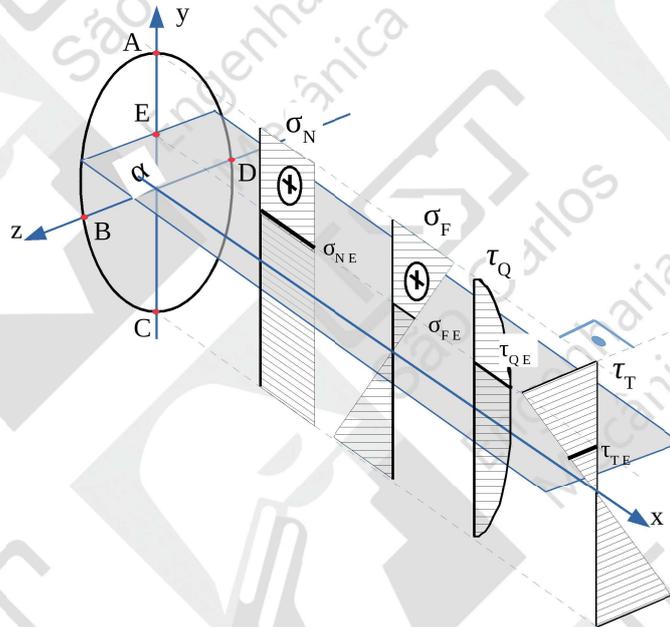


A secção do eixo próxima ao engastamento contém os pontos A e B. Os diagramas de distribuição de tensões são mostrados abaixo em duas representações distintas. Tem-se a tensão normal σ_N devida à força normal P, tensão normal σ_F devida à flexão causada pela força cortante F, a tensão tangencial τ_Q também devida à cortante F e a tensão tangencial τ_T devida ao momento de torção T.

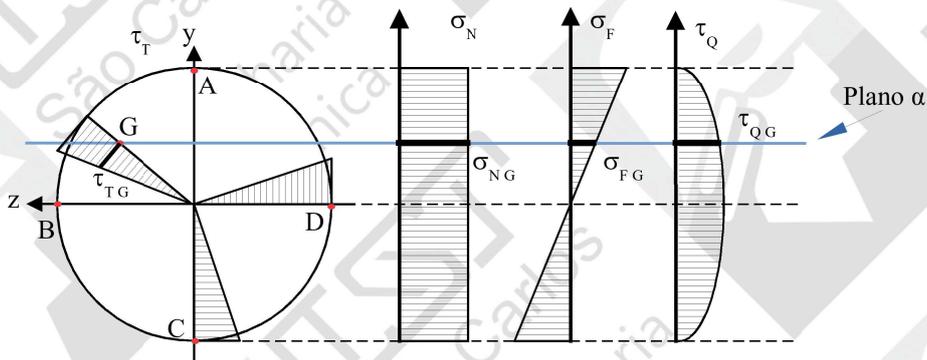
Ao combinarem-se os efeitos de σ_N e σ_F ter-se-á a L.N. passando abaixo do CG.

No plano horizontal genérico α , as tensões atuantes nos pontos E e G estão destacadas nas duas figuras.

a) representação em perspectiva



b) representação no plano yz



Os valores máximos destas tensões são:

$$\sigma_N = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi \cdot d^2} = \frac{8000 [N]}{\pi \times (0,02 [m])^2} = 25,46 [MPa]$$

$$\sigma_F = \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_f}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{55 [N \cdot m]}{\frac{\pi \times 0,02^3}{32} [m^3]} = 70,03 [MPa]$$

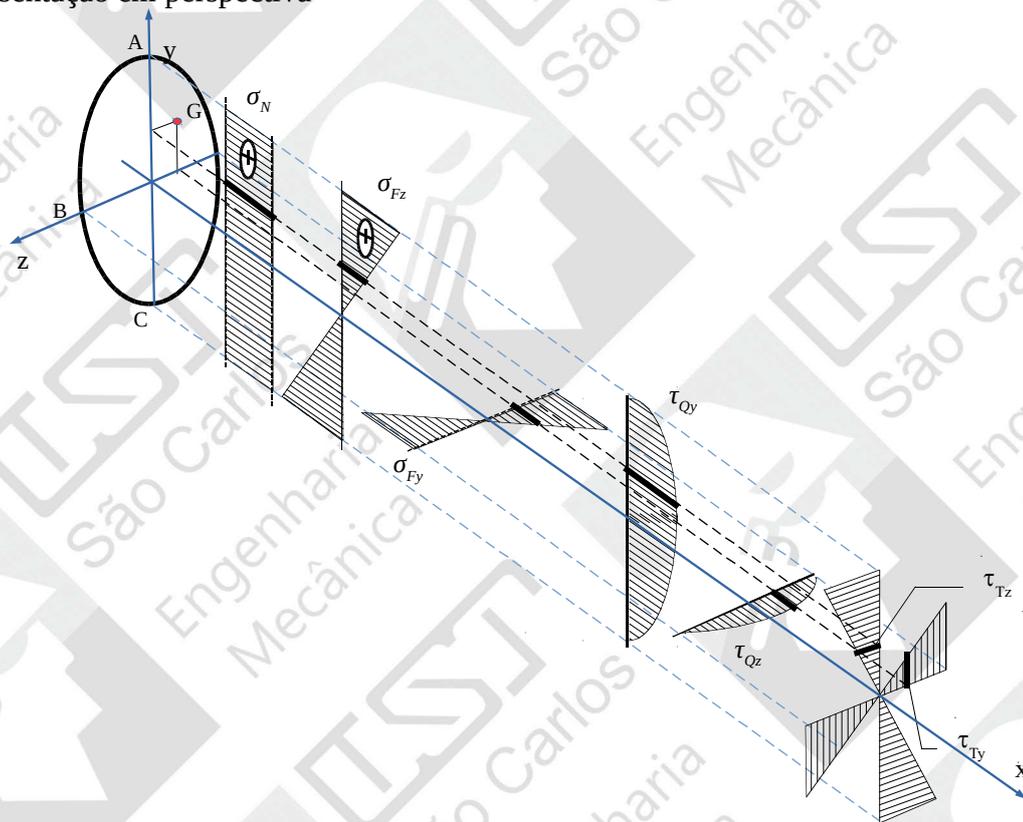
$$\tau_T = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{30 [N \cdot m]}{\frac{\pi \times 0,02^3}{16} [m^3]} = 19,10 [MPa]$$

$$\tau_Q = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot A} = \frac{4 \times 550 [N]}{3 \times \pi \times 0,02^2 [m^2]} = 23,34 [kPa]$$

