1.5 USO DA NOTAÇÃO COMPLEXA PARA EXCITAÇÃO SENOIDAL

A resolução direta de equação lineares com excitação senoidal não é difícil mas é em geral trabalhosa. Entretanto, o desenvolvimento completo pode ser simplificado, como veremos, mediante o uso da notação complexa, como é feito na Teoria de Circuitos.

Um caso simples que se presta bem como exemplo, é o de um circuito *RL* série excitado com uma tensão

$$v(t) = V_m \cos \omega t \tag{1.37}$$

no qual se deseja conhecer a corrente.

A equação diferencial a ser resolvida é

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t)\,. \tag{1.38}$$

Sabendo que

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \tag{1.39}$$

e admitindo que a corrente tenha uma solução do tipo

$$i(t) = Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t} \tag{1.40}$$

substituímos (*1.37*), (*1.39*) e (*1.40*) e, (*1.38*) e obtemos

$$j\omega L\left(Ae^{j\omega t} - Be^{-j\omega t}\right) + R\left(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}\right) = \frac{V_m}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right). \tag{1.41}$$

Identificando os coeficientes de $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$, obtemos

$$A(R + j\omega L) = V_m/2$$

e

$$B(R - j\omega L) = V_m/2\,. \tag{1.42}$$

A grandeza complexa que multiplica *A* pode ser escrita na forma

$$Z = R + j\omega L = |Z|\,e^{j\psi} \tag{1.43}$$

onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

e

$$\psi = \tan^{-1} \omega L/R\,. \tag{1.44}$$

Do mesmo modo,

$$R - j\omega L = |Z|\,e^{-j\psi}$$

Então

$$A = \frac{V_m}{2|Z|} e^{-j\psi}$$

e (*1.45*)

$$B = \frac{V_m}{2|Z|} e^{j\psi}.$$

Substituindo estes valores em (*1.40*) obtemos

$$i(t) = \frac{V_m}{|Z|} \left[\frac{e^{j(\omega t - \psi)} + e^{-j(\omega t - \psi)}}{2} \right] \qquad (1.46)$$

ou

$$i(t) = \frac{V_m}{|Z|} \cos(\omega t - \psi). \qquad (1.47)$$

O processo desenvolvido é relativamente extenso mas pode ser simplificado com as seguintes observações:

1. A e B são grandezas complexas conjugadas pois a resposta deve ser real; basta, portanto conhecer um deles para se ter o outro;
2. nas derivadas das expressões do tipo $Ce^{j\omega t}$ temos a substituição do operador $\partial/\partial t$ pelo multiplicador $j\omega$, *i.e.*,
$$\frac{\partial}{\partial t} Ce^{j\omega t} = j\omega Ce^{j\omega t};$$
3. nessas equações lineares, as exponenciais aparecem em todos os termos; podem, portanto, ser omitidas e subentendidas nos passos intermediários.

Com estas observações vamos operar somente com $V_m e^{j\omega t}$. A excitação verdadeira será

$$v(t) = \mathrm{Re}\left(V_m e^{j\omega t}\right)$$

onde Re(•) significa "*a parte real de*". Escrevendo V_m em (*1.38*) no lugar de $v(t)$, trocando $\partial/\partial t$ por $j\omega$ e omitindo $e^{j\omega t}$, obtemos

$$I_m (R + j\omega L) = V_m$$

de onde

$$I_m = \frac{V_m}{|Z|} e^{-j\psi} \qquad (1.48)$$

com Z e ψ definidos em (*1.44*).

Repomos, em seguida, o fator $e^{j\omega t}$ e tiramos a parte real da operação tendo, finalmente, o valor da corrente, *i.e.*,

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{Re}\left[\frac{V_m}{|Z|} e^{-j\psi} e^{j\omega t}\right] \\ &= \frac{V_m}{|Z|}\cos(\omega t - \psi)\,. \end{aligned} \qquad (1.49)$$

A grandeza representativa de I_m em (*1.48*) é a *amplitude complexa* da corrente, pois traz simultaneamente informação de amplitude e de fase.

É praxe distinguir os símbolos das amplitudes complexas colocando um ponto (ou um circunflexo) em cima do mesmo, a fim de explicitar esse caráter. Com esta convenção escrevemos (*1.48*) como

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{V}_m}{|Z|} e^{-j\psi} \qquad (1.50)$$

e escrevemos (*1.49*) como

$$i(t) = \mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] \qquad (1.51)$$

Muitos autores, entretanto, dispensam símbolos especiais; consideram que, somente o fato de termos multiplicadores $j\omega$ em vez de derivações é suficiente para percebermos implicitamente esse caráter.

