SEL0301 – Circuitos Elétricos I

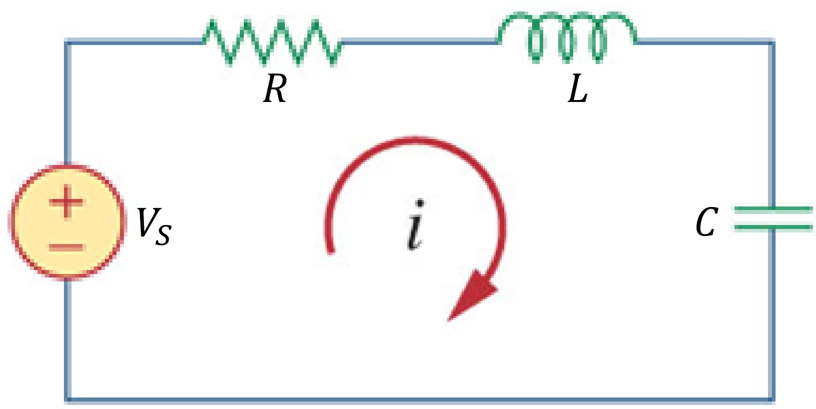
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

CAPÍTULO 2
CIRCUITOS COM ELEMENTOS ARMAZENADORES DE ENERGIA

2.4. Circuitos de Segunda Ordem

- Vamos considerar um circuito RLC série:



2.4. Circuitos de Segunda Ordem

- A equação de malha do circuito será dada por:
  - $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = V_s$
  - $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_C(0) = V_s$
- Derivando em função de t, tem-se:
  - $L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$
- Definindo $I = \frac{di(t)}{dt}$, tem-se a seguinte equação característica:
  - $LI^2 + RI + \frac{1}{C} = 0$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem

- A equação característica $LI^2 + RI + \frac{1}{C} = 0$ possui as seguintes raízes (ou polos):
  - $p_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$
- Assim, tem-se 3 possibilidades:
  - Raízes reais e distintas;
  - Raízes reais e iguais;
  - Raízes complexas e conjugadas.
- Cada uma dessas possibilidades resulta em um comportamento distinto.

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

- A resposta do sistema será do tipo amortecida quando as raízes forem reais e distintas, ou seja, quando
- $R^2 > 4\frac{L}{C}$ ou $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Nessas condições tem-se a seguinte resposta
  - $I = p_a,\ a = \{1,2\}$
  - $I = p_a I^0$
  - $\frac{di(t)}{dt} = p_a i(t)$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

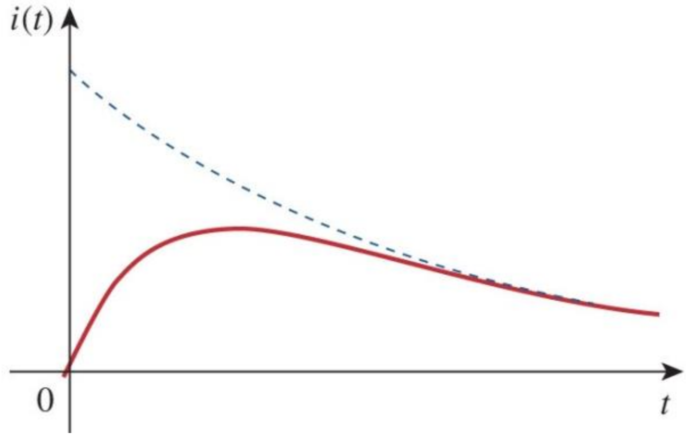
- Resolvendo $\frac{di(t)}{dt} = p_a i(t)$, tem-se:
  - $i(t) = I_a e^{p_a t}$
- Como o sistema possui duas resposta, pela aplicação do teorema da superposição de respostas, tem-se:
  - $i(t) = I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t}$
- onde I_1 e I_2 são constantes de integração e devem ser determinadas em função das condições iniciais do circuito.

