

Aula 3: Sistemas e bases de vizinhanças, Bases de topologia

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia

Estes slides tem interseção com as notas de aulas dos professores

- ▶ Jorge Mujica (foi professor da IMECC-UNICAMP)
- ▶ Leandro Aurichi (professor do ICMC-USP)

Definição 1 (Reescrita)

Seja X um espaço topológico não vazio e seja $x \in X$. Diremos que um conjunto $U \subset X$ é uma vizinhança de x se $x \in \overset{\circ}{U}$. $\mathcal{U}_x$ denota o conjunto de todas as vizinhanças de x .

Proposição 2

Seja X um espaço topológico não vazio. Então os conjuntos $\mathcal{U}_x$ tem as seguintes propriedades:

- (a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$.
- (b) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
- (c) Dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x$, $V \subset U$, tal que $U \in \mathcal{U}_y$ para cada $y \in V$.
- (d) Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $V \in \mathcal{U}_x$.
- (e) Um conjunto $U \subset X$ é aberto se, e só se, $U \in \mathcal{U}_x$ para cada $x \in U$.

Demonstração. (a) Se $U \in \mathcal{U}_x$, então $x \in \overset{\circ}{U} \subset U$.

(b) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $x \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} = (\overset{\circ}{U \cap V})$. Logo $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

(c) Dado $U \in \mathcal{U}_x$, seja $V = \overset{\circ}{U}$. Se $y \in V = \overset{\circ}{U}$, então $U \in \mathcal{U}_y$.

(d) Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $x \in \overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{V}$. Logo $V \in \mathcal{U}_x$.

(e) Se U é aberto, então $U = \overset{\circ}{U}$. Segue que $U \in \mathcal{U}_x$ para cada $x \in U$. Reciprocamente suponhamos que $U \in \mathcal{U}_x$ para cada $x \in U$. Segue que $U = \overset{\circ}{U}$. Logo U é aberto.

Reciprocamente temos:

Proposição 3

Seja X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$ seja $\mathcal{U}_x$ uma família não vazia de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

- (a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$.
- (b) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
- (c) Dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x, V \subset U$, tal que $U \in \mathcal{U}_y$ para cada $y \in V$.
- (d) Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $V \in \mathcal{U}_x$.

Seja

$$\tau = \{U \subset X : U \in \mathcal{U}_x \text{ para cada } x \in U\}.$$

Então τ é uma topologia em X , e $\mathcal{U}_x$ é o sistema de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $x \in X$.

Demonstração. Primeiro provaremos que τ é uma topologia em X . É claro que $\emptyset \in \tau$. Para provar que $X \in \tau$, seja $x \in X$, e seja $U \in \mathcal{U}_x$. Como $U \subset X$, segue de (d) que $X \in \mathcal{U}_x$.

Logo $X \in \tau$.

Seja $U_i \in \tau$ para cada $i \in I$, e seja $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Então $x \in U_i$ para algum $i \in I$. Como $U_i \in \tau$, temos que $U_i \in \mathcal{U}_x$. Como $U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, segue de (d) que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}_x$. Logo $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Sejam $U, V \in \tau$, e seja $x \in U \cap V$. Então $U, V \in \mathcal{U}_x$, e segue de (b) que $U \cap V \in \mathcal{U}_x$. Logo $U \cap V \in \tau$.

A seguir provaremos que **cada vizinhança de x pertence a $\mathcal{U}_x$.** Seja U uma vizinhança de x . Então $x \in \overset{\circ}{U}$. Como $\overset{\circ}{U} \in \tau$, segue que $\overset{\circ}{U} \in \mathcal{U}_x$. Como $\overset{\circ}{U} \subset U$, segue de (d) que $U \in \mathcal{U}_x$.

