2020-1, "STATPHYS", AULA 23

OBJETIVO: DEDUZIR A EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.5 PROCESSOS DE DIFUSÃO

- VER REFERÊNCIAS DA AULA 22

→ NA AULA ANTERIOR, AFIRMOU-SE QUE, SE UM ATIVO FINANCEIRO ("BÁSICO" OU "SUBJACENTE") EVOLUIR ESTOCASTICAMENTE NO TEMPO SEGUNDO UM MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO,

$$\boxed{dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW}, \quad (*)$$

EM UM AMBIENTE COM UMA TAXA DE JUROS r LIVRE DE RISCO,

$$(**) \quad \boxed{dB = r B\, dt}, \quad \underbrace{\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right]^t}_{\text{JUROS COMPOSTOS}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{rt}$$

O PREÇO $f(S,t)$ DE UM DERIVATIVO EM UM MERCADO EFICIENTE, SEM ARBITRAGEM, OBEDECERÁ À EQ. DE BLACK-SCHOLES,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} r.S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = r.f}.$$

→ NO CASO ESPECÍFICO DE UMA <u>OPÇÃO</u> <u>EUROPEIA</u> <u>DE</u> <u>COMPRA</u>, "CALL OPTION", $f(S,t) \rightsquigarrow C(S,t)$ E VALEM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO $C(0,t)=0$ E $C(S,T) = \text{MAX}(S-K, 0)$.

T ↓ TEMPO DE EXPIRAÇÃO

K ↘ PREÇO DE EXERCÍCIO

→ NÃO É ESTRITAMENTE NECESSÁRIO, MAS PODE SER DIDÁTICO APRESENTAR OUTRO TIPO DE OPÇÃO ANTES DE DEDUZIR A BS.

→ UMA OPÇÃO EUROPEIA DE VENDA, "PUT OPTION", DIFERE DE UMA DE COMPRA NO FATO QUE O CONTRATANTE PASSA A TER O DIREITO DE VENDER CADA ATIVO AO AUTOR DA OPÇÃO PELO PREÇO DE EXERCÍCIO K NA DATA DE EXPIRAÇÃO T. AGORA, O CONTRATANTE DESEJA/APOSTA QUE O PREÇO DO ATIVO BÁSICO CAIA, PARA "VENDER CARO UM PRODUTO BARATO" AO AUTOR DA OPÇÃO. O PREÇO $P(S,t)$ DESSA OPÇÃO CAI QUANDO O PREÇO DO ATIVO SOBE, AO CONTRÁRIO DO QUE OCORRE COM UMA "CALL OPTION".

→ A IDEIA BÁSICA DE BS É O HEDGING, A FORMULAÇÃO DE UM PORTFOLIO DE ATIVOS DE RISCO CORRELACIONADOS (COMO OBVIAMENTE O SÃO

UM ATIVO BÁSICO E UM DERIVATIVO DELE) QUE SEJA GLOBALMENTE <u>LIVRE DE RISCO</u>, A EFICIÊNCIA DO MERCADO FAZ COM QUE O RENDIMENTO DESSE PORTFOLIO EQUIVALHA À "TAXA BÁSICA DE JUROS".

◈ DEMONSTRAÇÃO:

(i) FÓRMULA DE ITÔ (p. 21-8)

$$Y = f(X,t), \qquad dX = a(X,t)\,dt + b(X,t)\,dW$$

$$dY = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + b\frac{\partial f}{\partial x}\,dW$$

$$X \to S, \quad a(X,t) \to \mu S, \quad b(X,t) = \sigma S$$

$$f(X,t) \to f(S,t), \quad dY \to df$$

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}\,dW} \tag{1}$$

(ii) PORTFOLIO "ELEMENTAR" COM UM DERIVATIVO E $(-\Delta)$ ATIVOS BÁSICOS

$$\Pi = f + (-\Delta).S \Rightarrow \boxed{d\Pi = df - \Delta . dS} \quad (2)$$

Π → VALOR / PREÇO DO PORTFOLIO $\Pi(S,t)$

f → $f(S,t)$

$d\Pi = df - \Delta . dS$ → Δ CONSTANTE ENTRE PASSOS TEMPORAIS → CONTROLE ESTOCÁSTICO!

(iii) HEDGING: ESCOLHA DE Δ PARA "ELIMINAR O RISCO"

(1) EM (2): E (*)

$$d\Pi = \left(-\Delta.\sigma.S + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S}\right) dW + \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \mu S \Delta + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) dt$$

HEDGING: $\Delta = \partial f / \partial S$

$$\therefore \boxed{d\Pi^* = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) dt} \quad (3)$$

iv) MERCADO EFICIENTE

$$d\Pi^* = d\Pi^{LIVRE} \overset{(**)}{=} r\Pi\, dt = r\left(f - S\frac{\partial f}{\partial S}\right)dt$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r.f}$$