# 2020-1, "MECÂNICA ESTATÍSTICA", AULA 03

OBJETIVOS DA AULA: APRESENTAR AS PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DISCRETAS E CONTÍNUAS; TRANSFORMAÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS; MOMENTOS; FUNÇÕES GERADORA E CARACTERÍSTICA.

ONDE ESTAMOS: 1.2 ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

## INÍCIO DA AULA

* VARIÁVEIS ALEATÓRIAS (CONTINUAÇÃO)

→ EXEMPLOS DE V.A.'s DISCRETAS

(i) BERNOULLI, $X \sim Be(p)$, $0 < p < 1$

"SUCESSO OU FRACASSO"

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com prob. } p \\ 0, & \text{" \quad " } 1-p \end{cases}$$

(ii) BINOMIAL, $X \sim B(N,p)$, $0<p<1$, $N \in \mathbb{N}$

"QUANTOS SUCESSOS EM N TENTATIVAS INDEPENDENTES?"

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0,1,\dots,N$$

(iii) POISSON, $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\text{BINOMIAL} \xrightarrow[p \to 0]{N \to \infty} \text{POISSON}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(iv) GEOMÉTRICA, $0 < p < 1$

"TEMPO (DISCRETO) ATÉ O 1º SUCESSO", PROB. $p$ E $q \equiv 1 - p$

$$\mathbb{P}(X = n) = p \cdot q^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(v) PASCAL (BINOMIAL NEGATIVA), $k \in \mathbb{N}$

"TEMPO (DISCRETO) ATÉ O K-ÉSIMO SUCESSO"

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k \cdot q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots$$

→ EXEMPLOS DE V.A.'s CONTÍNUAS

(i) UNIFORME, $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, $b > a$

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

$$\rho(x) = \rho_X(x)$$

♦ IMPORTANTE: UNIFORME (0,1), SIMULAÇÕES

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

(ii) EXPONENCIAL, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

- DECAIMENTOS RADIOATIVOS OU DE EXCITAÇÕES ELETRÔNICAS
- TEMPO (CONTÍNUO) ATÉ "SUCESSO"

(iii) GAMA, $X \sim \Gamma(\lambda, p)$

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$\Gamma(p) \equiv \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} \, dz$$ → FUNÇÃO GAMA

$\Gamma(p) = (p-1)!$ SE $p \in \mathbb{N}$

- TEMPO (CONTÍNUO) ATÉ $p$ "SUCESSOS" SE $p \in \mathbb{N}$
- CASOS PARTICULARES: EXPONENCIAL, ERLANG, "CHI-QUADRADO"

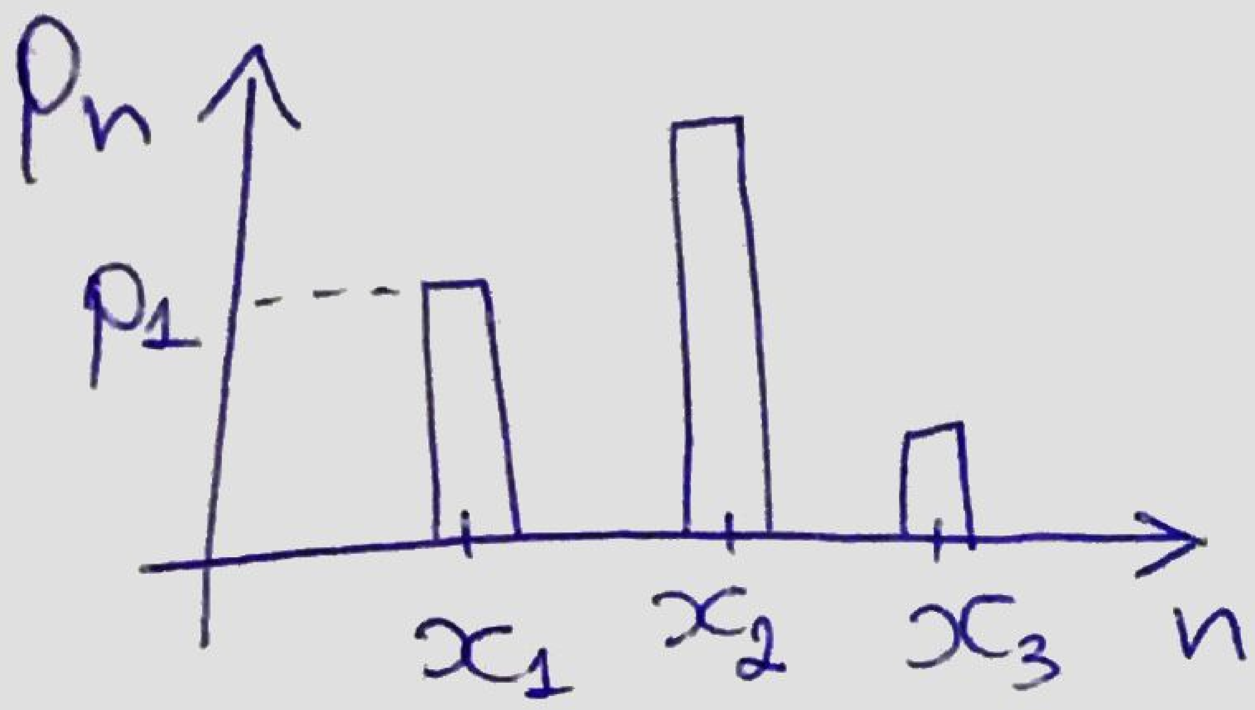
(iv) NORMAL OU GAUSSIANA, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