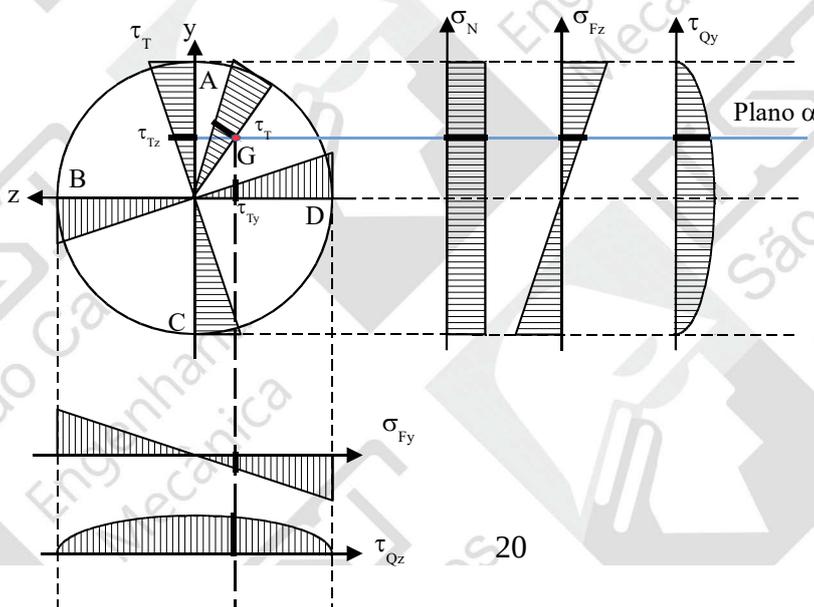
Um caso mais geral (não é o caso deste exercício) é visto nas figuras a seguir, tanto em perspectiva quanto no plano yz. Agora, sobre à seção transversal estão aplicadas tensões normais e tangenciais simultaneamente.

Na seção transversal atuam: a tensão normal devida à força normal (σ_N); a tensão normal devida à flexão em torno do eixo horizontal (σ_{Fz}); a tensão de cisalhamento devida à força cortante vertical (τ_{Qy} , sendo que as duas últimas variam ao longo da coordenada y); e a tensão de cisalhamento devida ao momento de torção (τ_T) cujo módulo varia ao longo do raio da seção. Além dessas tensões, atuam também a tensão normal devida à flexão em torno do eixo vertical (σ_{Fy}), a tensão de cisalhamento devida à força cortante horizontal (τ_{Qz}), que variam ao longo da coordenada z. Num ponto genérico G, as tensões atuantes acham-se também representadas pelas linhas grossas nas figuras. Na realidade, a tensão de cisalhamento devida ao momento de torção atua na direção tangente ao raio OP. Os valores representados na figura (τ_{Tx} e τ_{Ty}) são as componentes dessa tensão.

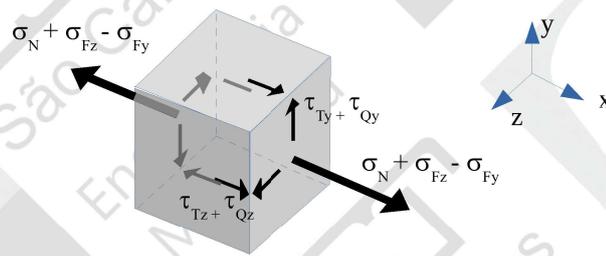
a) representação em perspectiva



b) representação no plano xz



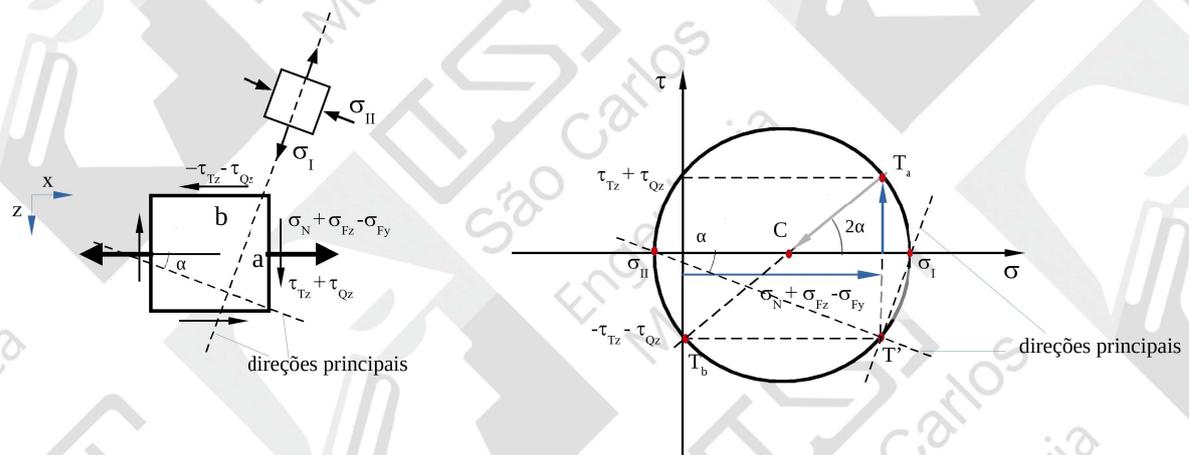
Tomando-se um elemento tridimensional de tensão localizado em A e alinhado com os eixos x, y e z, tem-se a situação do cubo infinitesimal da figura abaixo.



É muito comum usar-se o círculo de Mohr para análise de um estado de tensão. Este círculo é feito num espaço bidimensional de coordenadas (σ, τ) . A convenção de sinal adotada é a seguinte: o ângulo α entre a direção do eixo coordenado horizontal (x, neste caso) e a secção genérica é positivo no sentido antihorário e as tensões tangenciais τ são positivas quando percorrem o elemento no sentido horário.

Para a face superior, $\sigma_z=0$ e a construção geométrica do círculo de Mohr segue o procedimento abaixo (obs.:se $\sigma_z \neq 0$ o procedimento muda ligeiramente):

- Calculam-se as coordenadas (σ, τ) para o lado a do elemento de tensão considerado: $\sigma_a = \sigma_N + \sigma_{Fz} - \sigma_{Fy}$ e $\tau_a = \tau_{Tz} + \tau_{Qz}$. Este lado a será representado no círculo de Mohr pelo ponto $T_a = (\sigma_a, \tau_a)$. Como não se tem os valores numéricos deste exemplo, assume-se $\sigma_a > 0$ e $\tau_a > 0$.
- Para o lado b do elemento de tensão tem-se $T_b = (\sigma_b, \tau_b)$, com $\sigma_b = \sigma_z = 0$ e $\tau_b = -\tau_a = -\tau_{Tz} - \tau_{Qz}$. Os lados a e b formam um ângulo de 90 graus no elemento, enquanto no círculo de Mohr T_a e T_b estão separados por 180 graus.
- Determina-se o cruzamento C de $T_a T_b$ e o eixo σ . Este é o centro C do círculo de Mohr.
- O círculo cruza o eixo das abcissas em σ_I e σ_{II} , tensões principais.
- O ponto simétrico de T_a em relação ao eixo das abcissas é o chamado polo T' .
- Ligando o polo aos pontos que representam as tensões principais tem-se as direções principais.