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

- Os polos do circuito serão dados por:
  - $p_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$
- É possível observar que na condição de resposta amortecida, ou seja, $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, os polos serão necessariamente negativos.
- Assim, a resposta será estável (como também será estável nos demais tipos de respostas)

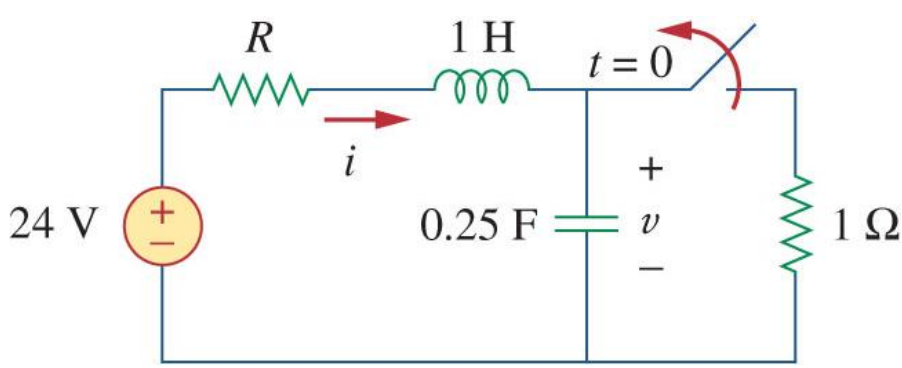
2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

- Graficamente, uma possibilidade para a resposta pode ser dada por:



2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

- No circuito abaixo determine as grandezas indicadas considerando que $R = 5\Omega$



2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- A resposta do sistema será do tipo subamortecida quando as raízes forem complexas e conjugadas, ou seja, quando
- $R^2 < 4\frac{L}{C}$ ou $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Nessas condições tem-se os seguintes polos:
  - $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$
  - $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \alpha \pm j\omega$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Assim:
  - $\alpha = -\frac{R}{2L}$
  - $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
- O fato dos polos serem complexos e conjugados conduz, necessariamente, à afirmação de que os polos são distintos.
- Assim, a resposta ainda será do seguinte tipo:
  - $i(t) = I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t}$
  - $p_1 = \alpha + j\omega$ e $p_2 = \alpha - j\omega$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Desenvolvendo, tem-se:
  - $i(t) = I_1 e^{(\alpha + j\omega)t} + I_2 e^{(\alpha - j\omega)t}$
  - $i(t) = I_1 e^{\alpha t} e^{j\omega t} + I_2 e^{\alpha t} e^{-j\omega t}$
  - $i(t) = \left(I_1 e^{j\omega t} + I_2 e^{-j\omega t}\right) e^{\alpha t}$
- Lembrando da Igualdade de Euler
  - $e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j \sin(\omega t)$
  - $i(t) = \begin{pmatrix} I_1(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) + \cdots \\ \cdots + I_2(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) \end{pmatrix} e^{\alpha t}$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

  - $i(t) = \begin{pmatrix} I_1(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) + \cdots \\ \cdots + I_2(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) \end{pmatrix} e^{\alpha t}$
  - $i(t) = \left((I_1 + I_2)\cos(\omega t) + j(I_1 - I_2)\sin(\omega t)\right) e^{\alpha t}$
- A resposta em questão se refere a um sistema físico real, ou seja, a resposta deve ser real de forma que a parte imaginária da resposta acima deve ser nula. Assim,
  - $I_1 - I_2 = 0$ logo $I_1 = I_2$
- A possibilidade acima conduz a uma resposta que não é capaz de satisfazer plenamente às condições iniciais!