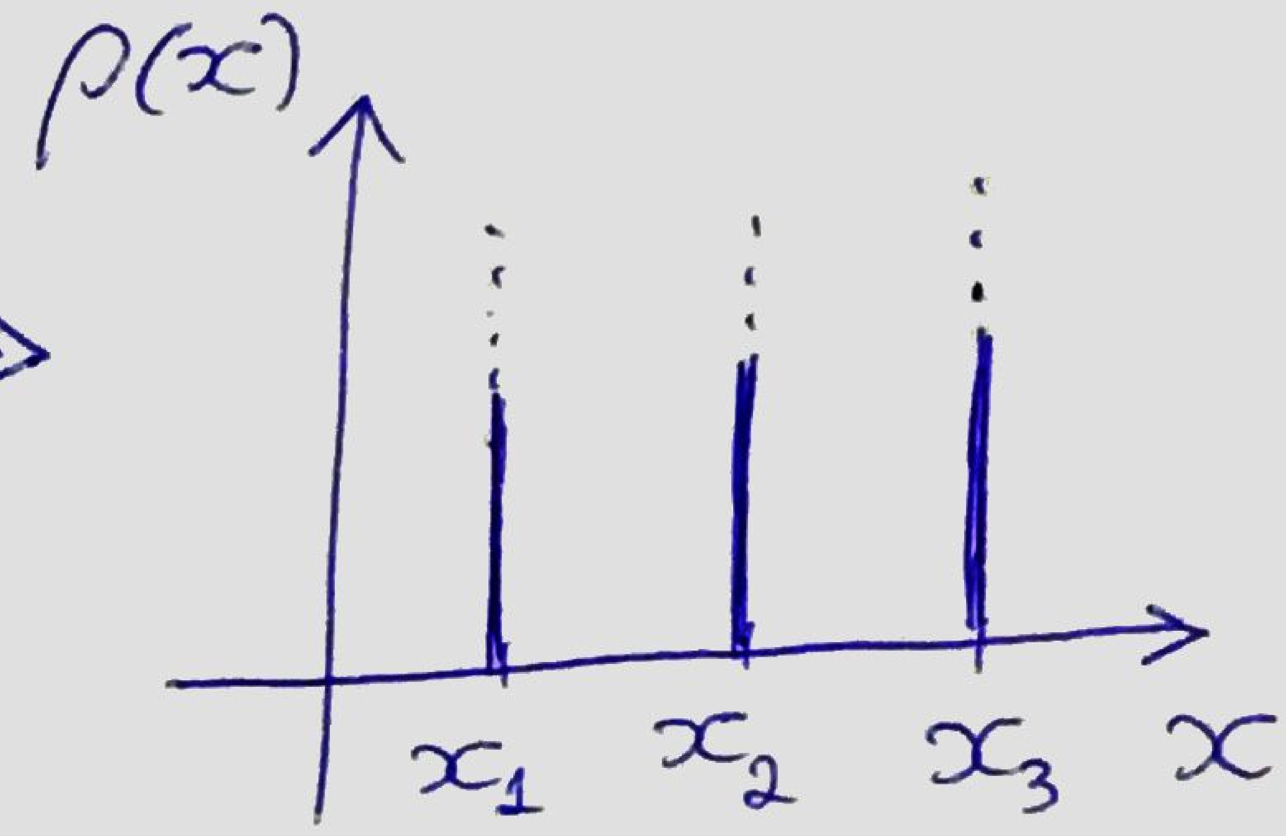
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