O círculo de Mohr também pode ser estudado de modo analítico através das fórmulas:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

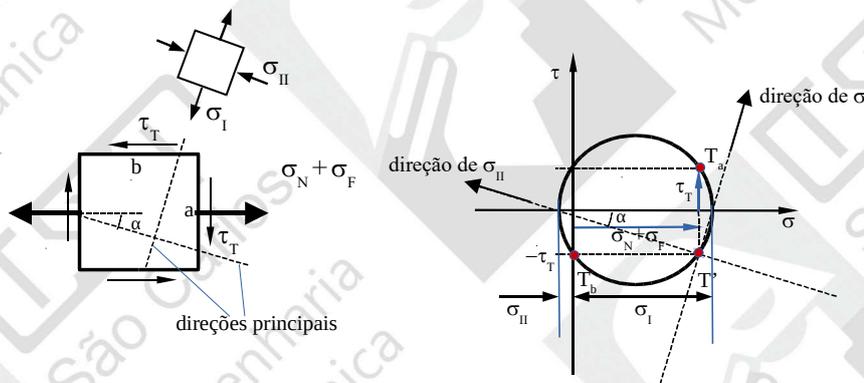
$$tg 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_x}$$

O valor calculado de α normalmente se refere ao ângulo entre o polo T' e a tensão σ_{II} , mas dependendo dos valores de σ_x e σ_y pode se referir a σ_I . Por isso, é aconselhável verificar sempre a consistência entre a solução gráfica, a solução analítica e a convenção de sinal para α e τ .

É importante ressaltar que os valores de tensão principais σ_I e σ_{II} , mostrados na figura, são válidos somente para a face superior. Eles atuam em direções tais que a tensão de cisalhamento é nula na face. As tensões principais σ_I , σ_{II} e σ_{III} no ponto G (centro do cubo) podem ser encontradas a partir das raízes de uma equação cúbica ([2], equação 2.10, pg. 28,). Em um caso genérico, elas não estarão alinhadas com nenhuma das faces e, portanto as tensões σ_I e σ_{II} , mostradas acima, não serão tensões principais do centro do elemento tridimensional. É oportuno observar que os principais critérios de resistência para engenharia mecânica (Tresca e Von Mises) têm como tensão equivalente uma composição adequada das tensões principais, daí a importância da sua determinação. A falha e a propagação da trinca ocorrem em direções referidas às direções principais segundo a teoria de mecânica da fratura adotada, vindo daí a importância de seus cálculos.

Voltando ao presente exercício, ao tomar-se uma porção de material no plano xz em torno do ponto A tem-se a situação da figura abaixo.

Tensões no ponto A



No eixo das tensões normais $\sigma_a = \sigma_x = \sigma_N + \sigma_F = 25,46[MPa] + 70,03[MPa] = 95,49[MPa]$ e $\sigma_z = 0$. No eixo das tensões tangenciais $\tau_a = \tau_T = +19,10 [MPa]$. Calculam-se a seguir as tensões principais e suas direções:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{95,490[MPa]}{2} + \sqrt{\left(\frac{95,490[MPa]}{2}\right)^2 + (19,100[MPa])^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_I = 47,745[MPa] + 51,424[MPa] = 99,169[MPa]$$

$$\sigma_{II} = 47,745[MPa] - 51,424[MPa] = -3,679[MPa]$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{-2\tau}{\sigma} = \frac{2 \times 19,100[MPa]}{95,490[MPa]} = -0,400 \Rightarrow 2\alpha = -21,801^\circ \Rightarrow \alpha = -10,901^\circ \text{ (horário)}$$

No ponto B tem-se as seguintes tensões atuando no plano xy : no eixo das tensões normais $\sigma = \sigma_x = \sigma_N = 25,46 [MPa]$ e $\sigma_y = 0$. No eixo das tensões tangenciais $\tau = \tau_T + \tau_Q = 19,10 [MPa] + 23,34 [MPa] = 42,44 [MPa]$. Da mesma forma que feito anteriormente:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{25,460 [MPa]}{2} + \sqrt{\left(\frac{25,460 [MPa]}{2}\right)^2 + (42,440 [MPa])^2} \Rightarrow$$

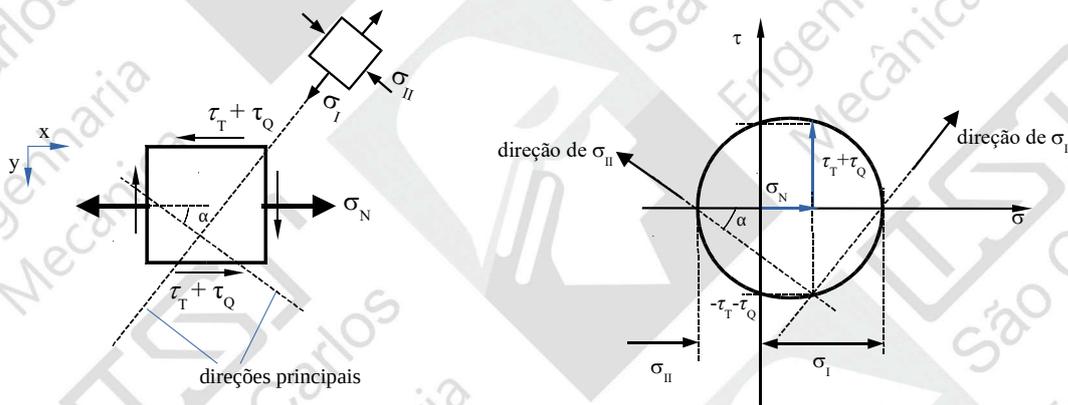
$$\sigma_I = 12,730 [MPa] + 44,308 [MPa] = 57,038 [MPa]$$

$$\sigma_{II} = 12,730 [MPa] - 44,308 [MPa] = -31,578 [MPa]$$

e também:

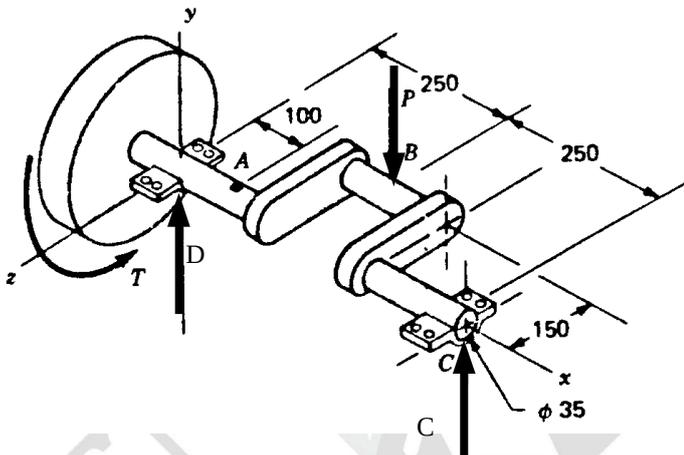
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} = -\frac{2\tau}{\sigma} = -\frac{2 \times 42,440 [MPa]}{25,460 [MPa]} = -3,334 \Rightarrow 2\alpha = -73,303^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = -36,651^\circ \text{ (horário)}$$



