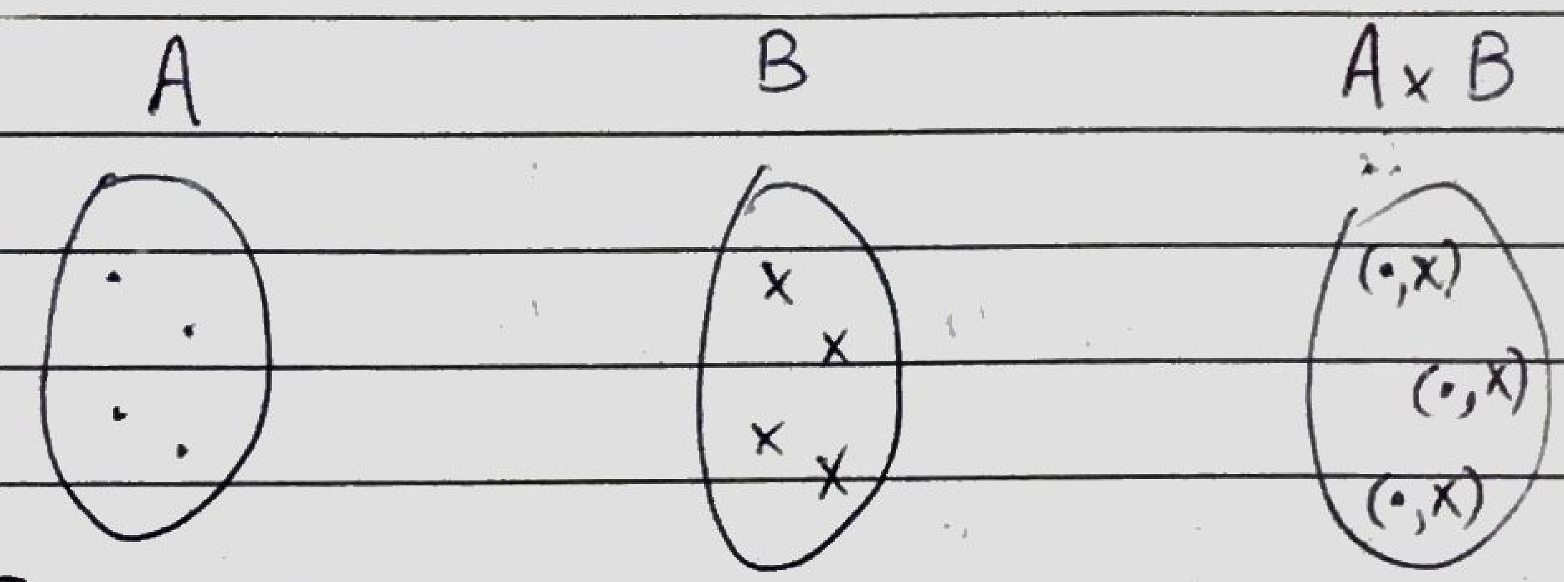
MEA
11 • 08 • 08
IFSC-USP

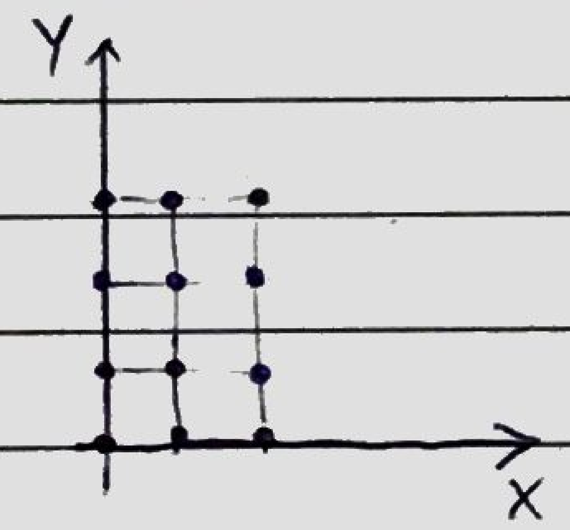
1. Fundamentos de Probabilidade

1.1 NOÇÕES E PROBLEMAS BÁSICOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

1.1.1 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO Se "algo" pode ocorrer de n_1 formas diferentes e, independentemente do que ocorreu em algo, "outra coisa" pode ocorrer de n_2 formas distintas, então há $n_1 . n_2$ formas de ocorrerem "alguma coisa" e "outra coisa".