- IMPORTANTÍSSIMA: TEOREMA CENTRAL DO LIMITE
- PADRÃO (STANDARD): $Z \sim N(0,1)$

# * TRANSFORMAÇÃO DE V.A.'s

→ FORMALMENTE, A DELTA DE DIRAC PERMITE TRATARMOS UMA V.A. DISCRETA COMO CONTÍNUA:




$$p_n \equiv \mathbb{P}(X = x_n)$$

$$\rho(x) = \sum_{x_n \in S} p_n \, \delta(x - x_n)$$

S: ESPAÇO DE ESTADOS

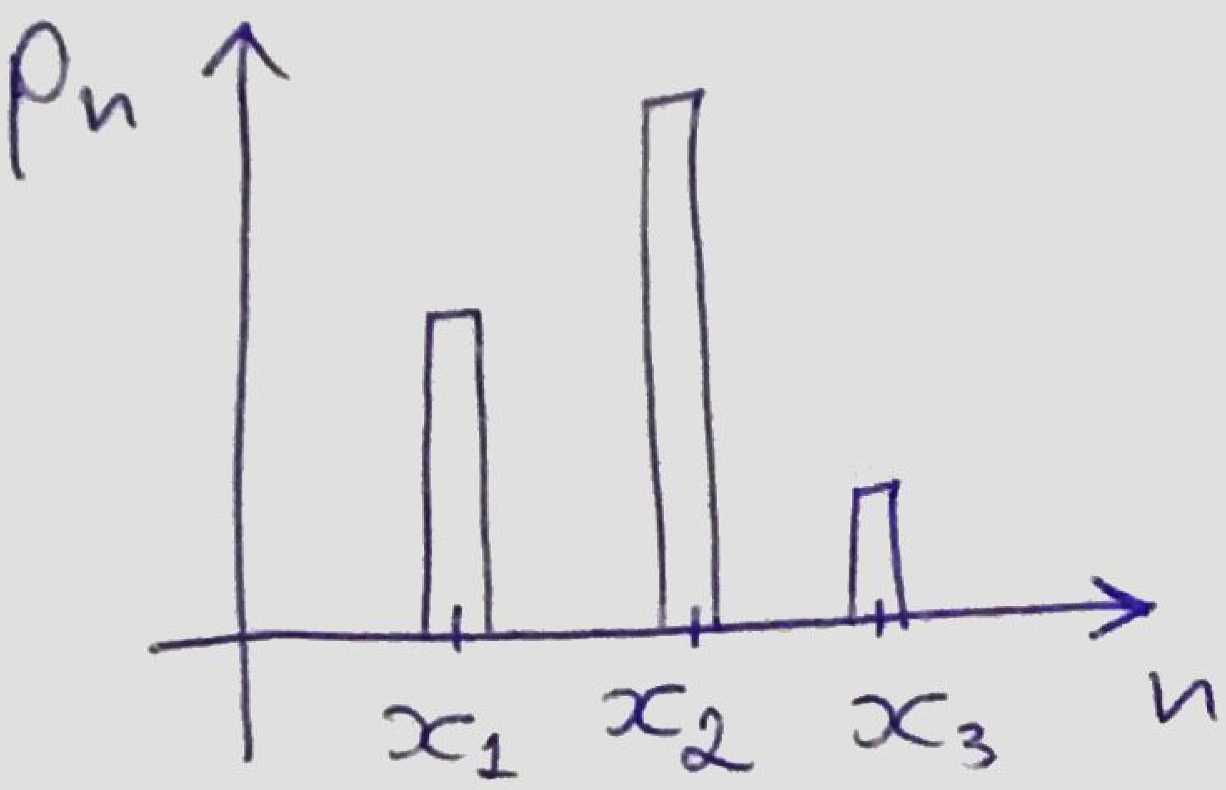
$$S = \{x_i\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \, / \, \mathbb{P}(X = x) > 0\}$$

→ PORÉM, PARA ILUSTRAR AS TRANSFORMAÇÕES MAIS SIMPLES, USAREI HISTOGRAMAS.