Exercício 9) [2, pág. 82] A figura abaixo mostra a árvore de manivelas e o volante de um compressor de ar monocilíndrico. Durante o funcionamento, usa-se parte da potência acumulada no volante para se obter parte da força P do pistão. Neste problema, deve-se considerar que a força total P do pistão resulta do torque de $T = 600 [N.m]$ transmitido à árvore de manivelas pelo volante. No ponto A, situado a $100 [mm]$ do mancal da esquerda e na parte superior da superfície da árvore, localiza-se um elemento de tensão com os lados paralelos aos eixos x e z .

- Calcule as tensões que atuam no elemento A;
- Determine as tensões principais e suas direções para o elemento acima considerado;
- Faça um esboço do elemento de tensão principal, orientando-o corretamente em relação aos eixos x e z e identificando as tensões e os ângulos;
- Esboçe outro elemento de tensão, orientado corretamente, para mostrar a tensão de cisalhamento máxima e as tensões normais correspondentes, identificando seus ângulos.



Solução:

Cálculo das reações:

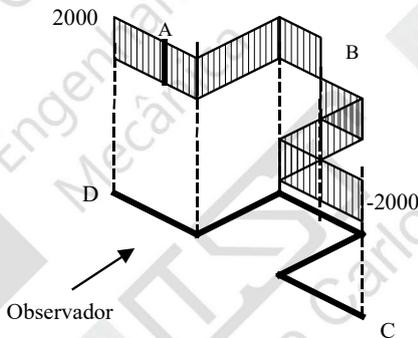
A força P do pistão é calculada assim:

$$\sum M_x^D = 0 \Rightarrow 600 [N \cdot m] - P \times 0,15 [m] = 0 \Rightarrow P = 4000 [N]$$

e as reações C e D:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow C + D - 4000 [N] = 0 \\ \sum M_z^D = 0 \Rightarrow C \times 0,500 [m] = 4000 [N] \times 0,250 [m] \end{cases}$$
$$\Rightarrow C = 2000 [N] \quad D = 2000 [N]$$

Diagrama de Força Cortante Q [N]

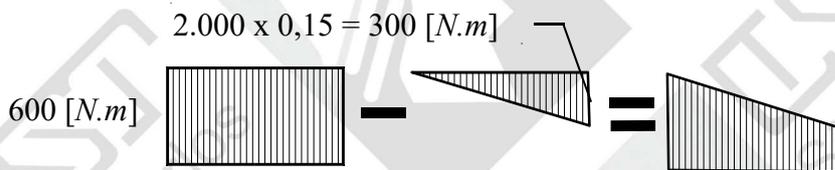
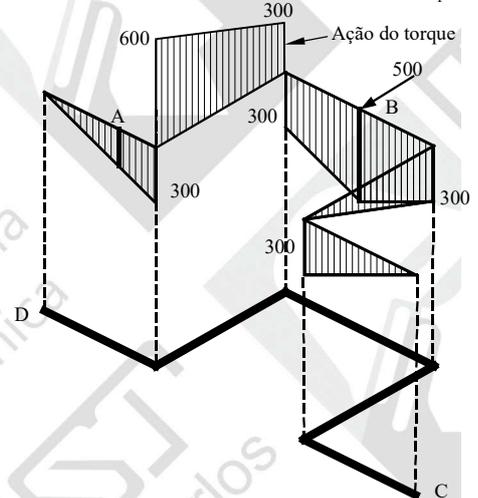


(Obs. O comprimento em x de 200 [mm] da manivela foi adotado). Os diagramas dos esforços solicitantes são os seguintes:

A figura à esquerda mostra o diagrama de força cortante. É importante notar que certas convenções usadas em casos simples como vigas, ficam ambíguas em estruturas 2D ou 3D. Para evitar confusão, é bom destacar na figura onde está o observador para, então, adotar o sentido como positivo quando o binário provocado pela cortante percorrer a secção no sentido horário. Em certos casos, a cortante pode ter 2 componentes.

Na figura à direita, outra situação interessante acontece no gráfico do momento de flexão. Tem-se neste caso o momento de torção (torque) ocasionando uma flexão do braço da manivela conforme observado na figura. Nesse trecho atua uma parcela constante de 600 [N.m], devida ao torque, acarretando tração na fibra superior. Este momento de flexão é adicionado algebricamente a outro, variável linearmente, que é devido à ação da reação em D, ocasionando tração na fibra de baixo.

Diagrama de Momento de Flexão M_f [N.m]



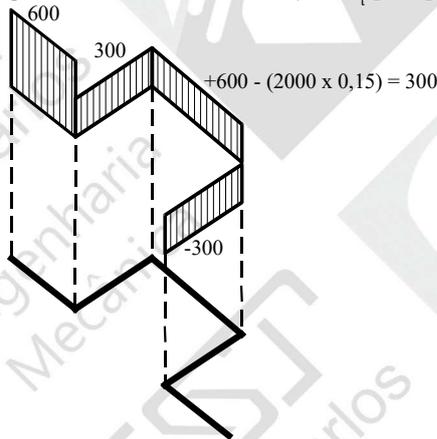
Note-se que, por convenção, desenha-se o gráfico do lado da tração (fibra tracionada).

Na região da manivela, onde está o ponto B, apenas a força de reação exerce influência. O gráfico parte de um valor $2.000 \times 0,15 = 300 [N.m]$ até atingir $2.000 \times 0,25 = 500 [N.m]$ no centro (ponto B).

Desde o ponto B até o ponto C, o diagrama de momento de flexão é simétrico ao trecho DB, com exceção da ação do torque.

No gráfico do momento de torção M_t , a convenção de sinal é a seguinte: “coloca-se um conjunto parafuso/porca hipotético de rosca direita coincidindo com o trecho em análise. Considere-se o M_t atuante e aquele que precisa ser aplicado à secção para equilibrá-lo. Se esta configuração de momentos aperta o parafuso então o sinal é tomado como positivo. Se os momentos desapertam o parafuso então o sinal é negativo”.