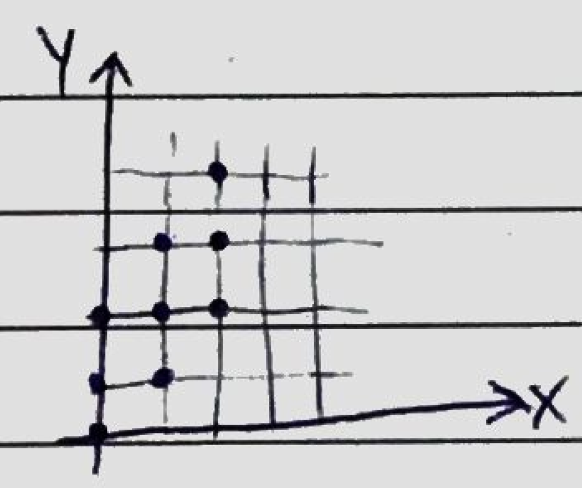


$$n_1 = \begin{cases} \#A \\ n(A) \\ card(A) \end{cases}$$



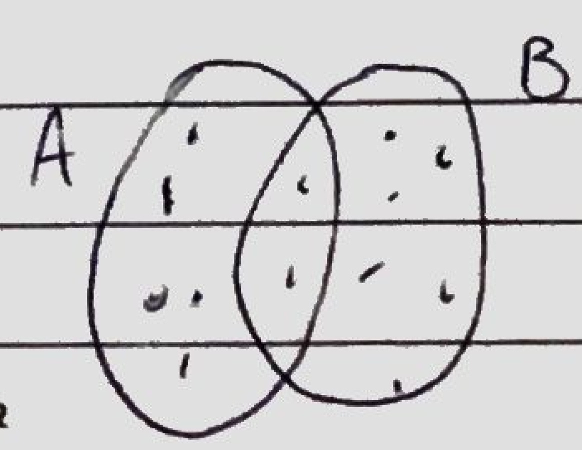
$A = \{0,1,2\}$ $\quad n_A = 3$ $\quad 3.4 = 12$

$B = \{0,1,2,3\}$ $\quad n_B = 4$



1.1.2 PRINCÍPIO ADITIVO Se, sob uma certa condição, "alguma coisa" pode ocorrer de n_1 formas distintas e, sob outra condição, incompatível com a primeira, pode ocorrer de n_2 formas, então há $n_1 + n_2$ formas de ocorrência de "alguma coisa" satisfazendo uma e exatamente uma das condições.

(condição ou a outra).



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \boxed{n(A \cap B)}$$

1.1.3 ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

Há $\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots[n-(m-1)]$ formas de ordenar m dos n elementos distintos de um conjunto $(m \leq n)$.

POSIÇÃO: 1 2 ... m

OPÇÕES: n $n-1$ ... $n-m+1$

1.1.4 COMBINAÇÕES

Há $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ formas de escolher p objetos entre n objetos distintos $(n \geq p)$.

POSIÇÃO: 1 2 ... m

+ OBJETOS!

