

# Mecânica Estatística – 4302401

## Lista de exercícios 1

2023.1

1. (Garrod) Separamos ao acaso 10 computadores de um conjunto de 100, dos quais 10 são defeituosos. Qual é a probabilidade de que todos os 10 computadores separados funcionem?
2. (Garrod, modificado) Um gás contém frações  $n_A$  e  $n_B$  de partículas dos tipos  $A$  e  $B$ , cujas energias estão associadas a distribuições  $P_A(E)$  e  $P_B(E)$ , com  $0 \leq E \leq \infty$ . Dado que uma partícula tem energia maior que  $E_0$ , encontre uma expressão, em termos das distribuições  $P_A(E)$  e  $P_B(E)$  e das frações  $n_A$  e  $n_B$ , para a probabilidade de que se trate de uma partícula do tipo  $A$ .
3. O lançamento de uma moeda não necessariamente honesta, que produz cara com probabilidade  $p$ , pode ser associado a uma distribuição de probabilidade binária

$$P_m(m) = p\delta(m-1) + (1-p)\delta(m),$$

em que  $m = 0$  representa coroa e  $m = 1$  representa cara. Calcule o valor médio e a variância de  $m$  segundo essa distribuição.

4. Um dado não honesto de seis faces produz o resultado 6 com probabilidade  $p$ , e cada uma das demais faces de 1 a 5 com a mesma probabilidade  $q$ . Se  $x$  é a variável aleatória que representa o resultado do lançamento do dado, ou seja,  $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ :
  - (a) determine o valor de  $q$  com base na normalização das probabilidades;
  - (b) escreva a distribuição de probabilidades de  $x$ ,  $P(x)$ , em termos de deltas de Dirac;
  - (c) calcule o valor médio e o desvio padrão de  $x$ ;
  - (d) teste os resultados do item anterior para o caso particular de um dado honesto.
5. Considere um gás ideal de  $N$  moléculas que está em equilíbrio dentro de um recipiente de volume  $V_0$ . Denote por  $n$  o número de moléculas localizadas dentro de um subvolume  $V$  do recipiente. A probabilidade  $p$  de que uma dada molécula esteja

localizada nesse subvolume é então dada por  $p = V/V_0$ . Desta forma, podemos encontrar o valor médio do número de moléculas no subvolume  $V$ ,  $\langle n \rangle$ , e o seu desvio padrão,  $\Delta n = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ . Assinale entre as alternativas abaixo a expressão para  $\Delta n / \langle n \rangle$  que expressa o comportamento das flutuações no volume  $V$ .

- (a)  $\Delta n = N^{-1/2} \sqrt{(V_0/V) - 1}$
- (b)  $\Delta n = 0$
- (c)  $\Delta n = NV_0/V$
- (d)  $\Delta n = (V/V_0)^N$
- (e)  $\Delta n = 1$

**Sugestão:** lembre que  $\sum_{k=0}^{\ell} k \binom{\ell}{k} p^k q^{\ell-k} = \ell p$  e  $\sum_{k=0}^{\ell} k^2 \binom{\ell}{k} p^k q^{\ell-k} = \ell p q + \ell^2 p^2$ .

6. (Garrod) A variável aleatória  $x$  segue uma distribuição de probabilidades uniforme no intervalo  $(0,1)$ ; a probabilidade de obter valores de  $x$  fora desse intervalo é nula. Qual é a distribuição de probabilidades de  $y = \ln x$ ?
7. (Sethna) Se a fusão nuclear no Sol fosse interrompida hoje, quanto tempo levaria para percebermos? Para estimar a resposta a essa pergunta, considere o seguinte. A maior parte da energia gerada pelo Sol provém de reações que ocorrem próximo ao seu centro. Acredita-se que no terço externo do Sol o transporte de energia seja dominado por convecção, mas que nas camadas interiores (abaixo de um raio  $R$  de cerca de  $5 \times 10^8$  m) o processo dominante possa ser modelado como uma caminhada aleatória de fótons de raios X. (Um fóton é um pacote quantizado de energia, que pode ser visto caricaturalmente como uma partícula que se move com velocidade  $c$ , a velocidade da luz do vácuo; estamos ignorando o índice de refração do Sol.) Nesse modelo, a cada passo da caminhada o fóton percorre uma distância  $\ell = 1$  mm em uma direção aleatória no espaço.
  - (a) Estime quantos passos aleatórios um fóton que parte do centro do Sol precisa dar em média para alcançar o raio  $R$  em que a convecção se torna importante.
  - (b) Quantos anos um fóton levaria em média para chegar até lá?