Diagrama de Momento de Torção $M_t [N.m]$

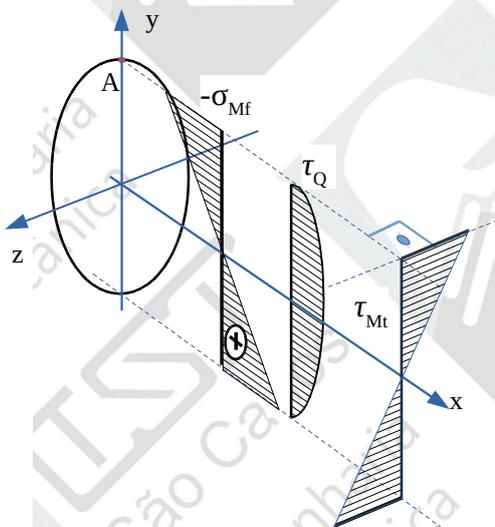


Na primeira parte da peça, a partir da esquerda, a reação D não torce a secção, tem-se apenas a ação do torque externo. Numa secção genérica neste trecho, quando se considera este torque e o M_t que o equilibra, configura-se um aperto do parafuso hipotético e, portanto, o M_t é positivo e seu valor é constante (braço da força é constante) e igual a $600 [N.m]$ ao longo desta parte. No segundo trecho da manivela tem-se apenas a torção devida à força D, ou seja, $2000 \times 0,15 = 300 [N.m]$. O torque externo não causa torção aqui, e o sinal continua positivo, usando-se a convenção dada.

No terceiro trecho (o qual contém o ponto B), tem-se uma combinação do torque externo de $600 [N.m]$ e no sentido inverso a torção ocasionada por D ($2000 \times 0,15 = 300 [N.m]$), resultando $300 [N.m]$ no sentido positivo de acordo com a convenção.

O penúltimo trecho apresenta uma peculiaridade. Caso se calcule o valor de M_t a partir da extremidade D, tem-se: $2.000 \times 0,35 - 4.000 \times 0,1 = +300 [N.m]$. Entretanto a convenção de sinal mostra que o sinal correto é negativo. O cálculo a partir do extremo C mostra mais claramente que o correto é mesmo $-300 [N.m]$. O último trecho tem $M_t = 0$.

a) Na figura abaixo são mostradas as tensões que atuam na secção transversal passando pelo ponto A.



$$\sigma_x = \sigma_{M_f} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{-200 [N.m]}{\frac{\pi \times 0,035^3}{32}} = -47,514 [MPa]$$

$$\tau_{M_t} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{T.r}{J_t} = \frac{T.r}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{600 [N.m] \times 0,0175 [m]}{\frac{\pi \times 0,035^4}{32} [m^4]} = 71,271 [MPa]$$

$$\tau_Q = 0 \text{ no ponto A.}$$

b) No caso deste exercício, não se tem tensão perpendicular ao plano do elemento em A. Isto caracteriza um estado plano de tensões. Portanto as tensões principais são dadas por:

$$\sigma_y = 0 \quad ; \quad \sigma = -\sigma_{Mf} \quad e \quad \tau = \tau_{Mt} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{I,II} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

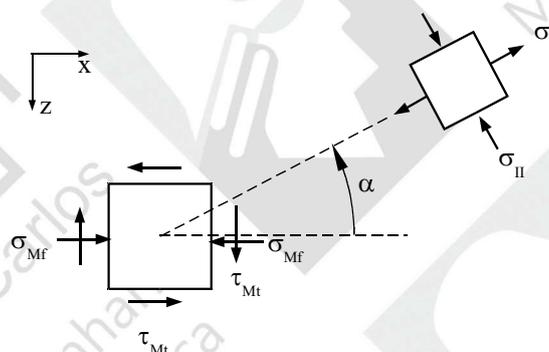
$$\sigma_{I,II} = \frac{-47,514}{2} \pm \sqrt{\frac{-47,514^2}{4} + 71,271^2}$$

$$\begin{cases} \sigma_I = 51,369 [MPa] \\ \sigma_{II} = -98,879 [MPa] \end{cases}$$

e o ângulo em que essas tensões atuam é dado por:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{-\sigma} = \frac{2 \times 71,271 [MPa]}{47,514 [MPa]} \Rightarrow \alpha = 35,782^\circ (\text{sentido antihorário})$$

c) O esboço do elemento posicionado nas direções principais pode ser visto na figura abaixo, juntamente com o elemento alinhado com os eixos.



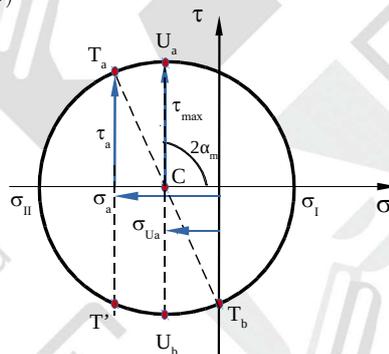
d) A máxima tensão de cisalhamento no círculo de Mohr encontra-se posicionada de tal forma que $2\alpha_m = 90^\circ$, conforme figura abaixo, ou seja, está a 45° dos eixos principais, ou a $(45^\circ - \alpha = 9,218^\circ)$ dos eixos coordenados. Seu valor é:

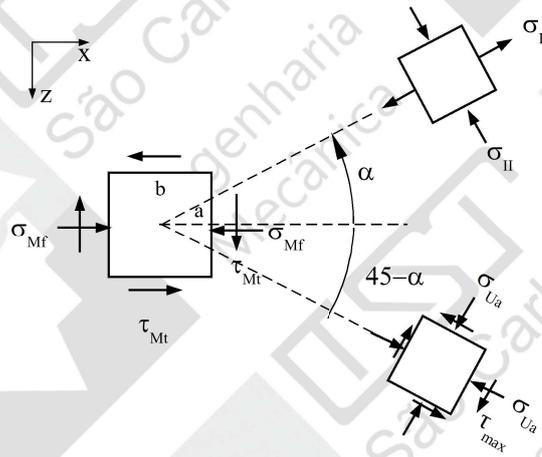
$$|\tau_{max}| = \frac{|\sigma_I| - |\sigma_{II}|}{2} = 75,124 [MPa]$$

No círculo de Mohr abaixo, a face *a* da posição de máxima tensão de cisalhamento está representada pelo ponto U_a de coordenadas $(\sigma_{U_a}, \tau_{max})$ e a face *b* (a 90° da face *a* no plano cartesiano e a 180° no plano de Mohr) pelo ponto U_b de coordenadas $(\sigma_{U_a}, -\tau_{max})$.