1.1.5 ~~PASSEIO ALEATÓRIO NA RETA~~ TEOREMAS BINOMIAL E MULTINOMIAL

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{n} \frac{n!}{k!\,l!} a^k b^l \delta_{k+l,n}$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$a^2 b = a.a.b = a.b.a = b.a.a$$

$$(a+b+c)^n = \sum_{k,l,m=0}^{n} \frac{n!}{k!\,l!\,m!} a^k b^l c^m \delta_{k+l+m,n}$$

1.1.8 EXEMPLOS

i) De quantas formas o lançamento de 3 dados (usuais, com 6 faces equivalentes) pode resultar em um total de pontos ≤ 6? Os dados são distinguíveis! → relevante p/ estatísticas quânticas

DATA

• •

	(4,1,1)	(3,2,1)	(3,1,1)	(2,2,2)	(2,2,1)	(2,1,1)	(1,1,1)	
# PERM.	3	3! = 6	3	1	3	3	1	= 20

$$g(z) = (z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6).(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6).(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$$

$$= [z(1+\ldots+z^5)]^3 = z^3(1+\ldots+z^5)^3 = z^3(1-z^6)^3(1-z)^{-3} =$$

$$\boxed{\text{se } z\neq 1,\quad 1+\ldots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}}$$

$$= z^3(1-3z^6+3z^{12}-z^{18})(1+3z+6z^2+10z^3+\ldots)$$

1.1.6 TEOREMA BINOMIAL GENERALIZADO

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad (1+z)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} z^i$

$$f(z) = (1+z)^\alpha \Rightarrow f^{(1)}(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow f^{(i)}(z) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\cancel{k}i+1)(1+z)^{\alpha-i}$$

$$\binom{-n}{p} = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-p+1)}{p!} = \frac{(-1)^p}{p!}\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$$

cont. 1.1.8 ii) $\quad x_1+x_2+x_3 = 10$, soluções inteiras não negativas.

$$(1,3,6) \leftrightarrow \cdot|\cdot\cdot\cdot|\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m$$

$$\cancel{S = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \delta_{i+j+k,10}}$$

$$S_{n,m} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

$$\cancel{g(z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \delta_{i+j+k,N}\, z^N = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} z^{i+j+k} = (1-z)^{-3}}$$

$$\cancel{S_{n,m} = \sum_{x_1=0}} \quad g_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{n,m} z^m = \ldots = (1-z)^{-n}$$

$$S_{n,m} = \sum_{x_1=0}^{m} \ldots \sum_{x_n=0}^{m} \delta_{m,\Sigma x_i} = \sum_{x_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{x_n=0}^{\infty} \delta_{m,\Sigma x_i}$$

DATA

1.1.7 FUNÇÃO GERADORA (OU GERATRIZ) DE UMA SEQUÊNCIA

Dada (a_n), onde $n=0,1,2\ldots$ ou $n=1,2,\ldots$, $g(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

EXEMPLOS: i) $(1,1,1,\ldots) \longrightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, se $|z|<1$.

ii) $\left(1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\ldots\right) \longrightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

iii) $(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{n-1 \text{ vezes}},0,0,\ldots) \longrightarrow g(z) = 1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$

1.2 CONCEITOS EM PROBABILIDADE

1.2.1 ESPAÇO DE PROBABILIDADE

Ω: espaço amostral, conjunto cujos elementos (os eventos elementares) correspondem às observações "mais simples" de um fenômeno estocástico.

$\mathcal{A}$: espaço de eventos (σ-algebra ou espaço de Borel), coleção de subconjuntos de Ω.

→ axiomas...

$\mathbb{P}$: (medida de) probabilidade,

→ axiomas...

* EXEMPLO: i) lançamento de um dado: $\Omega=\{1,\ldots,6\}$
ii) lançamento de duas moedas: $\Omega=\{(A,A),(A,O),(O,A),(O,O)\}$

~~1.2.2 VARIÁVEL ALEATÓRIA É uma função (?!) que, sob certas condições, associa um número real a cada evento elementar.~~

~~1.2.3 V.A. DISCRETA Assume valores em um conjunto enumerável.~~

1.2.2 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Dado $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$, $A, B \in \mathbb{A}$,