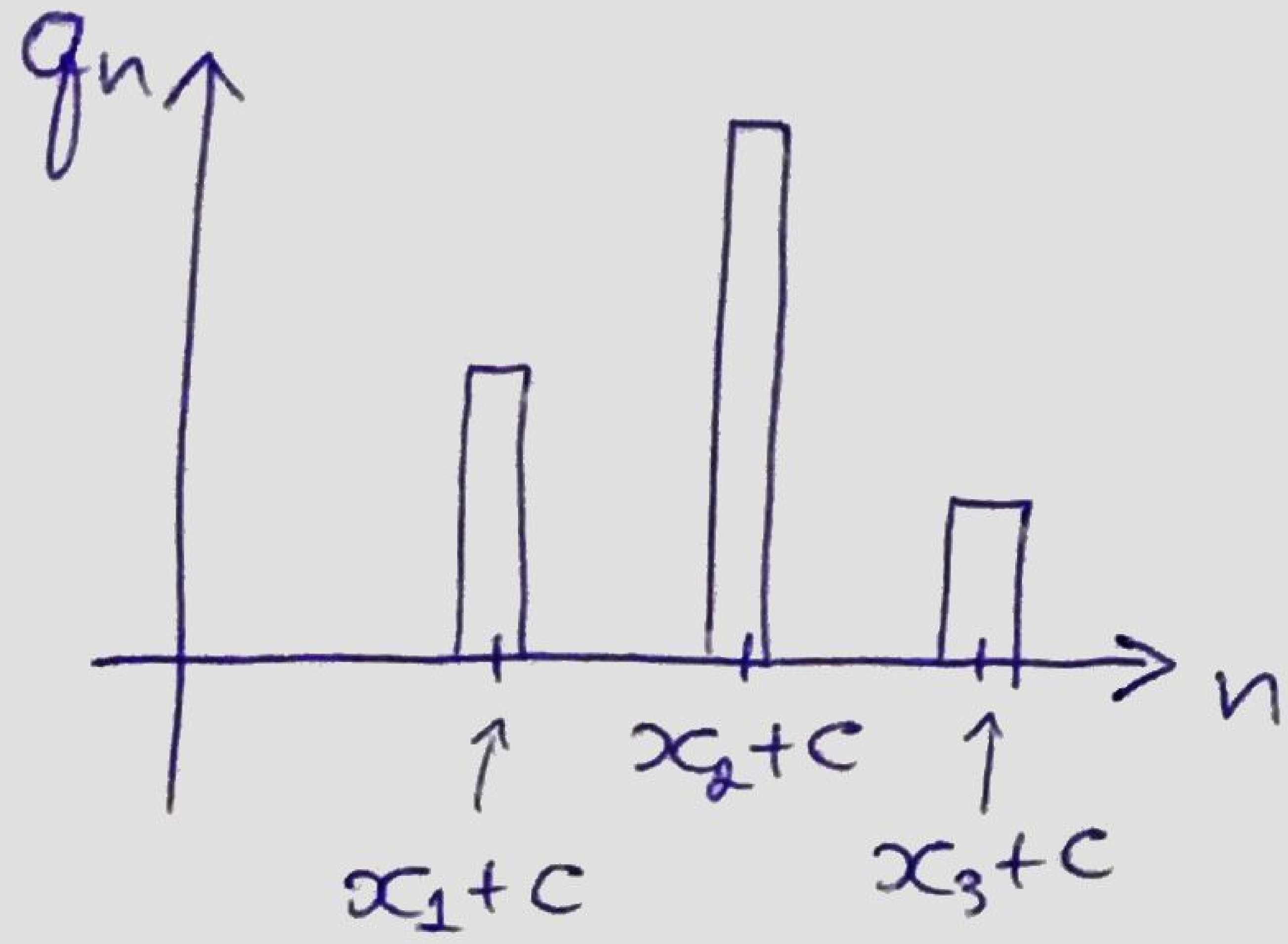
(i) TRANSLAÇÃO / DESLOCAMENTO (SHIFT)

$$Y = X + c$$

NOVA V.A.