Finalmente provaremos que cada **$U \in \mathcal{U}_x$ é uma vizinhança de x .** Seja $U \in \mathcal{U}_x$, e seja $V = \{y \in U : U \in \mathcal{U}_y\}$. Segue de (a) que $x \in U$, e como $U \in \mathcal{U}_x$ vemos que $x \in V$. A seguir veremos que $V \in \tau$. Dado $y \in V$, temos que $U \in \mathcal{U}_y$. Por (c) existe $W \in \mathcal{U}_y$, $W \subset U$, tal que $U \in \mathcal{U}_z$ para todo $z \in W$. Segue então de (a) que $W \subset V$. Segue de (d) que $V \in \mathcal{U}_y$. Logo $V \in \tau$. Como $x \in V$ e $V \in \tau$, segue que $x \in \overset{\circ}{V}$. Logo U é uma vizinhança de x .

Definição 4

Seja X um espaço topológico não vazio, e seja $x \in X$. Diremos que uma família $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ é uma base de vizinhanças de x se cada $U \in \mathcal{U}_x$ contém algum $V \in \mathcal{B}_x$.

Exemplo 5

- (a) Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{U}_x : U \text{ é aberto}\}$. Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x .
- (b) Sejam X um espaço métrico, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x = \{B(x; r) : r > 0\}$. Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x .
- (c) Sejam X um espaço métrico, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x = \{B[x; r] : r > 0\}$. Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x .

Exemplo 6

Considere X com a topologia discreta e $x \in X$. $\mathcal{B}_1 = \{\{x\}\}$ é uma base de vizinhanças de x , bem como $\mathcal{B}_2 = \{A \subset X : x \in A\}$.

Proposição 7

Sejam X um espaço topológico não vazio e $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x , para cada $x \in X$. Então:

- (a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x$.*
- (b) Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.*
- (c) Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subset U$, tal que para cada $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $W \subset U$.*
- (d) Um conjunto $U \subset X$ é aberto se, e só se, para cada $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.*

Demonstração. As afirmações (a), (b), (c) e (d) seguem diretamente das afirmações (a), (b), (c) e (e) na Proposição 2.

Reciprocamente temos:

Proposição 8

Seja X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$ seja $\mathcal{B}_x$ uma família não vazia de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

- (a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x$.
- (b) Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.
- (c) Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subset U$, tal que para cada $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ t.q. $W \subset U$.

Seja

$$\tau = \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } V \subset U\}.$$

Então τ é uma topologia em X e $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $x \in X$.

Demonstração. Para cada $x \in X$ seja

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X : U \supset V \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}$$

É claro que as famílias $\mathcal{U}_x$ verificam as propriedades (a), (b), (c) e (d) da Proposição 3, e que

$$\tau = \{U \subset X : U \in \mathcal{U}_x \text{ para cada } x \in U\}.$$

Pela Proposição 3, τ é uma topologia em X e $\mathcal{U}_x$ é o sistema de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $x \in X$. Segue que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $x \in X$.

A proposição seguinte é muito útil. Ela caracteriza abertos, fechados, aderência de um conjunto e interior de um conjunto em termos de bases de vizinhanças.

Proposição 9

Seja X um espaço topológico não vazio, seja $A \subset X$, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x , para cada $x \in X$. Então:

- (a) A é aberto se, e só se, para cada $x \in A$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset A$.
- (b) A é fechado se, e só se, para cada $x \notin A$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$.
- (c) $\bar{A} = \{x \in X : V \cap A \neq \emptyset \text{ para cada } V \in \mathcal{B}_x\}$.
- (d) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : V \subset A \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}$.

Demonstração. Já vimos (a) na Proposição 7(d).

(b) é consequência imediata de (a).

(c) Lembremos que

$$\bar{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ fechado}, F \supset A\}.$$

Se $x \notin \bar{A}$, então por (b) (aplicado a um dos F acima) existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$ ($(V \cap A) \subset (V \cap F) = \emptyset$). Reciprocamente suponhamos que exista $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Então $x \in \overset{\circ}{V}$ e $A \subset X \setminus V \subset X \setminus \overset{\circ}{V}$. Como $X \setminus \overset{\circ}{V}$ é fechado, segue que $\bar{A} \subset X \setminus \overset{\circ}{V}$. Logo $x \notin \bar{A}$.