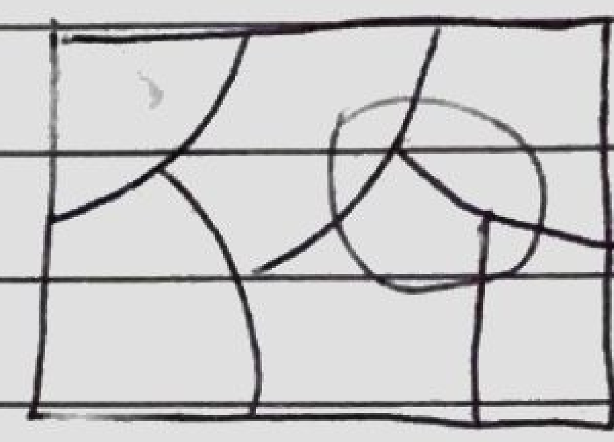
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \text{ se } \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

EXEMPLO: 3 dados honestos, sem repetições, P(um 6)?

P(um 6 | ~~dos~~ s/ repet.)

se $B_1, B_2, \ldots$ for uma família de eventos tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, então $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A, B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$

LEI DA PROB. TOTAL



1.2.3 INDEPENDÊNCIA

$(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$, $A, B \in \mathbb{A}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

OBSERVAÇÃO: eventos mutuamente exclusivos não são independentes. Três eventos podem não ser independentes mesmo que o sejam dois a dois.

1.2.4 VARIÁVEL ALEATÓRIA

É uma função que associa um número real a cada evento, seguindo certas condições matemáticas. Pode ser discreta ou contínua.

DISCRETA: $p_i \equiv \mathbb{P}(X = x_i) \quad \forall i \in M$ — $\{x_1, x_2, \ldots\}$

função massa de probabilidade

conj. enumerável

$f_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$

CONTÍNUA: $f_X(x) \Rightarrow \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

densidade de probabilidade

função distribuição ("acumulada"): $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,dx'$
$\simeq \mathbb{P}(X \leq x)$

$$\boxed{\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)}$$

1.2.5 MOMENTOS

$\langle X^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx$: k-ésimo momento

$\langle (X - \langle X \rangle)^k \rangle$: k-ésimo momento central

$\langle X(X-1)\ldots(X-k+1) \rangle$: k-ésimo momento fatorial

1.2.1 ESPAÇO AMOSTRAL

1.2.2 VARIÁVEL ALEATÓRIA

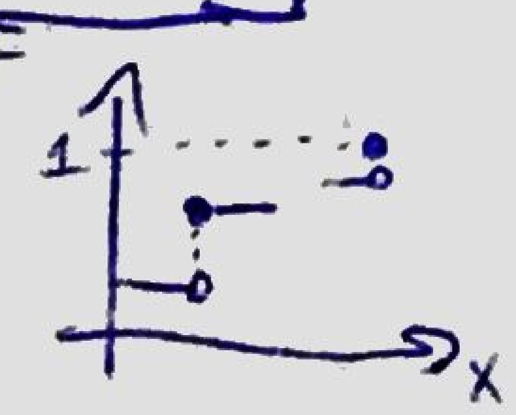
* <u>função</u> que associa um número real a cada evento elementar

→ DISCRETA ↘ $\rho_X(x) = \sum_i p_i \, \delta(x - x_i)$

→ CONTÍNUA

$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x) = \rho_X(x)\,\Delta x + \mathcal{O}[(\Delta x)^2]$$

$$\boxed{F_X(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{x} \rho_X(x')\,dx'} \Leftrightarrow \boxed{\rho_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)}$$



EXEMPLOS:

i) BERNOULLI

$X \sim Be(p)$

$$X = \begin{cases} 0, & \text{c/ prob. } 1-p \\ 1, & \text{c/ prob. } p \end{cases}$$

ii) BINOMIAL

$X \sim B(N, p)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

iii) POISSON $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$

IRR > $\overset{\text{bank}}{r}$ p/ o investimento ser atrativo.