Um modo de representação muito comum, que adotaremos a seguir, é aquele que utiliza os valores eficazes das grandezas, que relacionam-se às amplitudes pelo fator $\sqrt{2}$, ou seja,

$$i(t) = \mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\;\dot{I}\;e^{j\omega t}] \qquad (1.52)$$

e

$$v(t) = \mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\;\dot{V}\;e^{j\omega t}] \qquad (1.53)$$

onde $\dot{I} = \dot{I}_m/\sqrt{2}$ e $\dot{V} = \dot{V}_m/\sqrt{2}$ são chamados de **fasores** das respectivas grandezas e $|\,\dot{I}\,|$ e $|\,\dot{V}\,|$ são seus valores eficazes.

1.6 O USO DA NOTAÇÃO COMPLEXA NO CÁLCULO DE POTÊNCIA

Vimos na secção anterior a vantagem do uso da notação complexa nas equações lineares sob excitação permanente senoidal. Em relações não lineares, como no cálculo de potência, cuidados adicionais devem ser levados em conta.

Recorrendo novamente a um exemplo de circuitos, sejam a tensão e a corrente num determinado bipolo linear dadas por

$$v(t) = \sqrt{2}\,V\cos(\omega t + \phi_v)$$

e

$$i(t) = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t + \phi_i)\,. \qquad (1.54)$$

A potência instantânea recebida pelo bipolo é dada pelo produto da tensão e da corrente instantâneas, *i.e.*,

$$p(t) = v(t)i(t) = 2\,VI\cos(\omega t + \phi_v)\cos(\omega t + \phi_i)\,. \qquad (1.55)$$

Através da identidade trigonométrica

$$2\cos A\cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$$

a expressão (*1.55*) pode ser reescrita como

$$p(t) = VI\cos(\phi_v - \phi_i) + VI\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \qquad (1.56)$$

de onde obtemos a potência média sobre um ciclo

$$P_{méd} = VI\cos(\phi_v - \phi_i)\,. \qquad (1.57)$$

A potência instantânea dada por (*1.55*) é exatamente a mesma que

$$p(t) = \left\{\mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\;V\,e^{j(\omega t + \phi_v)}]\right\}\left\{\mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\;I\,e^{j(\omega t + \phi_i)}]\right\} \qquad (1.58)$$

ou explicitando os fasores

$$p(t) = \left\{\mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\;\dot{V}\,e^{j\omega t}]\right\}\left\{\mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\;\dot{I}\,e^{j\omega t}]\right\}. \qquad (1.59)$$

onde

$$\dot{V} = Ve^{j\phi_v}$$

e $\qquad (1.60)$

$$\dot{I} = Ie^{j\phi_i}\,.$$

Para manipularmos (*1.59*) lembremos que dado um número complexo A, temos

$$\mathrm{Re}\,A = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad (1.61)$$

onde o asterisco denota o conjugado do número. Assim,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}\,A)(\mathrm{Re}\,B) &= \frac{1}{4}(A + A^*)(B + B^*)\\ &= \frac{1}{4}(AB^* + AB) + \frac{1}{4}(A^*B + A^*B^*)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(AB^* + AB) + \frac{1}{2}(AB^* + AB)^*\right]\end{aligned}$$

Daí, fazendo novamente uso de (*1.61*), resulta

$$(\mathrm{Re}\,A)(\mathrm{Re}\,B) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(AB^* + AB) \qquad (1.62)$$

A identificação de (*1.59*) com (*1.62*) nos dá

$$p(t) = \mathrm{Re}\,[\dot{V}\;\dot{I}^* + \dot{V}\;\dot{I}\;e^{j2\omega t}] \qquad (1.63)$$

de onde o valor médio

$$P_{méd} = \mathrm{Re}\,[\dot{V}\;\dot{I}^*]\,. \qquad (1.64)$$

7. LINHAS DE TRANSMISSÃO EM REGIME PERMANENTE

Os conceitos de linhas de transmissão são aplicados a excitações em regime permanente senoidal com a introdução dos fasores. São abordados métodos numéricos e gráficos de solução dos problemas e, em particular, é introduzida a Carta de Smith como instrumento gráfico de solução dos mesmos.

7.1 INTRODUÇÃO

Suponha que uma linha de transmissão seja excitada por um gerador de frequência ω e que, depois de passada a fase transitória se estabeleça na linha uma tensão

$$v(t,z) = V_m(\omega,z)\cos(\omega t + \psi)\,. \tag{7.1}$$

A validade desta suposição só poderá ser confirmada se a expressão (*7.1*) satisfizer à equação de onda

$$\frac{\partial^2 v(t,z)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(t,z)}{\partial t^2} + (RC+LG)\frac{\partial v(t,z)}{\partial t} + RGv(t,z) \tag{7.2}$$

deduzida no capítulo anterior.