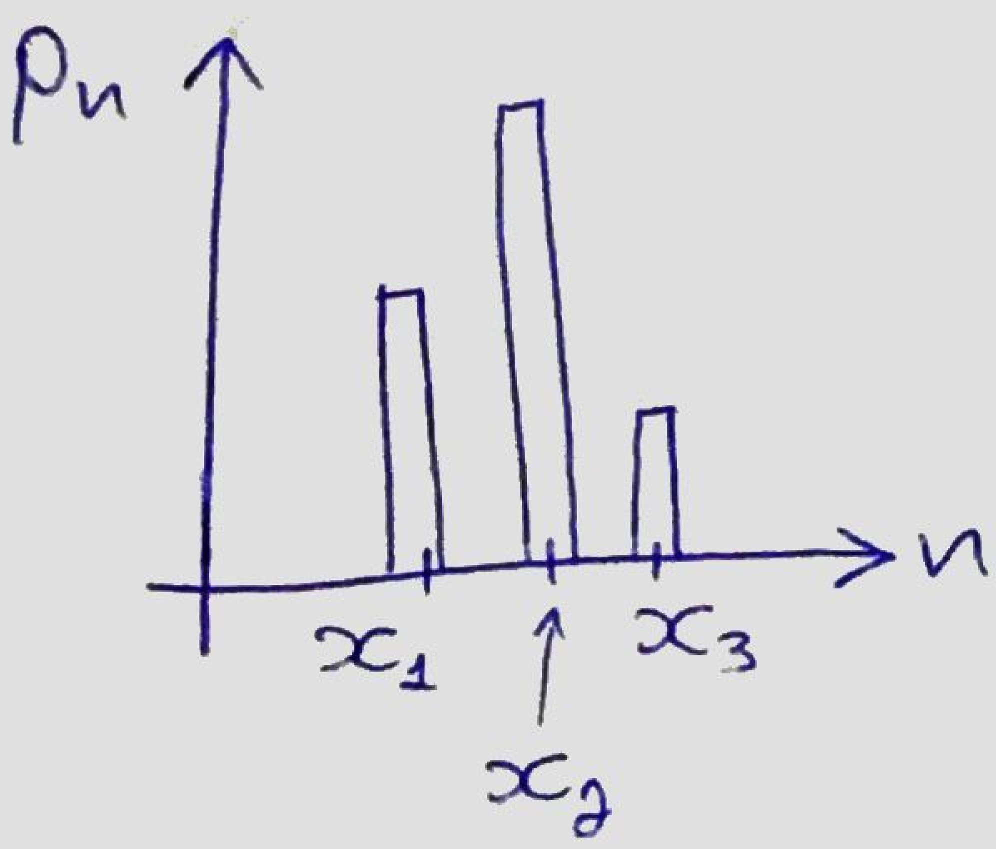



$$\xrightarrow[c>0]{c \in \mathbb{R}}$$

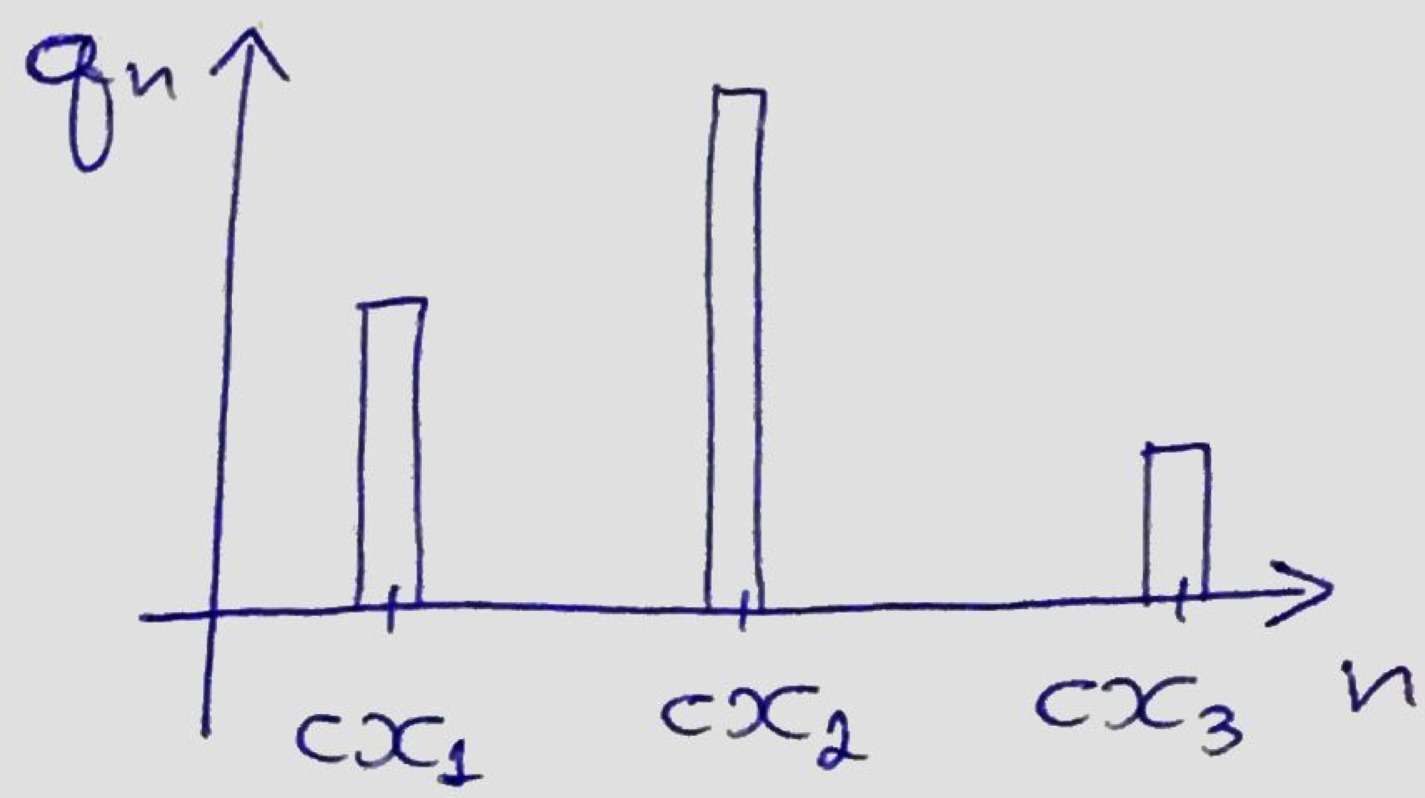



$$\mathbb{P}(X=n) = p_n = q_{n+c} = \mathbb{P}(Y=n+c)$$

(ii) ESCALA , $Y = c \cdot X$




$$\xrightarrow[c>0]{c \in \mathbb{R}}$$

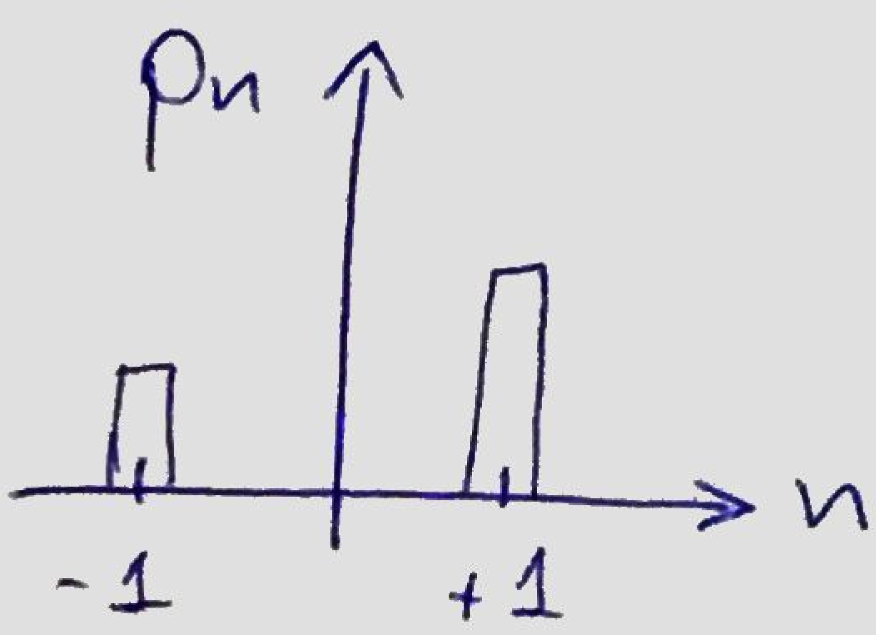



$$\mathbb{P}(Y=cn) = q_{c.n} = p_n = \mathbb{P}(X=n)$$