$(-1, 2) \rightsquigarrow 0 = -1 + 2c \Rightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow r = 1$

$(-1, 0, 3) \rightsquigarrow 0 = -1 + 3c^2 \Rightarrow c = 1/\sqrt{3} \Rightarrow r \simeq 0{,}73$

ciclos, custos fixos, inflação...

CAP. 2

NUMERICAL THEORY

PRACTICE: 3, 5 (7), 12, 13

GRADE: 11

AULA 03, 2019-02-26

3. PROBABILIDADE

3.1 CONCEITOS BÁSICOS

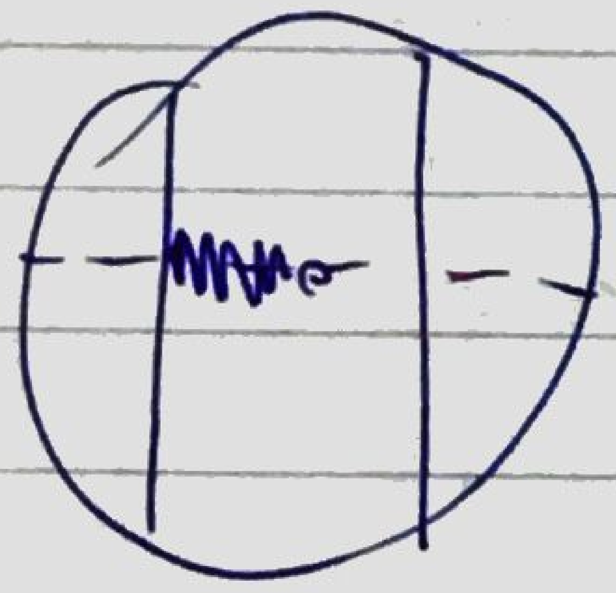
* ESPAÇO AMOSTRAL Ω: CONJ. DE TODOS OS POSSÍVEIS RESULTADOS DE UM "EXPERIMENTO ALEATÓRIO". $\omega \in \Omega$ é um evento elementar.
* EVENTOS: SUBCONJUNTOS DE Ω, $A \subset \Omega$
* ESPAÇO DE EVENTOS (σ-ÁLGEBRA): COLEÇÃO DE SUBCONJUNTOS DE Ω
  → EXEMPLOS: (a) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \Omega\}$
  (b) $\mathcal{F} = 2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$

  i) $\Omega \in \mathcal{F}$, ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \bar{A} \in \mathcal{F}$ iii) $A_i \in \mathcal{F}$; $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$
* (MEDIDA DE) PROBABILIDADE: $A \in \mathcal{F} \longmapsto \mathbb{P}(A) \in [0,1]$
  i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  ii)
  iii) SE, PARA $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$

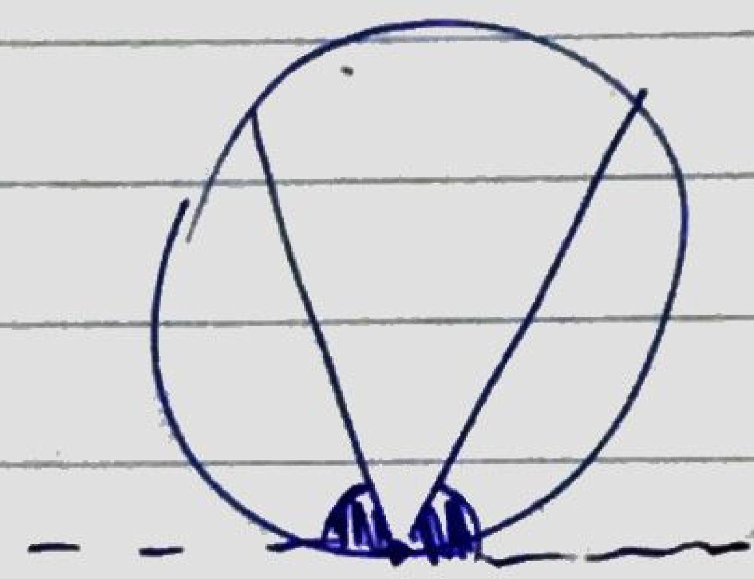
* ESPAÇO DE PROBABILIDADE: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