Dica: o problema pode ser resolvido sem que se calcule nenhuma distribuição de probabilidades, apenas pensando em termos de valores médios.

8. (Sethna, modificado; este problema requer o uso de cálculo computacional) Uma das mais ativas e inusuais aplicações de ensembles é a teoria das matrizes aleatórias, utilizada para descrever fenômenos em física nuclear, mecânica quântica mesoscópica e sistemas oscilatórios. A origem da teoria de matrizes aleatórias está na tentativa de descrever a estatística dos níveis de energia de núcleos. Surpreendentemente, o

comportamento estatístico de muitos sistemas que exibem fenômenos aleatórios complexos envolvendo autovalores e autoestados pode ser modelado quantitativamente utilizando ensembles de matrizes com elementos completamente aleatórios e não correlacionados. O ensemble de matrizes mais explorado é o ensemble gaussiano ortogonal (GOE). Para gerar um membro  $H$  desse ensemble, que corresponde a uma matriz simétrica  $N \times N$ , são necessárias duas etapas:

- gerar uma matriz  $N \times N$  cujos elementos sejam números aleatórios gaussianos independentes com média zero e desvio padrão  $\sigma = 1$ ;
- tomar a média de cada matriz com sua transposta para obter uma matriz simétrica.

Uma das propriedades mais notáveis que grandes matrizes aleatórias compartilham é a distribuição dos espaçamentos entre níveis.

- (a) Gere um ensemble com  $M = 10\,000$  matrizes do GOE de tamanhos  $N = 2, 4$  e  $10$ . Para cada matriz, determine os autovalores  $\lambda_n$ , ordenados do menor para o maior, e calcule a diferença  $\lambda_{n+1} - \lambda_n$  entre autovalores consecutivos, mas apenas com  $n = N/2$ . (Utilizar as diferenças entre todos os autovalores consecutivos distorceria um pouco a distribuição e dificultaria a visualização nas próximas etapas.) Para cada valor de  $N$ , trace histogramas do espaçamento entre autovalores dividido pelo valor médio desses espaçamentos, utilizando caixas de largura suficientemente pequena para conseguir observar algumas flutuações. Você deve observar uma queda na altura dos histogramas quando o espaçamento tende a zero, que caracteriza o que se chama de *repulsão entre níveis*. (Se for utilizar o *Mathematica*, as funções `RandomVariate`, `NormalDistribution`, `Transpose`, `Eigenvalues`, `Sort` e `Histogram` são convenientes; veja a documentação do software.)

Para  $N = 2$ , a distribuição de probabilidades dos espaçamentos pode ser calculada analiticamente. Vamos denotar a matriz por  $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

- (b) Mostre que a diferença entre os autovalores de  $H$  é  $\Delta\lambda = \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2}$ .
- (c) As distribuições de probabilidade de  $a$  e  $c$  são gaussianas com média zero e desvio padrão  $\sigma_a = \sigma_c = 1$ , ou seja

$$P_a(u) = P_c(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

Lembrando que a matriz  $H$  é simetrizada por construção, e que portanto  $b$  corresponde à média de dois números aleatórios gaussianos, cada um com média

zero e desvio padrão 1, mostre que a distribuição de probabilidade de  $b$  é

$$P_b(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}.$$

(d) Determine a distribuição de probabilidade de  $\Delta\lambda$ , ou seja, calcule

$$P_{\Delta}(\Delta\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} dc \delta\left(\Delta\lambda - \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2}\right) P_a(a) P_c(c) P_b(b).$$

Dica: efetue primeiro a transformação de variáveis  $x = (c+a)/2$  e  $y = (c-a)/2$ , integre sobre  $x$  e em seguida efetue uma segunda transformação para variáveis polares  $r$  e  $\theta$  tais que  $y = r \sin \theta$  e  $b = r \cos \theta$ .

