SEL0301 – Circuitos Elétricos I

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

segunda-feira, 18 de maio de 2020

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

CAPÍTULO 4
POTÊNCIA EM REGIME DE CORRENTE ALTERNADA

4.1. Introdução

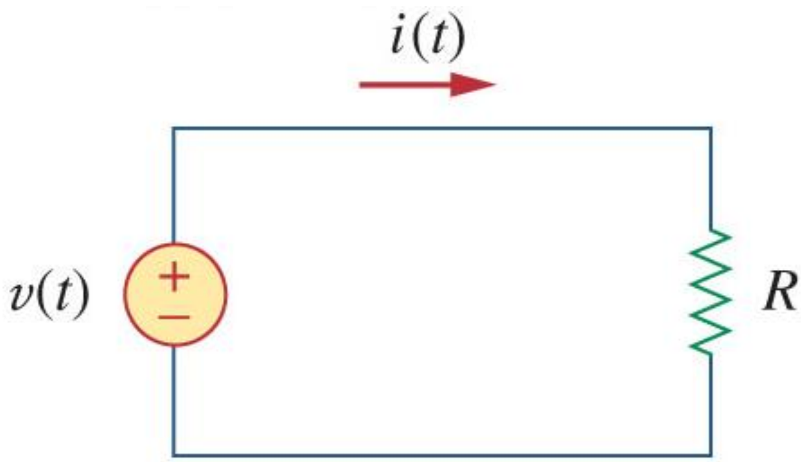
- Em regime de corrente alternada tem-se tensões e correntes não nulas em todos os elementos elétricos.
- Havendo essas condições pode-se associar a cada elemento uma potência elétrica.
- Contudo, a natureza dos elementos é distinta e em regime de corrente alternada isso se evidencia.
- Assim, em regime de corrente alternada o conceito de potência elétrica deve ser revisitada.

4.2. Valor Eficaz

- Antes de se desenvolver os conceitos referentes à potência elétrica em regime de corrente alternada é necessário desenvolver o conceito de valor eficaz.
- O valor eficaz é o valor equivalente em corrente contínua capaz de fazer com que em uma resistência se tenha a mesma potência sendo dissipada do que uma forma de onda alternada qualquer (inclusive as não-senoidais)

4.2. Valor Eficaz

- Assim, será considerado o seguinte circuito:



4.2. Valor Eficaz

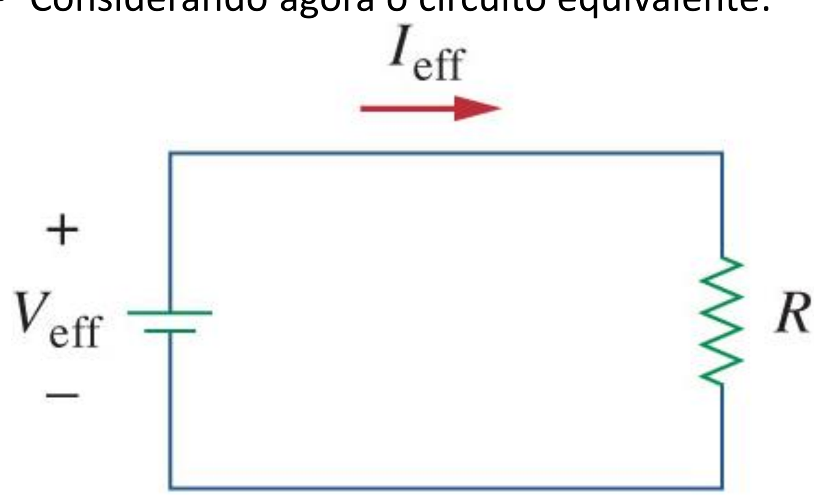
- Dada a tensão $v(t)$ a corrente que circula pelo resistor será dada por:
  - $i(t) = \frac{v(t)}{R}$
- Assim, a potência instantânea, a qual é definida por $p(t) = v(t)i(t)$, será dada por:
  - $p(t) = v(t)\frac{v(t)}{R}$
  - $p(t) = \frac{v^2(t)}{R}$