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

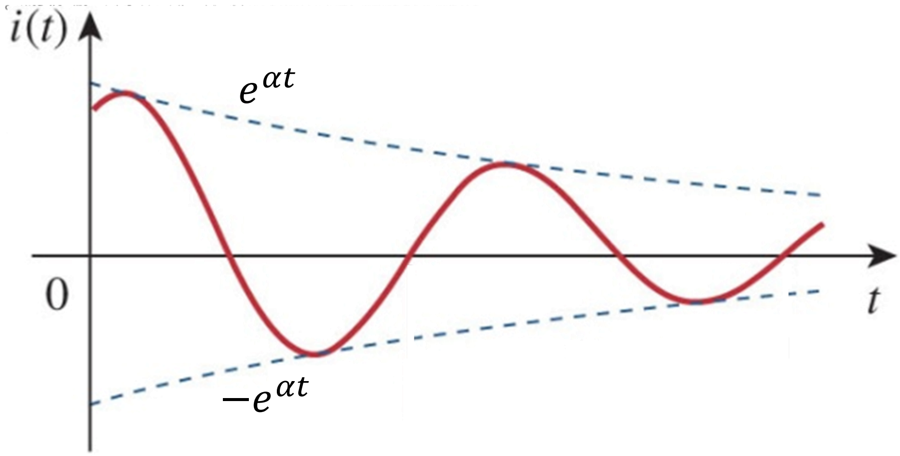
- Outra possibilidade que satisfaz a condição de que a parte imaginária seja nula é $I_1 - I_2$ sendo igual a um número imaginário (com parte real nula)
- é de essas constante serem complexas e conjugadas. Assim:
  - $I_1 = I_\mathrm{A} + jI_\mathrm{B}$ e $I_2 = I_\mathrm{A} - jI_\mathrm{B}$
- Essa hipótese conduz aos seguintes resultados:
  - $I_1 - I_2 = j2I_\mathrm{B} = j(-I_y)$
  - $I_1 + I_2 = 2I_\mathrm{A} = I_x$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Portanto
  - $i(t) = \left(I_x \cos(\omega t) + j(-jI_y) \sin(\omega t)\right)e^{\alpha t}$
  - $i(t) = \left(I_x \cos(\omega t) + I_y \sin(\omega t)\right)e^{\alpha t}$
- As constantes I_x e I_y são calculadas mediante às condições iniciais do circuito.
- Outra forma de representar a resposta acima será:
  - $i(t) = I \cos(\omega t - \theta)\, e^{\alpha t}$ onde,
  - $I = \sqrt{{I_x}^2 + {I_y}^2}$ e $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{I_y}{I_x}\right)$

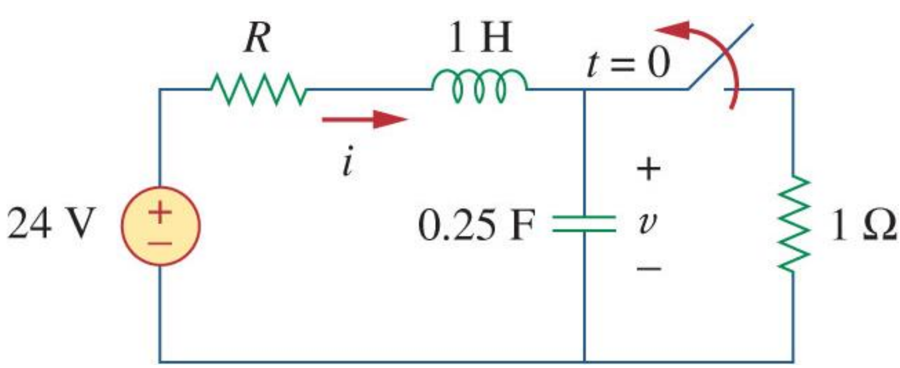
2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Graficamente:



2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- No circuito abaixo determine as grandezas indicadas considerando que $R = 1\Omega$



2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- A resposta do sistema será do tipo criticamente amortecida quando as raízes iguais, ou seja
- $R^2 = 4\frac{L}{C}$ ou $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Nessas condições tem-se os seguintes polos:
  - $p_{1,2} = -\frac{R}{2L}$
  - $i(t) = I_1 e^{pt} + I_2 e^{pt} = Ie^{pt}$
- A resposta anterior não é capaz de atender às condições iniciais.

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- O fato da equação diferencial possuir dois polos idênticos permite que a mesma seja escrita da seguinte forma:
  - $\frac{d^2i(t)}{dt^2} - 2p\frac{di(t)}{dt} + p^2 i(t) = 0$
  - $\frac{d^2i(t)}{dt^2} - p\frac{di(t)}{dt} - p\frac{di(t)}{dt} + p^2 i(t) = 0$
  - $\frac{d}{dt}\left(\frac{di(t)}{dt} - pi(t)\right) - p\left(\frac{di(t)}{dt} - pi(t)\right) = 0$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- Definindo:
  - $f = \frac{di(t)}{dt} - pi(t)$
- Tem-se:
  - $\frac{df(t)}{dt} - pf(t) = 0$, Resolvendo essa equação diferencial, tem-se:
  - $f(t) = Fe^{pt}$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