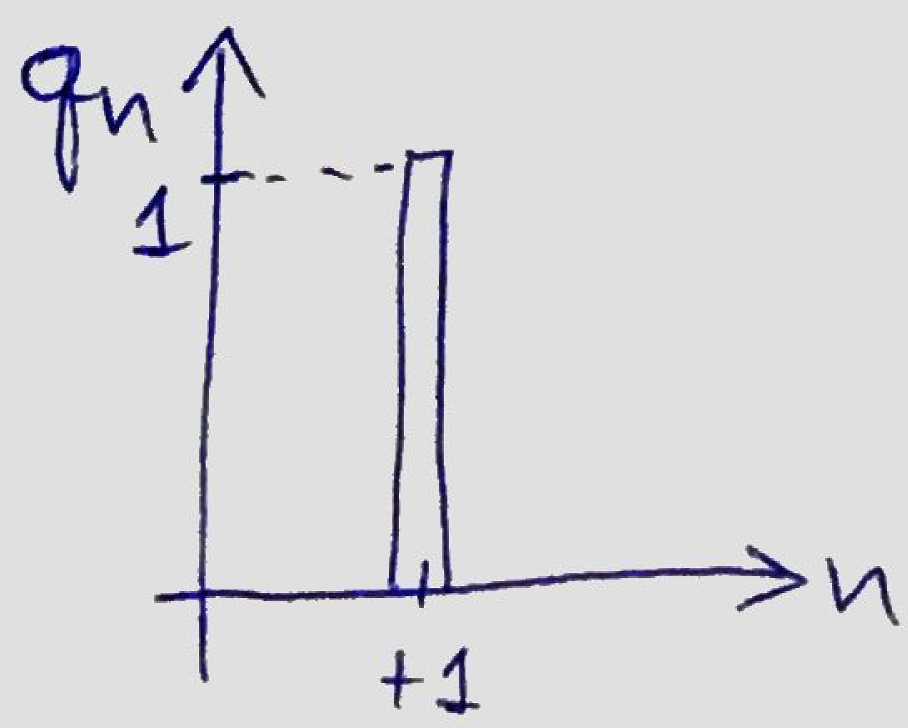
(iii) GERAL, $Y = f(X)$

$$\rho_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho_X(x) . \delta[y - f(x)]$$

• EXEMPLO (OU NÃO?)




$$\xrightarrow{Y = X^2}$$



# * MOMENTOS

→ DADA UMA V.A. $X$, MUITAS DAS SUAS CARACTERÍSTICAS EMERGEM COMO MÉDIAS DE NOVAS V.A.'s $Y = f(X)$, ONDE $f$ É UMA COMPOSIÇÃO DE TRANSLAÇÕES, ESCALAS E POTÊNCIAS.

(i) MÉDIA OU VALOR ESPERADO

PHYSICS $\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \rho_X(x) \, dx$ → CENTRO DE MASSA!

$\parallel$

MATH/PROB $\mathbb{E}(X) = \mu = \mu_X$

$f(x) = x$

• EM GERAL, $\langle f(X) \rangle = \int f(x) \rho_X(x) \, dx$

• ALERTA! $\langle f(X) \rangle \neq f(\langle X \rangle)$

EXERCÍCIO!