4.2. Valor Eficaz

- Considerando que a forma de onda de tensão $v(t)$ seja T a energia dissipada pela resistência ao longo de um período será:
  - $E = \int_0^T p(t)dt$
  - $E = \int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt$
  - $E = \frac{1}{R} \int_0^T v^2(t)dt$

4.2. Valor Eficaz

- Considerando agora o circuito equivalente:



4.2. Valor Eficaz

- Dada a tensão V_{eff} a corrente que circula pelo resistor será dada por:
  - $I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{R}$
- Assim, a potência instantânea será dada por:
  - $p(t) = V_{\text{eff}}\frac{V_{\text{eff}}}{R}$
  - $p(t) = \frac{{V_{\text{eff}}}^2}{R}$

4.2. Valor Eficaz

- A energia dissipada pela resistência ao longo de um intervalo de tempo T, para que haja equivalência de energia com o caso anterior, será:
  - $E = \int_0^T p(t)dt$
  - $E = \int_0^T \frac{{V_{\text{eff}}}^2}{R}dt$
  - $E = \frac{1}{R}\int_0^T {V_{\text{eff}}}^2 dt$
  - $E = \frac{{V_{\text{eff}}}^2}{R}(T - 0)$
  - $E = \frac{{V_{\text{eff}}}^2}{R}T$

4.2. Valor Eficaz

- O objetivo é determinar V_{eff} de forma que as energias calculadas sejam iguais.
- Assim, igualando as energias, tem-se:
  - $\frac{{V_{\text{eff}}}^2}{R} T = \frac{1}{R} \int_0^T v^2(t)dt$
  - $\boxed{V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt}}$

Expressão para o cálculo de valor eficaz para formas de onda alternadas, tensão e corrente, com periodicidade T.

4.2. Valor Eficaz

- Considerando o caso particular de uma forma de onda senoidal dada por:
  - $v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta)$
- O período dessa forma de onda é dada por:
  - $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, portanto: $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- O valor eficaz pode ser calculado da seguinte forma:
  - $V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt}$
  - $V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(V_p \cos(\omega t + \theta)\right)^2 dt}$
  - $V_{\text{eff}} = V_p \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\cos(\omega t + \theta))^2 dt}$

4.2. Valor Eficaz

- Sabe-se que
  - $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$
- Portanto
  - $\cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)$
  - $\cos(2a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a))$
  - $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
  - $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- Portanto,
  - $\cos^2(\omega t + \theta) = \frac{1+\cos(2\omega t + 2\theta)}{2}$

4.2. Valor Eficaz

- Assim,
  - $\int_0^T (\cos(\omega t + \theta))^2 dt = \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t + 2\theta)}{2}\, dt$
  - $\int_0^T (\cos(\omega t + \theta))^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^T dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega t + 2\theta)\, dt$
  - $\int_0^T (\cos(\omega t + \theta))^2 dt = \frac{1}{2}(T - 0) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left(2\omega \frac{2\pi}{\omega} + 2\theta\right) - \operatorname{sen}(2\theta)\right)$
  - $\int_0^T (\cos(\omega t + \theta))^2 dt = \frac{1}{2}T$

4.2. Valor Eficaz

- Retornando ao cálculo do valor:
  - $V_{\text{eff}} = V_p\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T(\cos(\omega t + \theta))^2 dt}$
  - $V_{\text{eff}} = V_p\sqrt{\frac{1}{T}\frac{1}{2}T}$
  - $V_{\text{eff}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$
  - $V_{\text{eff}} \approx 0.7071 V_p$
- Ou seja, considerando uma forma de onda senoidal, o valor eficaz é 70,1% do valor de crista da senoide.

4.3. Potência Instantânea

- Como já apresentado tem-se que a potência instantânea é dada por:
  - $p(t) = v(t)i(t)$
- Considerando que:
  - $v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta)$
  - $i(t) = I_p \cos(\omega t + \phi)$
- Tem-se que
  - $p(t) = V_p I_p \cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$