O valor numérico de σ_{U_a} pode ser obtido assim:

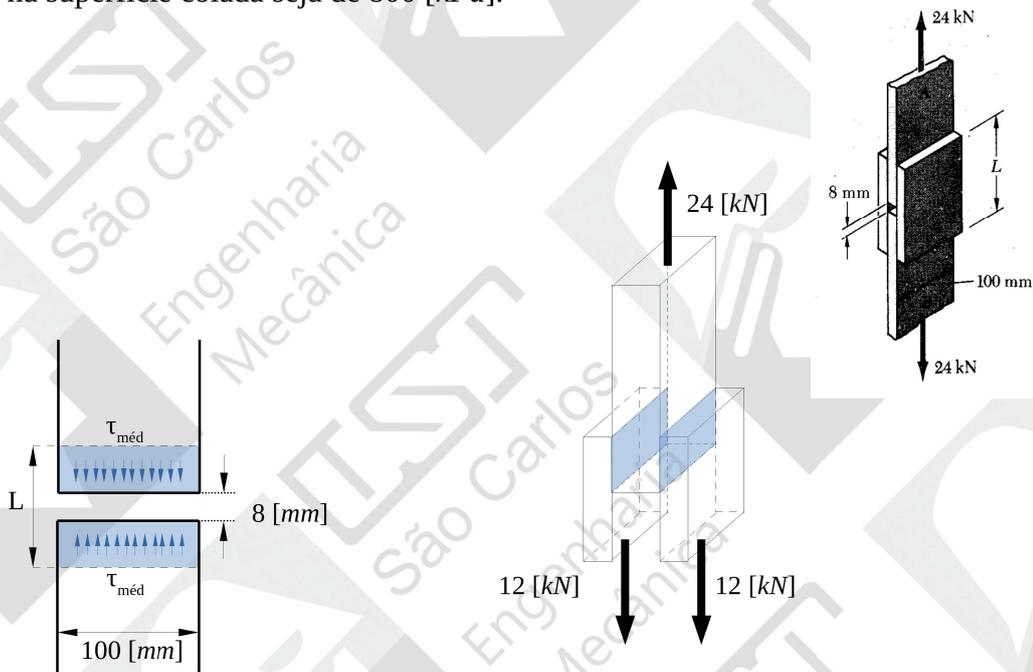
$$\begin{aligned} |\sigma_{U_a}| &= |\sigma_{centroC}| = R - |\sigma_I| = \tau_{max} - |\sigma_I| = 75,124 [MPa] - 51,369 [MPa] = \\ &= 23,755 [MPa] (\text{compressão}) \end{aligned}$$





g) **Exercício 10)** [1, pág19] As peças de madeira A e B são ligadas por sobrejuntas de madeira que são coladas nas superfícies de contato com as peças. Deixa-se uma folga de 8 [mm] entre as extremidades das peças A e B. Determine o valor do comprimento L para que a tensão média de cisalhamento na superfície colada seja de 800 [kPa].

Solução:



A tensão de cisalhamento (ou tangencial) média não deve ultrapassar 800 [kPa].

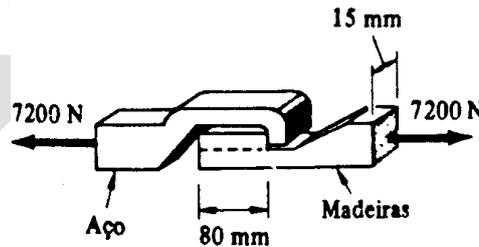
$$\tau_{med} = \frac{Q}{A}$$

Admite-se que o carregamento é simétrico e que portanto carregue igualmente as subáreas de colagem. A área onde atua a tensão cisalhante, de cada lado, é: $A = 0,100[m] \times \left(\frac{L - 0,008[m]}{2} \right)$

Portanto $\tau_{med} = \frac{24000[N]}{2 \times 0,100[m] \times \left(\frac{L-0,008}{2}\right)} = 80.000[Pa] \Rightarrow L = 0,308[m]$

Então é necessário deixar-se um comprimento $L = 308 [mm]$ para que a colagem esteja sujeita ao cisalhamento de $800 [kPa]$.

Exercício 11) [1, pág19] Ao se aplicar a força indicada, a peça de madeira rompeu-se por cisalhamento ao longo da superfície indicada pela linha tracejada. Determine a tensão média de cisalhamento na superfície de ruptura.

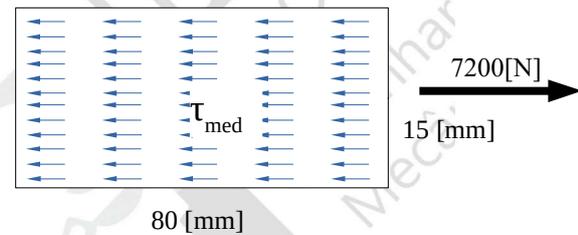


Solução:

A tensão média de cisalhamento é dada por: $\tau_{med} = \frac{Q}{A}$

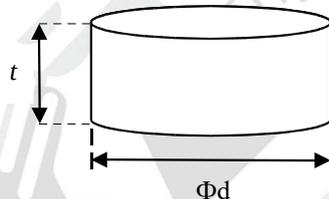
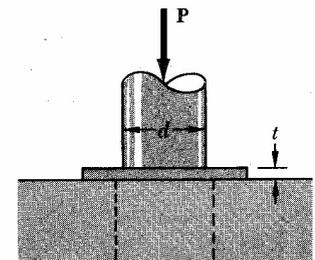
Tem-se, portanto todos os valores necessários para o cálculo:

$$\tau_{med} = \frac{7.200[N]}{0,080[m] \times 0,015[m]} = 6[MPa]$$



Exercício 12) [1, pág19] Sabendo-se que a tensão de ruptura ao cisalhamento de uma chapa de aço é $330 [MPa]$, determine:

- A força P necessária para produzir, por punção, um furo de $30 [mm]$ de diâmetro em uma chapa de $9 [mm]$ de espessura;
- O valor da correspondente tensão normal no punção.

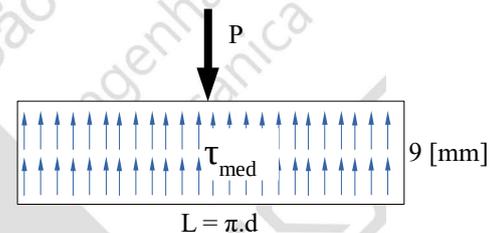


Solução:

Novamente $\tau_{med} = \frac{P}{A_s}$

- Força P necessária para romper a chapa por cisalhamento
A área onde atua a tensão de cisalhamento é:

$$A_s = \pi \cdot d \cdot t = \pi \times 0,030[m] \times 0,009[m] = 8,482 \times 10^{-4}[m^2]$$



A tensão cisalhante é dada por:

$$\tau_{med} = \frac{P}{A_s} \leq \tau_{ruptura} \Rightarrow P = \tau_{ruptura} \cdot A_s = 330 [MPa] \times 8,482 \times 10^{-4} [m^2] = 279906 [N]$$

b) A tensão normal no punção será:

$$\sigma = \frac{P}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{279906 [N]}{\frac{\pi \times 0,03^2}{4}} = 39,479 [MPa]$$

Exercício 13) Determine o momento de torção que pode ser aplicado a um eixo maciço de 80 [mm] de diâmetro sem exceder a tensão de cisalhamento admissível de 60 [MPa]. Resolva novamente adotando um eixo vazado de mesma massa e 80 [mm] de diâmetro interno.