(e) Reescale a distribuição do item anterior definindo  $s = \Delta\lambda / \langle \Delta\lambda \rangle$  para fazer o espaçamento médio igual a 1 e mostre que o resultado é

$$\rho_{\text{Wigner}}(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\pi s^2/4},$$

que é conhecida como distribuição de espaçamentos de Wigner. Note que tanto  $\Delta\lambda$  quanto  $s$  estão definidos apenas no intervalo  $[0, +\infty)$ .

- (f) Apesar de ter sido deduzida para  $N = 2$ , a distribuição de espaçamentos de Wigner é uma boa aproximação para os resultados obtidos com  $N$  maior. Para verificar essa afirmação, trace os histogramas do item (a) junto com  $\rho_{\text{Wigner}}(s)$  em gráficos para  $N = 4$  e  $N = 10$ .
- (g) Por fim, repita o item (a) para um outro ensemble, agora com matrizes simétricas cujos elementos sejam variáveis aleatórias  $\pm 1$  com igual probabilidade. As distribuições obtidas são quase universais, ou seja, são praticamente as mesmas para qualquer  $N$ , como ocorreu no item (a)? Para  $N = 10$ , trace o histograma obtido e superponha  $\rho_{\text{Wigner}}(s)$  no mesmo gráfico. A concordância nesse caso parece razoável? O que isso sugere? Teste sua hipótese com outros ensembles de matrizes aleatórias simétricas que lhe ocorram.
9. (Rosser) O sistema isolado  $A$  tem níveis de energia não degenerados correspondentes a 0, 2, 4, 6, 8 e 10 unidades de energia e consiste de uma partícula vermelha cuja energia é de 6 unidades. O sistema isolado  $B$  tem níveis de energia não degenerados correspondentes a 0, 1, 2, 3, ..., 10 unidades de energia e consiste de duas partículas não interagentes, uma branca e outra azul, com energia total igual a 2 unidades.
- (h) Liste os microestados acessíveis a cada sistema isolado.

Agora os dois sistemas são postos em contato térmico.

- (i) Qual é o número de microestados acessíveis ao sistema composto?

- (j) Após atingido o novo equilíbrio térmico, qual é a variação na entropia do sistema em relação à situação inicial, quando ambos os sistemas estavam isolados?
- (k) Qual é o valor médio da energia de cada sistema no equilíbrio térmico?
10. (Rosser) Considere dois sistemas idealizados cujos níveis de energia são igualmente espaçados e correspondem a  $0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  unidades de energia. O sistema  $A$  consiste de 3 partículas distinguíveis e o sistema  $B$  consiste de 5 partículas distinguíveis. Os sistemas são colocados em contato e atingem o equilíbrio térmico. A energia total é de 20 unidades. Denote por  $P_B(E_B)$  a probabilidade de que o sistema  $B$  contenha  $E_B$  unidades de energia, por  $\Omega_A(E_A)$  o número de microestados acessíveis ao sistema  $A$  quando ele contém  $E_A$  unidades de energia e por  $\Omega_B(E_B)$  o número de microestados acessíveis ao sistema  $B$  quando ele contém  $E_B$  unidades de energia. Faça gráficos da dependência em  $E_B$  de  $P_B(E_B)$ , de  $\ln \Omega_B(E_B)$ , de  $\ln \Omega_A(20 - E_B)$ , de  $\ln [\Omega_A(20 - E_B) \Omega_B(E_B)]$  e de  $\ln P_B(E_B)$ .
11. (Rosser, adaptado) Uma caixa contém  $N$  “moléculas” de um gás de rede ideal (o segundo “modelo de brinquedo” das notas de aula sobre entropia) no equilíbrio térmico, distribuídas entre  $V = 10^{12}$  células elementares. Rotulamos por  $A$  e  $B$  as duas metades da caixa.
- (a) Quantas moléculas de gás a caixa deve conter para que as flutuações relativas no número de moléculas na metade  $A$  sejam de cerca de 1%?
- (b) Quantas moléculas de gás a caixa deve conter para que as flutuações relativas no número de moléculas na metade  $A$  sejam de cerca de 1 parte em  $10^6$ ?
- (c) Para cada um dos itens anteriores, calcule a probabilidade de que todas as moléculas estejam na metade  $A$ .