4.3. Potência Instantânea

- A expressão da potência instantânea para o caso senoidal será desenvolvida por meio das igualdades trigonométricas:
  - $p(t) = V_p I_p \cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$
  - $p(t) = V_p I_p (\cos(\omega t)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\theta))(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\phi))$
  - $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t)\cos(\theta)\cos(\phi) - \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \\ -\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}^2(\omega t)\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix}$
  - $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t)\cos(\theta)\cos(\phi) + \operatorname{sen}^2(\omega t)\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \\ -\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\,(\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi) + \cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta)) \end{pmatrix}$
  - $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t)\cos(\theta)\cos(\phi) + \\ (1 - \cos^2(\omega t))\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \\ -\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\theta + \phi) \end{pmatrix}$

4.3. Potência Instantânea

- $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t)\,(\cos(\theta)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)) + \\ \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) - \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\theta + \phi) \end{pmatrix}$
- $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t)\cos(\theta + \phi) \\ -\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\theta + \phi) \\ +\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix}$
- $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))\cos(\theta + \phi) - \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t)\operatorname{sen}(\theta + \phi) + \\ \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix}$

4.3. Potência Instantânea

- $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(\theta+\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\cos(\theta+\phi) \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t)\operatorname{sen}(\theta+\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix}$
- $p(t) =$
  $V_p I_p \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(\theta+\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \\ +\frac{1}{2}\big(\cos(2\omega t)\cos(\theta+\phi) - \operatorname{sen}(2\omega t)\operatorname{sen}(\theta+\phi)\big) \end{pmatrix}$
- $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(\theta+\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \\ +\frac{1}{2}\cos(2\omega t+\theta+\phi) \end{pmatrix}$

4.3. Potência Instantânea

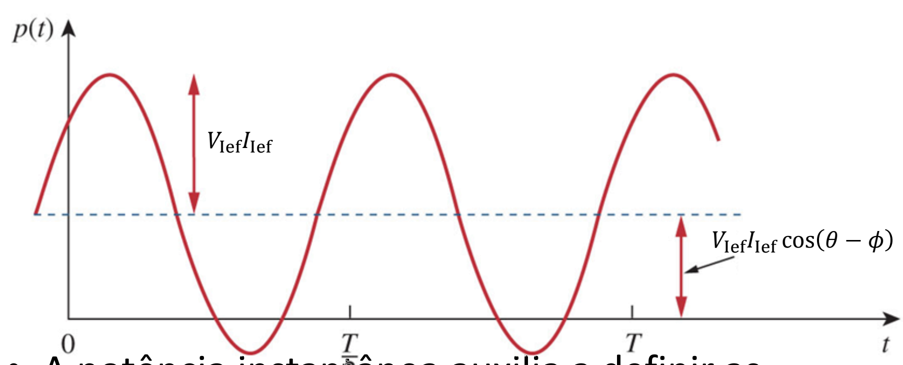
- $p(t) = V_p I_p \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(\theta)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)) \\ +\frac{1}{2}\cos(2\omega t+\theta+\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \end{pmatrix}$
- $p(t) = V_p I_p \left(\frac{1}{2}(\cos(\theta)\cos(\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + \theta + \phi)\right)$
- $p(t) = V_p I_p \left(\frac{1}{2}\cos(\theta-\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t+\theta+\phi)\right)$
- $p(t) = \frac{V_p I_p}{2}(\cos(2\omega t+\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi))$
- $p(t) = \frac{V_p}{\sqrt{2}}\frac{I_p}{\sqrt{2}}(\cos(2\omega t+\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi))$
- $p(t) = V_{\mathrm{Ief}} I_{\mathrm{Ief}}(\cos(2\omega t+\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi))$

4.3. Potência Instantânea

- A potência instantânea em regime de corrente alternada é dada, portanto por:
  - $p(t) = V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}} (\cos(2\omega t + \theta + \phi) + \cos(\theta - \phi))$
- Dessa expressão é possível observar que:
  - Composta por duas parcelas:
    - Uma constante e dada por $V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}} \cos(\theta - \phi)$
    - E outra que oscila e é dada por: $V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}} \cos(2\omega t + \theta + \phi)$, ou seja, com uma amplitude dada por $V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}}$.

4.3. Potência Instantânea

- Graficamente, tem-se:



- A potência instantânea auxilia a definir as componentes de potência: Ativa, Reativa e Aparente

4.4. Potência Ativa

- A potência ativa é definida como sendo o valor médio da potência instantânea.
- Assim, de uma forma genérica tem-se a seguinte formulação para a potência ativa:
  - $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$ [W]
- Para o caso senoidal, tem-se a seguinte particularização:
  - $P = V_{\mathrm{Ief}} I_{\mathrm{Ief}} \cos(\theta - \phi)$ [W]
- A potência ativa está associada à realização de trabalho.