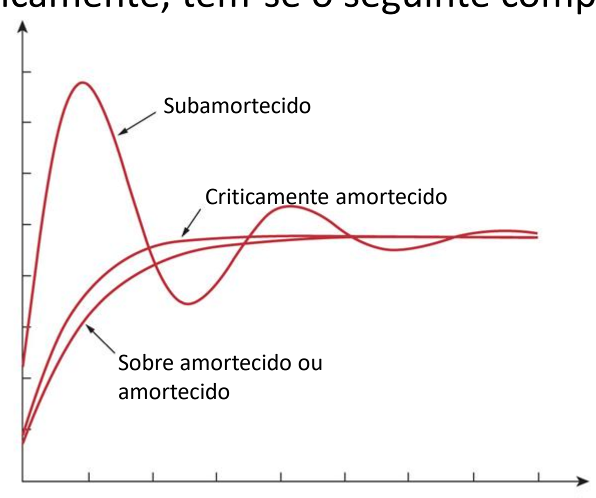
- Substituindo $f(t)$ na equação abaixo e desenvolvendo, tem-se:
  - $f = \frac{di(t)}{dt} - pi(t)$
  - $Fe^{pt} = \frac{di(t)}{dt} - pi(t)$
  - $F = e^{-pt}\frac{di(t)}{dt} - pi(t)e^{-pt}$
  - $F = e^{-pt}\frac{di(t)}{dt} - i(t)pe^{-pt}$
  - $F = \frac{d}{dt}(i(t)e^{-pt})$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem
Resposta criticamente amortecida

- Integrando ambos os termos, tem-se:
  - $F = \frac{d}{dt}(i(t)e^{-pt})$
  - $\int Fdt = \int d(i(t)e^{-pt})$
  - $Ft + k_1 = i(t)e^{-pt} + k_2$
  - $Ft + k = i(t)e^{-pt}$
- Portanto,
  - $i(t) = e^{pt}(I_1 + I_2 t)$

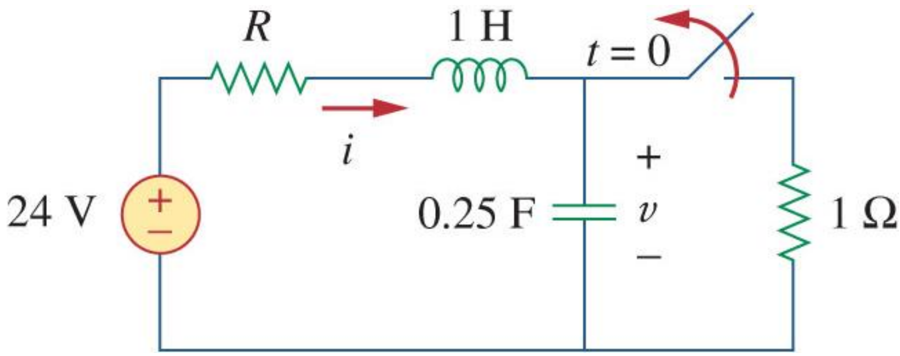
2.4. Circuitos de Segunda Ordem
Resposta criticamente amortecida

- Graficamente, tem-se o seguinte comparativo:



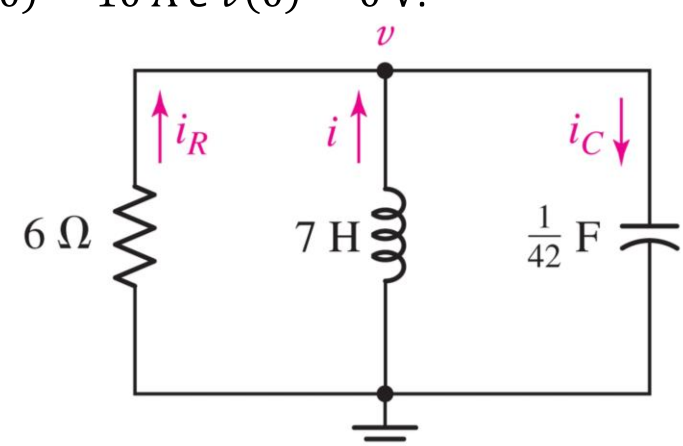
2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- No circuito abaixo determine as grandezas indicadas considerando que $R = 4\Omega$