Isto pode ser feito diretamente, mas é formalmente mais fácil de ser feito se escrevermos (*7.1*) na forma

$$v(t,z) = \mathrm{Re}\,[V_m(\omega,z)\ e^{j\psi}e^{j\omega t}] \tag{7.3}$$

ou

$$v(t,z) = \mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\ \dot{V}(\omega,z)\ e^{j\omega t}] \tag{7.4}$$

onde Re(•) significa "*parte real de*" e

$$\dot{V}(\omega,z) = \frac{V_m(\omega,z)e^{j\psi}}{\sqrt{2}} \tag{7.5}$$

é o *fasor* da tensão expresso em volts eficazes. Por outro lado, chamamos o produto $V_m(\omega,z)\,e^{j\psi} = \sqrt{2}\,\dot{V}(\omega,z)$ de *amplitude complexa*.

Então, substituindo (*7.4*) em (*7.2*) resulta

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,\frac{\partial^2\dot{V}(\omega,z)}{\partial z^2}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,e^{j\omega t}(-\omega^2)LC\,\dot{V}(\omega,z)\right]+ \\ +\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,e^{j\omega t}j\omega(RC+LG)\,\dot{V}(\omega,z)\right]+\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,e^{j\omega t}RG\,\dot{V}(\omega,z)\right] \qquad (7.6)$$

porque os operadores Re, $\partial/\partial t$, $\partial^2/\partial t^2$ e $\partial^2/\partial z^2$ são lineares e podem ser permutados.

Eliminando o operador Re, em face do teorema da Sec. 1.7, e depois dividindo (*7.6*) por $\sqrt{2}\,e^{j\omega t}$ (que nunca se anula), obtemos

$$\frac{\partial^2\dot{V}(\omega,z)}{\partial z^2}=(-\omega^2)LC\,\dot{V}(\omega,z)+j\omega(RC+LG)\,\dot{V}(\omega,z)+RG\,\dot{V}(\omega,z)$$

ou

$$\frac{\partial^2\dot{V}(\omega,z)}{\partial z^2}=(R+j\omega L)(G+j\omega C)\,\dot{V}(\omega,z) \qquad (7.7)$$

ou ainda

$$\frac{\partial^2\dot{V}(\omega,z)}{\partial z^2}=\gamma^2(\omega)\,\dot{V}(\omega,z) \qquad (7.8)$$

onde

$$\gamma(\omega)=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}\,. \qquad (7.9)$$

Observamos, então, que as soluções de (*7.7*) são as mesmas de (***6.8***) do capítulo anterior, com a substituição de s por $j\omega$, ou seja,

$$\dot{V}_+(\omega,z)=\dot{V}_+(\omega,0)\,e^{-\gamma z} \qquad \text{e} \qquad \dot{V}_-(\omega,z)=\dot{V}_-(\omega,0)\,e^{\gamma z} \qquad (7.10)$$

O procedimento formal, em seguida, é análogo em regime permanente e em regime transitório, bastando substituir s por $j\omega$ em todas as fórmulas transformadas do capítulo anterior. No entanto, é *importante* observar que os significados de $V(s,z)$ e de $\dot{V}(\omega,z)$ são *diferentes* nas duas soluções.

Em regime transitório, $V(s,z)$ representa a *transformada de Laplace* da tensão $v(t,z)$ e, portanto, a solução no domínio do tempo é dada por

$$v(t,z)=\pounds^{-1}[V(s,z)]\,.$$

Em regime permanente, $\dot{V}(\omega,z)$ é o fasor da tensão $v(t,z)$ e, portanto, a solução no domínio do tempo é dada por

$$v(t,z)=\mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\,\dot{V}(\omega,z)\,e^{j\omega t}]\,.$$

Em resumo, concluimos que as soluções no domínio de frequência são formalmente as mesmas, tanto em regime transitório como em regime permanente, mas as soluções no domínio do tempo são obtidas das primeiras por operações diferentes em cada um dos casos.

7.2 SOLUÇÕES EM REGIME PERMANENTE

Tudo aquilo que concluímos para a equação da tensão (em relação a substituir s por $j\omega$ nas expressões transformadas segundo Laplace) vale, então, também para as correntes, impedâncias, coeficientes de reflexão, etc., como no capítulo anterior.

As fórmulas apresentadas a seguir, para o regime permanente senoidal, provêm daquelas equivalentes do capítulo anterior, com as devidas adaptações ($s = j\omega$). Nestas, por concisão, tornamos a frequência ω implícita nos fasores e nas funções de rede (como já fizemos com as transformadas de Laplace tornando, algumas vezes, s ímplicito).

Desta forma, temos as soluções completas para tensões ao longo da linha

$$\dot{V}(z) = \dot{V}_+(z) + \dot{V}_-(z) \tag{7.11}$$

ou

$$\dot{V}(z) = \dot{V}_+(0)\, e^{-\gamma z} + \dot{V}_-(0)\, e^{\gamma z} \tag{7.12}$$

e para as correntes

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_+(0)\, e^{-\gamma z} + \dot{I}_-(0)\, e^{\gamma z} \tag{7.13}$$

ou

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0}\left[\dot{V}_+(z) - \dot{V}_-(z)\right]. \tag{7.14}$$

ou ainda

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0}\left[\dot{V}_+(0)\, e^{-\gamma z} - \dot{V}_-(0)\, e^{\gamma z}\right], \tag{7.15}$$

com

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{7.16}$$

sendo

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{7.17}$$

onde

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG)} \tag{7.18}$$

e

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG)} \tag{7.19}$$

são obtidos por desenvolvimento de (*7.9*).

Em linhas com perdas pequenas, *i.e.*, $R << \omega L$ e $G << \omega C$, podemos aproximar

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[G\sqrt{\frac{L}{C}} + R\sqrt{\frac{C}{L}}\right] \tag{7.20}$$

e

$$\beta = \omega\sqrt{LC}\left[1 + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 + \cdots\right] \tag{7.21}$$

Além dessas, temos ainda

$$\rho(z) = \frac{\dot{V}_-(z)}{\dot{V}_+(z)} = \frac{\dot{V}_-(0)}{\dot{V}_+(0)}\, e^{2\gamma z}, \tag{7.22}$$

$$Z(z) = Z_0\, \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}, \tag{7.23}$$

$$\rho(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0} \tag{7.24}$$

e outras mais que podem ser adaptadas pela simples substituição de s por $j\omega$.

7.3 VELOCIDADE DE FASE

Considerando uma onda que se propaga no sentido positivo de z, na forma de (*7.10*), com γ dado por (*7.17*), podemos explicitar a função de tensão no domínio do tempo ao longo da linha pelo emprego de (*7.4*), obtendo

$$v(t,z) = \mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\,\dot{V}_+(0)\, e^{-(\alpha + j\beta)z} e^{j\omega t}]$$

ou

$$v(t,z) = \sqrt{2}\,\dot{V}_+(0)\, e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\,. \tag{7.25}$$

É evidente que para o observador que acompanha a onda com velocidade

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \tag{7.26}$$

o argumento (ou fase) do cosseno mantém-se inalterado.

Por esta razão v_f é chamada de *velocidade de fase.*

7.4 LINHAS SEM PERDAS; COMPRIMENTO DE ONDA

No caso de linhas sem perdas

$$\alpha = 0 \tag{7.27}$$

e

$$\beta = \omega\sqrt{LC}\,. \tag{7.28}$$

Assim, a substituição de (*7.28*) em (*7.26*) nos mostra que, numa linha sem perdas, a velocidade de propagação de fase da onda independe da frequência e é dada por $v_f = 1/\sqrt{LC}$, como já vimos na Sec. 5.4.

Nas linhas sem perdas, com $\gamma = j\beta$, podemos adaptar a expressão (*6.50*), do capítulo anterior, escrevendo

$$Z(z) = Z_0 \left[\frac{Z(z_1) - jZ_0 \tan \beta(z - z_1)}{Z_0 - jZ(z_1) \tan \beta(z - z_1)} \right] \tag{7.29}$$

onde a tangente hiperbólica do arco imaginário foi substituída pela tangente trigonométrica do arco real multiplicada pela unidade imaginária j.

Voltando novamente à expressão (*7.25*), com $\alpha = 0$, observamos imediatamente que a substituição de βz por $(\beta z \pm 2\pi)$ dá origem aos mesmos valores de $v(t,z)$. A grandeza λ, definida tal que

$$\beta\lambda = 2\pi \tag{7.30}$$

tem dimensão de comprimento e é chamada de *comprimento de onda* porque, num dado instante de tempo, dois pontos distanciados de λ na direção de propagação têm o mesmo valor da tensão, conforme ilustra a Figura 7.1.

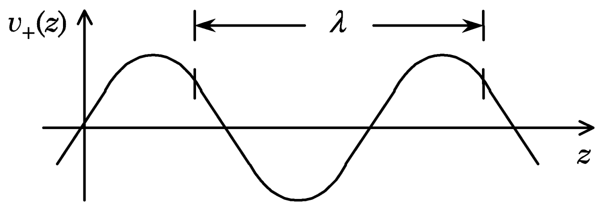

Figura 7.1 Definição de comprimento de onda

Em vista das expressões (*7.27*) e (*7.30*) temos

$$\lambda = \frac{2\pi v_f}{\omega} \tag{7.31}$$

ou

$$\lambda = \frac{v_f}{f} \tag{7.32}$$

onde $f = \omega/(2\pi)$ é a frequência de excitação em hertz (símbolo Hz).