4.5. Potência Aparente

- A potência aparente é definida como sendo:
  - $S = V_{\mathrm{Ief}} I_{\mathrm{Ief}}$ [VA]
- Essa definição é válida para quaisquer formas de onda e para o caso senoidal representa a amplitude da potência instantânea.

4.6. Potência Reativa

- A potência reativa está associada aos elementos armazenadores de energia.
- Assim, a potência reativa pode ser indutiva ou capacitiva.
- Ao contrário das demais definições de componentes de potência não há um formulação para a potência reativa que seja aceita de forma unânime.
- Contudo, todas essas proposições em regime senoidal convergem para uma mesma formulação.

4.6. Potência Reativa

- A definição adotada (IEEE Std. 1459-2010) para a potência reativa Q é a seguinte:
  - $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
  - $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$
- A expressão acima pode ser adotada para quaisquer formas de onda. Para o caso senoidal, tem-se:
  - $Q = \sqrt{(V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}})^2 - (V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}} \cos(\theta - \phi))^2}$
  - $Q = V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}} \sqrt{1 - \cos^2(\theta - \phi)}$
  - $Q = V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}} \sqrt{\text{sen}^2(\theta - \phi)}$
  - $Q = V_{\text{Ief}} I_{\text{Ief}} \,\text{sen}(\theta - \phi)$ [var]

4.7. Potência Complexa

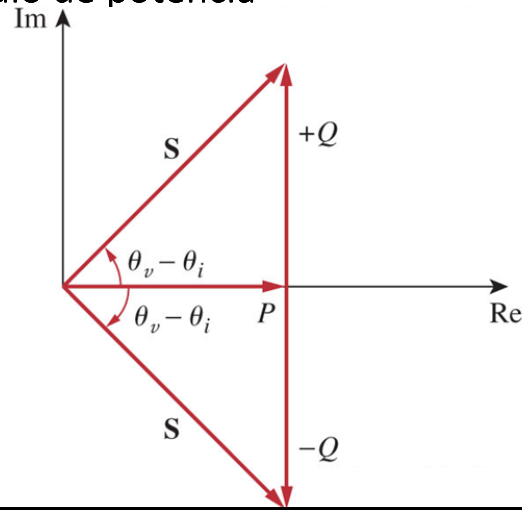
- O conceito de potência complexa somente é válido em regime senoidal uma vez que são usados os fasores de tensão e de corrente, com o módulo representado em termos eficazes, para o cálculo da potência.
- Por definição tem-se:
  - $\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^*$ [VA]
- Onde $\dot{S}$ é a potência complexa, $\dot{V}$ é o fasor da tensão e $\dot{I}^*$ é o conjugado complexo da corrente.

4.7. Potência Complexa

- Considerando que:
  - $\dot{V} = V_{\text{Ief}}\angle\theta$
  - $\dot{I} = I_{\text{Ief}}\angle\phi$ e portanto $\dot{I}^* = I_{\text{Ief}}\angle-\phi$
- tem-se:
  - $\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = V_{\text{Ief}}\angle\theta I_{\text{Ief}}\angle-\phi = V_{\text{Ief}}I_{\text{Ief}}\angle\theta-\phi$
- Na forma retangular, tem-se:
  - $\dot{S} = V_{\text{Ief}}I_{\text{Ief}}\cos(\theta-\phi) + jV_{\text{Ief}}I_{\text{Ief}}\,\text{sen}(\theta-\phi)$
- Ou seja:
  - $\dot{S} = P + jQ$ (É dessa forma, portanto, que iremos calcular as componentes de potência!!!)
  - Vale ressaltar que o módulo da potência complexa é a potência aparente.

4.7. Potência Complexa

- Triângulo de potência

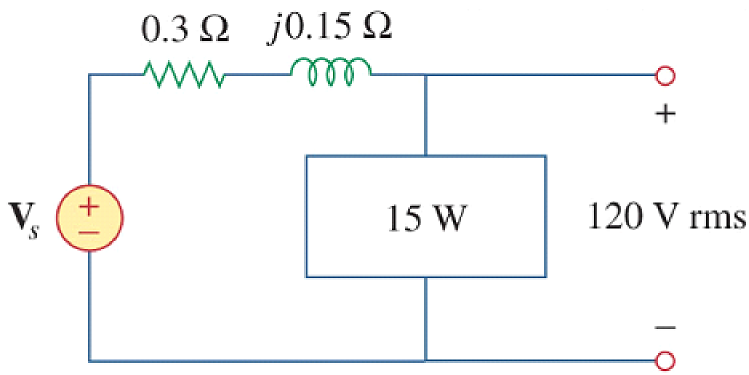


4.8. Fator de Potência

- Por definição, o fator de potência é dado por:
  - $f_p = \frac{P}{S}$
  - $f_p = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$
- Pode-se verificar que o fator de potência será menor ou igual à unidade.
- Quanto maior for a potência reativa menor será o fator de potência.
- Em geral, em sistemas industriais o fator de potência possui uma característica indutiva.

4.8. Fator de Potência

- Implicações de um baixo fator de potência:
  - Vamos considerar o seguinte circuito e supor que a carga possui um fator de potência igual a 0.7 e posteriormente iremos considerar que o fator de potência será de 0.9. Ambos os casos indutivos.

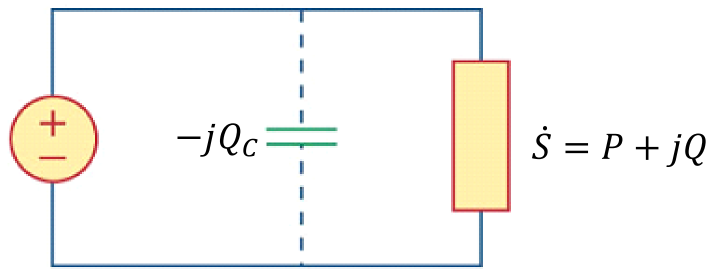


4.9. Compensação de Fator de Potência

- Para se corrigir o fator de potência pode se proceder de duas maneiras:
  - Aumenta-se a potência ativa
    - Essa alternativa é desconsiderada por acarretar, necessariamente, em aumento de consumo de energia elétrica.
  - Insere-se em paralelo com a carga um elemento com característica dual.
    - Se o fator de potência é indutivo insere-se um capacitor em paralelo.

4.9. Compensação de Fator de Potência

- Inserção de capacitores



4.9. Compensação de Fator de Potência

- Ao se inserir o banco de capacitores a potência total vista pela a fonte será:
  - $\dot{S} = P + j(Q - Q_C)$
- E o fator de potência passara a ser:
  - $f_p = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q - Q_C)^2}}$
- O objetivo é determinar Q_C de forma que se alcance um fator de potência f_p desejado.

4.9. Compensação de Fator de Potência

- Para isso, é necessário isolar Q_C na expressão abaixo:
  - $f_p = \frac{P}{\sqrt{P^2+(Q-Q_C)^2}}$
  - $P^2 + (Q - Q_C)^2 = \left(\frac{P}{f_p}\right)^2$
  - $(Q - Q_C)^2 = \left(\frac{P}{f_p}\right)^2 - P^2$
  - $Q - Q_C = \pm P \sqrt{\frac{1-{f_p}^2}{{f_p}^2}}$
  - $Q_C = Q \pm P \sqrt{\frac{1-{f_p}^2}{{f_p}^2}}$

4.9. Compensação de Fator de Potência

- Como é possível verificar na expressão abaixo existem duas repostas possíveis para Q_C
  - $Q_C = Q \pm P \sqrt{\frac{1-{f_p}^2}{{f_p}^2}}$
- Contudo, na prática estamos interessados na menor resposta (Menor custo de implantação). Assim:
  - $Q_C = Q - P \sqrt{\frac{1-{f_p}^2}{{f_p}^2}}$

4.9. Compensação de Fator de Potência

- Vamos calcular o capacitor que posto em paralelo com a carga de 15 W e fator de potência 0.7 indutivo resulte em uma carga total com fator de potência igual a 0.9.