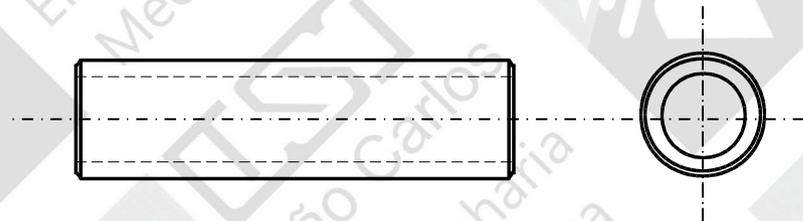
Solução:



O momento máximo é dado pela expressão abaixo:

$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{W_t} \Rightarrow M_{tmax} = \tau_{max} \cdot W_t = 60 \times 10^6 [Pa] \times \frac{\pi \times 0,08^3 [m^3]}{16} \Rightarrow M_{tmax} = 6,031 \times 10^3 [N.m]$$

Caso se adote agora um eixo de mesma massa e 80 [mm] de diâmetro interno, o diâmetro externo deverá ser tal que conserve o mesmo volume (a densidade é a mesma em ambos os casos):



$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) \Rightarrow d^2 = D^2 - d^2 \Rightarrow D = \sqrt{2} \cdot d = \sqrt{2} \times 80 [mm] = 113,4 [mm]$$

O novo módulo de resistência à torção será:

$$W_t = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 D} = \frac{\pi \times (0,11314^4 [m^4] - 0,08^4 [m^4])}{16 \times 0,11314 [m]} = 2,132 \times 10^{-4} [m^3]$$

e em decorrência o novo momento máximo suportado será:

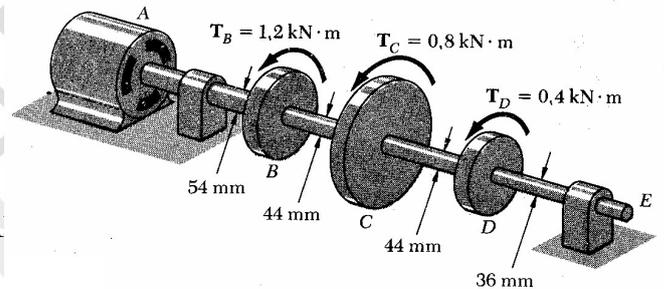
$$M_{tmax} = W_t \cdot \tau_{max} = 2,132 \times 10^{-4} \times 60 \times 10^6 [Pa] = 1,279 \times 10^4 [N.m]$$

Este valor é $\frac{1,279 \times 10^4 [N \cdot m]}{6,031 \times 10^3 [N \cdot m]} = 2,120$ vezes maior que o anterior. Se a matéria-prima for comprada por peso e a fabricação envolver apenas usinar o diâmetro externo e quebrar os cantos, ambos os eixos custarão igual mas o segundo suportará mais que o dobro da carga de torção.

Exercício 14) [1, pág127] Sob condições normais de funcionamento, o motor elétrico da figura produz o torque de 2,4 [kN.m]. Sabendo-se que todos os segmentos do eixo são maciços, determine a máxima tensão de cisalhamento:

- No segmento AB do eixo;
- No segmento BC do eixo.

Solução:



- A máxima tensão de cisalhamento no trecho A

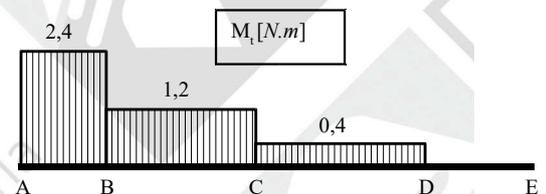
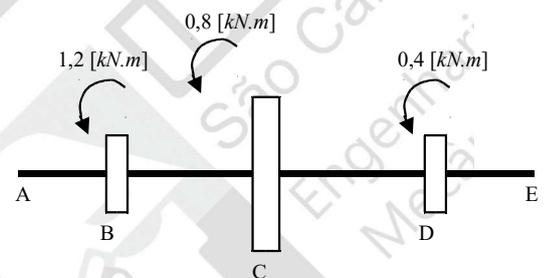
$$\tau_{AB} = \frac{M_{tAB}}{W_t} = \frac{2400 [N \cdot m]}{\frac{\pi \times (0,054^3 [m^3])}{16}} = 77,624 [MPa]$$

- No trecho BC, tem-se:

$$\tau_{BC} = \frac{M_{tBC}}{W_t} = \frac{1200 [N \cdot m]}{\frac{\pi \times (0,044^3 [m^3])}{16}} = 71,745 [MPa]$$

- No trecho CD tem-se:

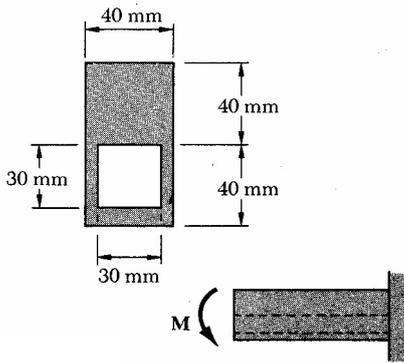
$$\tau_{CD} = \frac{M_{tCD}}{W_t} = \frac{400 [N \cdot m]}{\frac{\pi \times (0,044^3 [m^3])}{16}} = 23,915 [MPa]$$



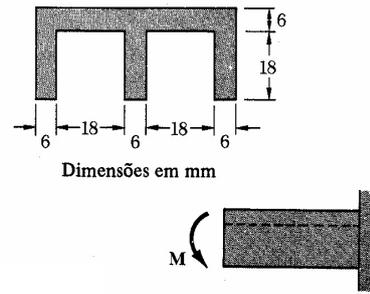
Portanto o trecho AB estará submetido à máxima tensão cisalhante.

Normalmente os elementos de máquinas que transmitem momentos de torção (engrenagens, correias, correntes, etc.) aplicam no eixo também forças tangenciais e/ou radiais. Neste caso, os momentos de flexão e as respectivas tensões adicionais atuantes no eixo tem que ser levados em conta.

Exercício 15) [1, pág195] Determine o valor do momento máximo de flexão M que pode ser aplicado às vigas de secção indicada, se a tensão admissível à tração é de 120 [MPa] e a tensão admissível à compressão é de 150 [MPa].