(d) Pela Proposição 14 da Aula 2, $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{(X \setminus A)}$. Se B denota o conjunto da direita em (d), então usando (c) segue que

$$\begin{aligned} x \notin \overset{\circ}{A} &\Leftrightarrow x \in \overline{(X \setminus A)} \Leftrightarrow V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ para cada } V \in \mathcal{B}_x \\ &\Leftrightarrow V \not\subset A \text{ para cada } V \in \mathcal{B}_x \Leftrightarrow x \notin B. \end{aligned}$$

Definição 10

Seja X um espaço topológico. Diremos que X satisfaz o

primeiro axioma de enumerabilidade se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ que é enumerável.

Exemplo 11

Cada espaço métrico satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

$$\mathcal{B}_x = \{B(x; 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Exercícios - Bases de Vizinhanças

1. Seja X um espaço topológico, seja $A \subset X$, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x para cada $x \in X$. Prove que $\partial A = \{x \in X : V \cap A \neq \emptyset \text{ e } V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ para cada } V \in \mathcal{B}_x\}$.
2. Dados $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ e $r > 0$, seja $U(f, r) = \{g \in C([a, b]; \mathbb{R}) : |g(x) - f(x)| < r \text{ para todo } x \in [a, b]\}$. Prove que os conjuntos $U(f, r)$, com $r > 0$ formam uma base de vizinhanças de f no espaço métrico $C([a, b]; \mathbb{R})$ com a métrica uniforme.
3. Dados $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$, $A \subset [a, b]$, A finito e $r > 0$, seja

$$V(f, A, r) = \{g \in C([a, b]; \mathbb{R}) : |g(x) - f(x)| < r \text{ para todo } x \in A\}.$$

Prove que os conjuntos $V(f, A, r)$, com $A \subset [a, b]$, A finito e $r > 0$, formam uma base de vizinhanças de f para uma certa topologia em $C([a, b]; \mathbb{R})$. Esta topologia é mais fraca que a topologia do exercício anterior.

4. Seja X um espaço topológico e seja $A \subset X$. Diremos que um ponto $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de A se dado $U \in \mathcal{U}_x$ existe $a \in U \cap A$, com $a \neq x$. A' denota o conjunto dos pontos de acumulação de A . Prove que $\bar{A} = A \cup A'$.

5. Mostre que a reta de Sorgenfrey satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.
6. Seja (X, τ) espaço topológico. Sejam $x \in X$ e V aberto tal que $x \in V$. Mostre que $\{A \in \tau : x \in A \subset V\}$ é base de vizinhanças de x .
7. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$, $\mathcal{V}$ uma base de vizinhanças de x e $W \subset X$ uma vizinhança de x . Mostre que $\{V \cap W : V \in \mathcal{V}\}$ é uma base de vizinhanças de x .
8. Dê exemplo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que os seguintes conjuntos sejam todos diferentes entre si:

$$\overset{\circ}{A}, A, \overset{\circ}{\bar{A}}, \overset{\circ}{\bar{\bar{A}}}, \bar{A}, \bar{\bar{A}}, \overset{\circ}{\bar{\bar{A}}}, \overset{\circ}{\bar{\bar{\bar{A}}}}.$$

Uma base (para uma topologia) nada mais é que uma subfamília de abertos que é suficiente para recuperar todos os abertos (da topologia) por meio de uniões.

Definição 12

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma **base para (X, τ)** se para todo aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de elementos da base tal que $A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Uma importante caracterização para bases é o seguinte resultado:

Proposição 13

Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de τ é uma base para (X, τ) se, e somente se, para todo aberto não vazio $A \in \tau$ e todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subset A$.

Demonstração. $\Leftarrow$ Suponha que $\mathcal{B}$ seja uma família como no enunciado e seja $A \in \tau$. Para cada elemento $x \in A$, existe um conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Segue, então, que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$.

$\Rightarrow$ Reciprocamente, sejam $x \in A \in \tau$. Como podemos escrever $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$, com $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, tomamos $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$. Além disso, temos que $B \subset A$.