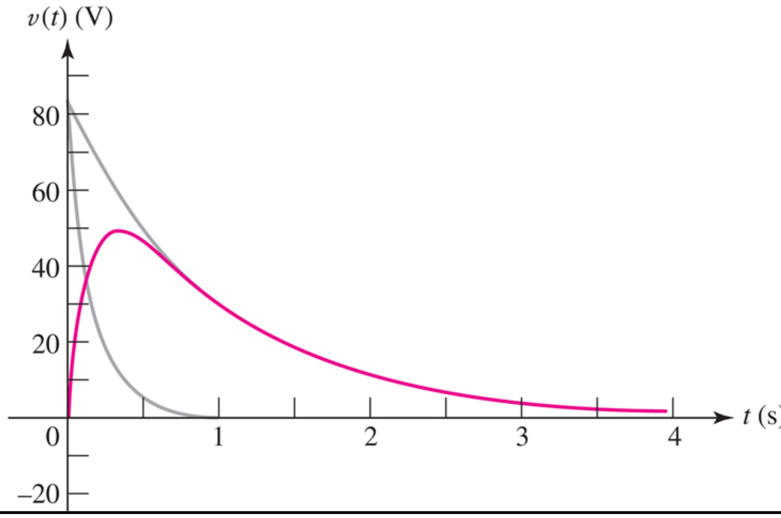
2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- Considere que no circuitos abaixo tem-se que $i(0) = 10$ A e $v(0) = 0$ V.



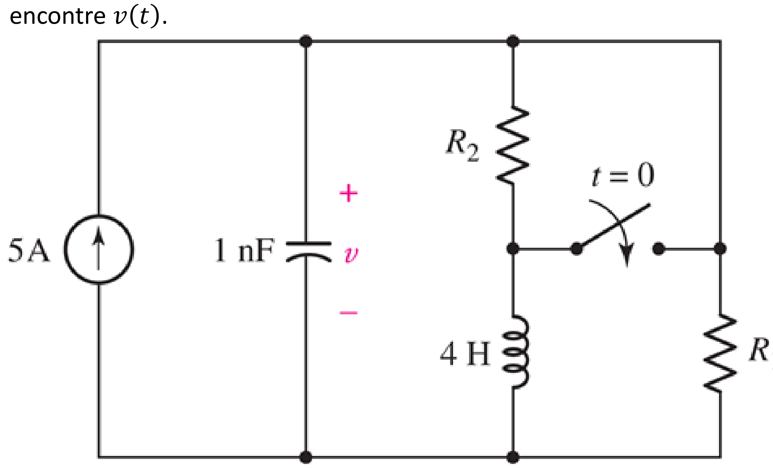
2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- A análise do circuito anterior deve resultar na seguinte tensão.



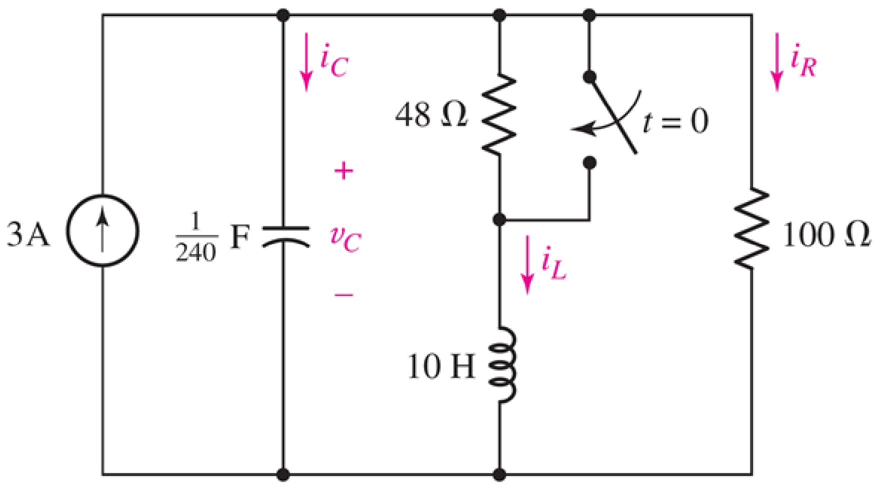
2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- Determine R_1 tal que o circuito seja criticamente amortecido para $t > 0$, bem como encontre R_2 que resulte em $v(0) = 2\text{V}$. Nessas condições encontre $v(t)$.



2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- Determine as grandezas indicadas para $t > 0$



2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- A corrente $i_L(t)$ tem o seguinte comportamento: