2020-1, "STATPHYS", AULA 17

OBJETIVOS: APRESENTAR SEQUÊNCIAS ESTOCÁSTICAS ("SÉRIES TEMPORAIS") COMO UMA INTRODUÇÃO AO MOVIMENTO BROWNIANO

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.4 SEQUÊNCIAS ESTOCÁSTICAS

2.4 SEQUÊNCIAS ESTOCÁSTICAS

→ EM CONTRASTE COM AS EQS. MESTRAS (ESTADOS DISCRETOS, TEMPO CONTÍNUO), VAMOS ESTUDAR AGORA PROCESSOS DE ESTADOS CONTÍNUOS EM TEMPO DISCRETO.

→ SURGIRÃO SOMAS DE GAUSSIANAS INDEPENDENTES. LEMBRA?

(i) ESCALA: $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)}$

POIS $\boxed{\phi_X(k) = \exp\{i\mu k - \sigma^2 k^2/2\}}$

E $\phi_{aX}(k) = \phi_X(ak) = e^{i(a\mu)k - (a^2\sigma^2)k^2/2}$

(ii) TRANSLAÇÃO: $\boxed{b + X \sim N(b+\mu, \sigma^2)}$

POIS $\phi_{b+X}(k) = e^{ikb} \cdot \phi_X(k)$

$$= e^{i(b+\mu)k - \sigma^2 k^2/2}$$

(iii) SOMA DE INDEPENDENTES

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad , \quad i = 1, 2$$

$\boxed{X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$ INDEPENDÊNCIA!

POIS $\phi_{X_1+X_2}(k) \overset{\text{IND.}}{=} \phi_{X_1}(k) \cdot \phi_{X_2}(k)$.

* MODELO ADITIVO

$\boxed{S(t+1) = a \cdot S(t) + \xi(t)}$ VARIÁVEL ALEATÓRIA!!!

$\boxed{S(t) = a^t \cdot S(0) + \sum_{i=0}^{t-1} a^{t-1-i} \cdot \xi(i)}$

$$S(t) = \underbrace{S_H(t)}_{\text{HOMOGÊNEA}} + \underbrace{S_p(t)}_{\text{PARTICULAR}}$$

(i) $S_H(t+1) = a \cdot S_H(t) \rightsquigarrow S_H(t) = a^t \cdot S_H(0)$

(ii) ANSATZ: $S_p(t) = \boxed{c(t)} \cdot a^t$ → A SER DETERMINADO

$$S_p(t+1) = a \cdot S_p(t) + \xi(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(t+1) \cdot a^{t+1} = a\left[c(t) \cdot a^t\right] + \xi(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(t+1) = 1\,c(t) + \frac{1}{a^{t+1}} \xi(t)$$ → RECORRÊNCIA TELESCÓPICA!

$$\begin{cases} c(t) = \cancel{c(t-1)} + b(t-1) \\ \cancel{c(t-1)} = \cancel{c(t-2)} + b(t-2) \\ \vdots \\ \cancel{c(1)} = c(0) + b(0) \end{cases} \Rightarrow c(t) = \underbrace{c(0)}_{\text{ZERO, SEM PERDA DE GENERALIDADE}} + \sum_{i=0}^{t-1} b(i)$$

$$c(t) = \sum_{i=0}^{t-1} a^{-1-i} \cdot \xi(i)$$

$$S_p(t) = a^t \cdot c(t)$$

HIPÓTESE SOBRE OS "IMPULSOS":

- $\boxed{\xi(t) \sim N(0, \sigma^2)}$ → RUÍDO BRANCO! (WHITE NOISE)
- $\boxed{\mathrm{cov}[\xi(t_1), \xi(t_2)] = 0}$ SE $t_1 \neq t_2$

→ INDEPENDÊNCIA, P/ GAUSSIANAS

$$a^{t-1-i} \cdot \xi(i) \sim N(0, \sigma^2 a^{2(t-1-i)})$$

$$\sum_{i=0}^{t-1} \sigma^2 . a^{2(t-1-i)} = (\sigma a^{t-1})^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{a^2}\right)^i$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{t-1} q^i = \frac{1-q^t}{1-q}}$$

$$= (\sigma a^{t-1})^2 \frac{1 - \left(\frac{1}{a^2}\right)^t}{1 - \frac{1}{a^2}}$$

$$= \frac{a^{2t} - 1}{a^2 - 1} \sigma^2 \xrightarrow{a \to 1} t\sigma^2$$

→ VARIÂNCIA PROPORCIONAL AO TEMPO? "TEM CHEIRO" DE RANDOM WALK!

* PROCESSO DE WIENER

→ QUEREMOS "PREPARAR O CENÁRIO" PARA UM LIMITE DE TEMPO CONTÍNUO: TROCAREMOS O PASSO UNITÁRIO DO MODELO ADITIVO POR Δt.

$$t_k \equiv k \cdot \Delta t$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t$$

$$\boxed{g(t_{k+1}) = g(t_k) + \sqrt{\Delta t} \cdot \xi(t_k)}$$

LEMBRA DO $\sqrt{n}$ NO TCL?

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\langle \xi(t_i) \rangle = 0$$

$$\mathbb{V}[\xi(t_i)] = 1$$

$$i \neq j \Rightarrow \mathbb{C}[\xi(t_i), \xi(t_j)] = 0$$

NÃO PRECISA NORMAL?!