◆ MOSTRE QUE $\langle c X \rangle = c \langle X \rangle$ E $\langle X + c \rangle = \langle X \rangle + c$. ◆

(ii) K-ÉSIMO MOMENTO ($k \in \mathbb{N}$)

$$\langle X^k \rangle = \int x^k \rho(x)\, dx$$

(iii) K-ÉSIMO MOMENTO CENTRAL ($k \in \mathbb{N}$)

$$\left\langle (X - \langle X \rangle)^k \right\rangle = \int (x - \langle X \rangle)^k \cdot \rho(x) \cdot dx$$

• IMPORTANTES: CASOS $k=3$ E $k=4$, NORMALIZADOS; ASSIMETRIA (SKEWNESS) E CURTOSE, RESPECTIVAMENTE; DISCUSSÃO POSTERIOR, APÓS DETALHES DA GAUSSIANA.

• IMPORTANTÍSSIMO: CASO $k=2$ É A VARIÂNCIA!

NOTAÇÃO COMUM: $\mathrm{VAR}(X) \equiv \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$

$$\parallel$$

MINHA NOTAÇÃO ← $\mathbb{V}(X)$

MEDIDA DE DISPERSÃO: REALIZAÇÕES DISTANTES DA MÉDIA (PARA MAIS OU PARA MENOS) AUMENTAM A VARIÂNCIA.

◆ **EXERCÍCIO:** MOSTRE QUE $\mathbb{V}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$.

DICA: JÁ VIMOS QUE A ÁLGEBRA DE V.A.'S PERMITE "ABRIR O BINÔMIO" NA DEFINIÇÃO. ◆

◆ **EXERCÍCIO:** SE $c$ FOR UMA CONSTANTE, MOSTRE QUE $\mathbb{V}(X+c) = \mathbb{V}(X)$ E $\mathbb{V}(cX) = c^2\, \mathbb{V}(X)$.

◆

(iv) MOMENTOS FATORIAIS

$$\langle X^{\underline{k}} \rangle \equiv \int x(x-1)\dots[x-(k-1)]\,\rho(x)\,dx$$

$$\shortparallel$$

$$\langle X(X-1)\dots[X-(k-1)] \rangle$$

* FUNÇÃO GERADORA (V.A.'s DISCRETAS)

→ SE $X$ FOR UMA V.A. DISCRETA COM ESPAÇO DE ESTADOS $S$, SUA FUNÇÃO GERADORA É

$$g_X(z) = \sum_{x_n \in S} p_n \cdot z^{x_n},$$

ONDE $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

→ PARA SIMPLIFICAR, DIGAMOS QUE $S$ SEJA O CONJUNTO DOS INTEIROS NÃO NEGATIVOS. ASSIM, $g(z)$ É A SÉRIE DE TAYLOR

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

E $p_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$. ALÉM DISSO,

$$g^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots[n-(k-1)]\,p_n \cdot z^{n-k}$$ E

$$g^{(k)}(1) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots[n-(k-1)]\,p_n$$

$$= \langle X^{\underline{k}} \rangle$$ FATORIAL!

- $\langle X \rangle = g'(1)$
- $\mathbb{V}(X) = \underbrace{g''(1) + g'(1)}_{\langle X^2 \rangle} - \overbrace{[g'(1)]^2}^{\langle X \rangle^2}$

$$g_X(z) = \langle z^X \rangle$$

◆ **EXERCÍCIO**: COM EXCEÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PASCAL, CALCULE A MÉDIA E A VARIÂNCIA DAS V.A.'s DISCRETAS DESTA AULA, A PARTIR DAS FUNÇÕES GERADORAS. ◆

* FUNÇÃO CARACTERÍSTICA (V.A.'s CONTÍNUAS)

$$\phi_X(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(x)\, e^{ikx}\, dx = \langle e^{ikX} \rangle$$

FOURIER TRANSFORM!

INVERSÃO: $\rho_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(k)\, e^{-ikx}\, dk$

→ EXPANDE A EXPONENCIAL:

$$\phi_X(k) = \int \rho(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikx)^n}{n!}\right] dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \underbrace{\left[\int x^n \rho(x)\, dx\right]}_{\langle X^n \rangle}$$

$$\therefore \boxed{\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n} \phi_X^{(n)}(0)}$$

◆ **EXERCÍCIO:** COM EXCEÇÃO DA GAUSSIANA, CALCULE A MÉDIA E A VARIÂNCIA DAS V.A.'S CONTÍNUAS DESTA AULA, A PARTIR DAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.