Exemplo 14

$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ e $A \in \tau$. Pela definição de τ , existe $\varepsilon > 0$ tal que tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Note que existem $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon.$$

Logo, $x \in B = (a, b) \subset A$.

Exemplo 15

Seja (X, d) um espaço métrico qualquer. Então, $\mathcal{B} = \{B(x; 1/n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para (X, d) .

Exemplo 16

Seja X um conjunto qualquer, com a topologia discreta τ sobre X . Então

$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base para (X, τ) e qualquer outra base $\mathcal{B}'$ é tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

Exemplo 17

A família $\mathcal{B} = \{[x, x + 1/n) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para a reta de Sorgenfrey.

O próximo resultado mostra como bases do espaço original se relacionam com as de um subespaço.

Proposição 18

Se $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ) , então $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $Y \subset X$ com a topologia de subespaço.

Demonstração. Sejam $A' \in \tau_Y$ e $x \in A'$. Pela definição de topologia de subespaço, existe $A \in \tau$ tal que $A' = A \cap Y$ e, assim, $x \in A$. Logo, pelo fato de $\mathcal{B}$ ser base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Logo, $x \in B \cap Y \subset A \cap Y$ e, portanto, $\mathcal{B}'$ é uma base para (Y, τ_Y) .

Definição 19

Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que (X, τ) satisfaz o

segundo axioma de enumerabilidade se existe uma base $\mathcal{B}$ para τ que é enumerável.

Exemplo 20

$\mathbb{R}$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade pois os intervalos (a, b) , com $a < b$ racionais, formam uma base para os abertos de $\mathbb{R}$.

Exemplo 21

A reta de Sorgenfrey não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

De fato, seja $\mathcal{B}$ uma base para X . Para cada $x \in X$, seja $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x+1)$. Assim, a função $f : X \rightarrow \mathcal{B}$ dada por $f(x) = B_x$ é injetora - basta notar que, dados $x < y$, $f(y) = B_y \subset [y, y+1)$ e, portanto, $x \notin f(y)$. Como $x \in f(x)$, temos $f(x) \neq f(y)$. Assim, a cardinalidade de $\mathcal{B}$ é pelo menos a da reta real e, portanto, não enumerável.

Exercícios - Bases de topologia

1. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B}$ base para (X, τ) . Mostre que τ é a menor topologia que contém $\mathcal{B}$. Isto é, mostre que $\tau = \bigcap_{\sigma \in T} \sigma$ onde $T = \{\sigma : \sigma \text{ é uma topologia para } X \text{ tal que } \mathcal{B} \subset \sigma\}$.
2. Dado um conjunto X e uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X , chamamos de topologia gerada por $\mathcal{B}$ o conjunto $[\mathcal{B}] = \bigcap_{\tau \in T} \tau$, onde $T = \{\tau \subset \mathcal{P}(X) : \tau \text{ é topologia sobre } X \text{ e } \mathcal{B} \subset \tau\}$.
 - (a) Mostre que T definido acima é não vazio (e, portanto, podemos tomar a intersecção).
 - (b) Mostre que $[\mathcal{B}]$ é uma topologia sobre X .
3. Além das condições do exercício anterior, suponha que $\mathcal{B}$ satisfaz:
 - (i) $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
 - (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}, \forall x \in A \cap B, \exists C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

Mostre que:

- (a) $\tau = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ é uma topologia sobre X .
- (b) $[\mathcal{B}] = \tau$.
- (c) $\mathcal{B}$ é uma base para τ (e, portanto, para $[\mathcal{B}]$).

4. Prove que o segundo axioma de enumerabilidade implica o primeiro.
5. Prove que os intervalos (a, ∞) , com $a \in \mathbb{R}$, formam uma base para uma topologia τ_1 em $\mathbb{R}$, mais fraca que a topologia usual. Prove que $(\mathbb{R}, \tau_1)$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. (perceba a sutil diferença com a reta de Sorgenfrey)