PARA $k > j$: $g(t_k) = g(t_j) + \sqrt{\Delta t} \sum_{i=j}^{k-1} \xi(t_i)$

$$\boxed{\langle g(t_k) - g(t_j) \rangle = 0}$$

$$\mathbb{V}[z(t_k)-z(t_j)] \overset{\text{IND.}}{=} \sum_{i=j}^{k-1} (\sqrt{\Delta t})^2 \underbrace{\mathbb{V}[\xi(t_i)]}_{=1}$$

$$= (k-j)\Delta t = t_k - t_j$$

TUDO ISSO SUGERE UM "INCREMENTO ESTOCÁSTICO" $dz = \sqrt{dt}.\xi(t)$ DE DIFÍCIL FORMALIZAÇÃO.

RAIZ DE DIFERENCIAL?

ABORDAGEM AXIOMÁTICA!

PROCESSO DE WIENER: $\boxed{dW = \sqrt{dt}\,\xi(t)}$

$W(t)$

(i) SE $s < t$, $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$

(ii) $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$,

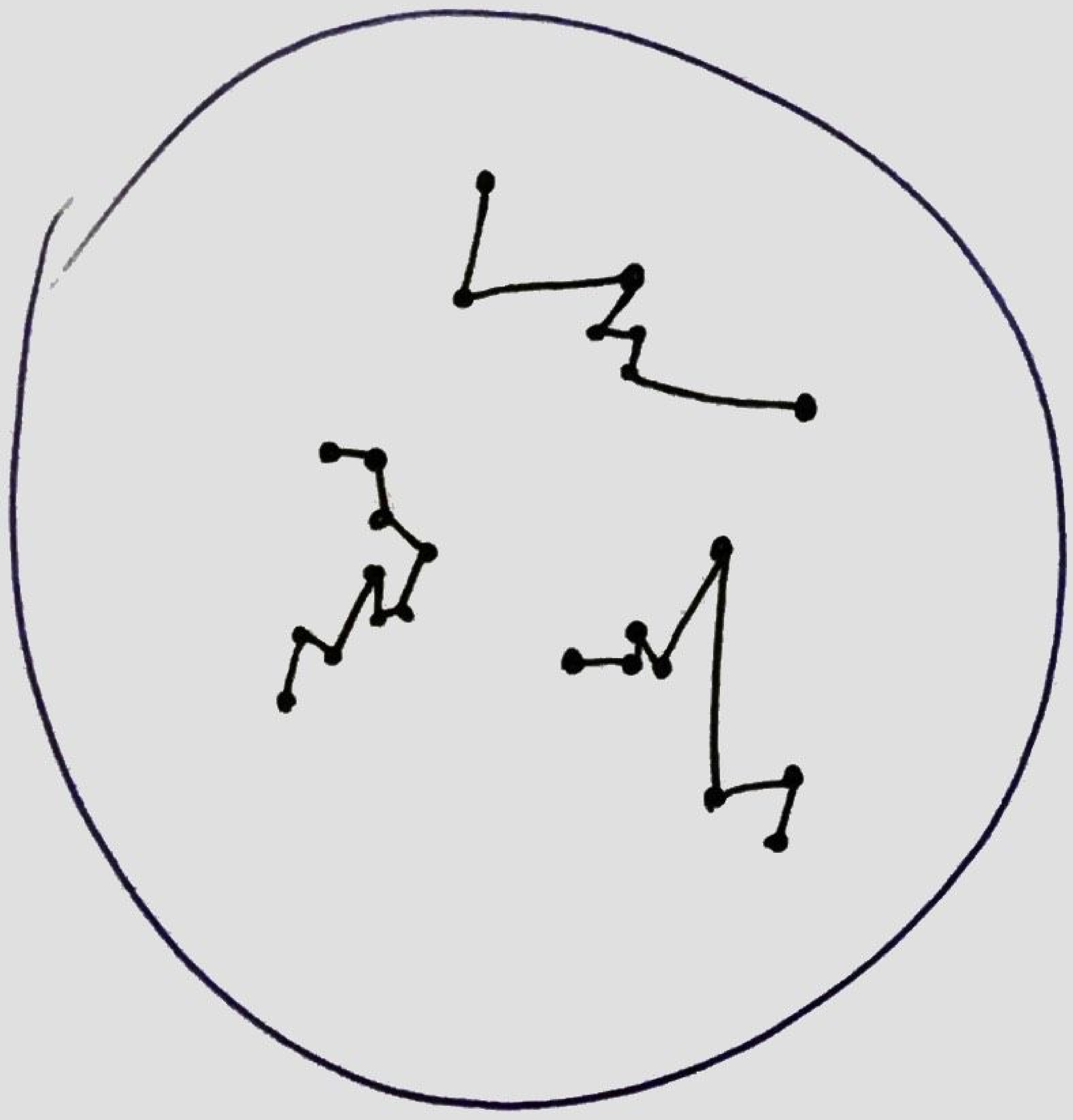
$$\text{cov}[z(t_2)-z(t_1), z(t_4)-z(t_3)] = 0$$

(iii) $\mathbb{P}[z(t_0) = 0] = 1$

→ DEMONSTRA-SE QUE AS TRAJETÓRIAS ESTOCÁSTICAS SÃO CONTÍNUAS, MAS NÃO DIFERENCIÁVEIS!!!

$$\left\langle \underbrace{\left[\frac{g(t)-g(s)}{t-s} \right]^2}_{\text{RAZÃO INCREMENTAL, "DERIVADA"}} \right\rangle = \frac{t-s}{(t-s)^2} \xrightarrow{t \to s} \infty$$

PROBLEMA OU SOLUÇÃO?



MOVIMENTO BROWNIANO