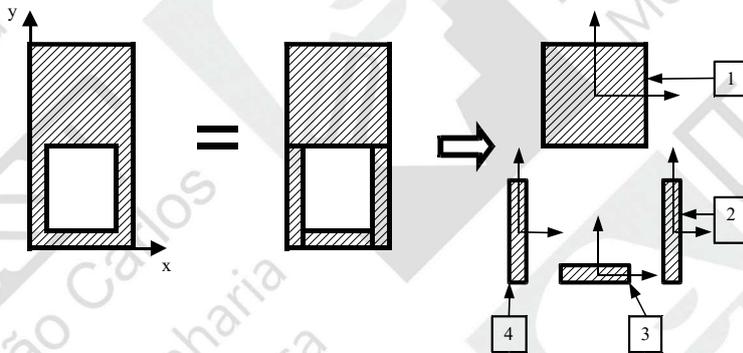
a)



b)

Solução:

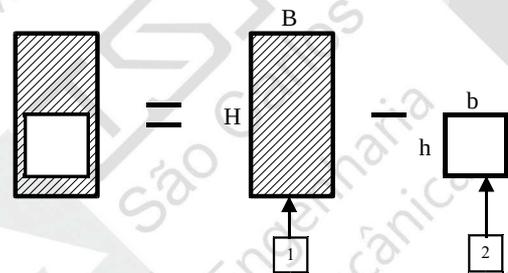
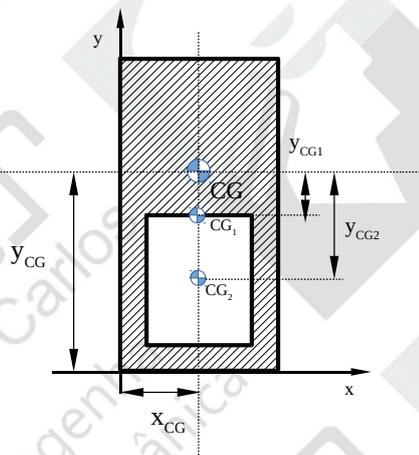
- a) Como não existe força normal, a linha neutra passa pelo CG da secção. Inicialmente se calcula o valor de suas coordenadas:
 b)



$$x_{CG} = 20 [mm] \quad (\text{por simetria})$$

$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^4 y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} =$$

$$= \frac{60 \times (40 \times 40) + 20 \times (5 \times 40) + 5 \times (30 \times 10) + 20 \times (5 \times 40) [mm^3]}{(40 \times 40) + (5 \times 40) + (10 \times 30) + (5 \times 40) [mm^2]} = 45,87 [mm]$$



No cálculo do momento de inércia de área de seções compostas, primeiro se decompõe a figura em subáreas parciais mais simples. Calcula-se o J de cada subárea em relação ao seu centro de gravidade e depois se usa o teorema dos eixos paralelos (Steiner) para obter J de cada seção em torno do CG global. Finalmente soma-se a contribuição de cada subárea. Neste exercício, parece ser mais eficiente calcular-se o J da figura cheia e retirar-se a contribuição da parte vazia (Figura

$$J_{Total} = J_1 - J_2$$

$$J_1 = \frac{B \cdot H^3}{12} + A_1 \cdot y_{CG1}^2 = \frac{0,040 \times 0,080^3}{12} [m^4] + (0,080 \times 0,040) \times (0,04587 - 0,040)^2 [m^4] =$$

$$= 18,170 \times 10^{-7} [m^4]$$

$$J_2 = \frac{b \cdot h^3}{12} + A_2 \cdot y_{CG2}^2 = \frac{0,030 \times 0,030^3}{12} [m^4] + (0,030 \times 0,030) \times (0,04587 - 0,025)^2 =$$

$$= 4,600 \times 10^{-7} [m^4]$$

$J_{Total} = 18,170 \times 10^{-7} [m^4] - 4,600 \times 10^{-7} [m^4] = 13,570 \times 10^{-7} [m^4] = 1,357 \times 10^{-6} [m^4]$
 acima) do que dividir-se a figura em 4 subáreas como feito para o cálculo das coordenadas do CG.

Cálculo do momento máximo:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_f}{W_f} \Rightarrow M_{f\acute{m}ax} = \sigma_{m\acute{a}x} \cdot W_f = \sigma_{m\acute{a}x} \cdot \frac{J}{y} = \sigma_{m\acute{a}x} [Pa] \times \frac{1,357 \times 10^{-6} [m^4]}{y [m]}$$

No ponto de máxima tração (fibra superior) tem-se:

$$y = 0,080 - 0,04587 = 0,03413 [m] \text{ e } \sigma_{m\acute{a}x \text{ tração}} = 120 [MPa],$$

$$\Rightarrow M_{f\acute{m}ax \text{ tração}} = 120 \times 10^6 [Pa] \times \frac{1,357 \times 10^{-6} [m^4]}{0,03413 [m]} = 4,771 \times 10^3 [N \cdot m]$$

No ponto de máxima compressão (fibra inferior) tem-se:

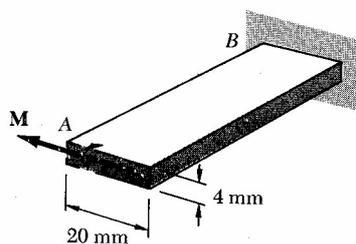
$$y = 0,04587 [m] \text{ e } \sigma_{m\acute{a}x \text{ comp}} = 150 [MPa]$$

$$\Rightarrow M_{f\acute{m}ax \text{ compressão}} = \frac{150 \times 10^6 [Pa] \times 1,357 \times 10^{-6} [m^4]}{0,04587 [m]} = 4,437 \times 10^3 [N \cdot m]$$

b) Este exercício segue exatamente o procedimento anterior, somente se mudando o cálculo do CG e do momento de área J .

Exercício 16)[1, pág195] Sabe-se que, para a haste AB, a máxima tensão admissível é de 170 [MPa]. Determine:

- O máximo momento de flexão M_f que pode ser aplicado à haste;
- O raio de curvatura da haste fletida por esse momento, sendo o módulo de elasticidade do material $E = 200 [GPa]$.



Solução:

a) O momento máximo é dado por : $M_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}} \cdot W_f$

e no presente caso, retângulo de largura b e altura h , o módulo de flexão é dado por:

$$W_f = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,020[m] \times 0,004^2[m^2]}{6} = 5,333 \times 10^{-8} [m^3]$$

e $\sigma_{\text{máx}} = 170 [MPa]$, então finalmente :

$$M_{\text{máx}} = 170 \times 10^6 [Pa] \times 5,333 \times 10^{-8} [m^3] = 9,066 [N \cdot m]$$

b) De acordo com a teoria da flexão: $\sigma = \frac{E \cdot y}{R}$

onde R é o raio de curvatura da linha neutra da flexão. Então, o momento acima ocasiona:

$\sigma_{\text{máx}} = 170 [MPa]$, e para $y = 0,002 [m]$ o raio de curvatura será:

$$R = \frac{E \cdot y}{\sigma_{\text{máx}}} = \frac{200 \times 10^9 [Pa] \times 0,002 [m]}{170 \times 10^6 [Pa]} = 2,352 [m]$$