EXEMPLO: paradoxo de Bertrand

(a) verticais aleatórias (b) ângulos aleatórios no pivô



$P = \frac{1}{2}$



$P = \frac{1}{3}$

3.2 INDEPENDÊNCIA E PROB. CONDICIONAL

* $A, B \in \mathcal{F}$ independentes $\overset{\text{DEF}}{=}$ $\underbrace{\overset{\mathbb{P}(A \cap B)}{\overset{\|}{\mathbb{P}(A,B)}}}_{\text{conjunta}} = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$ → marginais

* SE $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A,B)}{\mathbb{P}(B)}$ → redução do espaço amostral

EXEMPLO: (a) $\mathbb{P}(2, PAR) = \mathbb{P}(2) = 1/6$

(b) $\mathbb{P}(2|PAR) = 1/6 \,/\, 1/2 = 1/3 = \frac{\#\{2\}}{\#\{2,4,6\}}$

AULA 04, 2019-02-28

3.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

$$X: \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega)$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x\})$$

$B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\underbrace{X^{-1}(B)}_{\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in B\}})$$

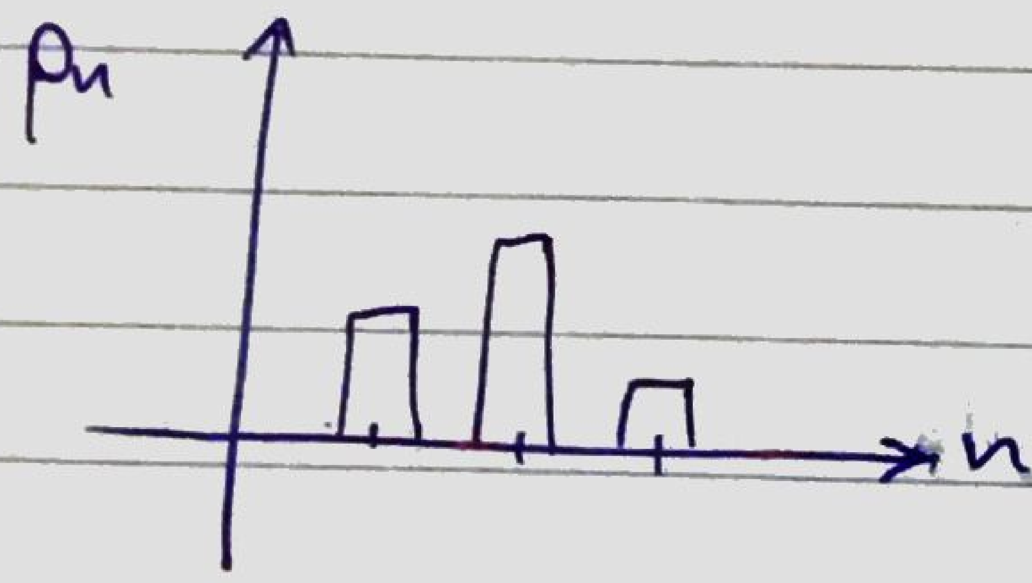
Instituto de Física de São Carlos
www.ifsc.usp.br

→ Borel algebra (smallest σ-algebra containing all real intervals)

$B \in \mathcal{B}$

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_x)$$

* V.A.s DISCRETAS



$p_n = \mathbb{P}(X = n)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \mathbb{P}(X = x) > 0\}$

→ enumerável → X discreta
(state space)

$p_n \geq 0 \qquad \sum_{n \in S} p_n = 1$

$$X \leftrightarrow (S, \{p_n\})$$

EXEMPLOS: (i) BERNOULLI $\quad X \sim Ber(p) \quad , 0 \leq p \leq 1$

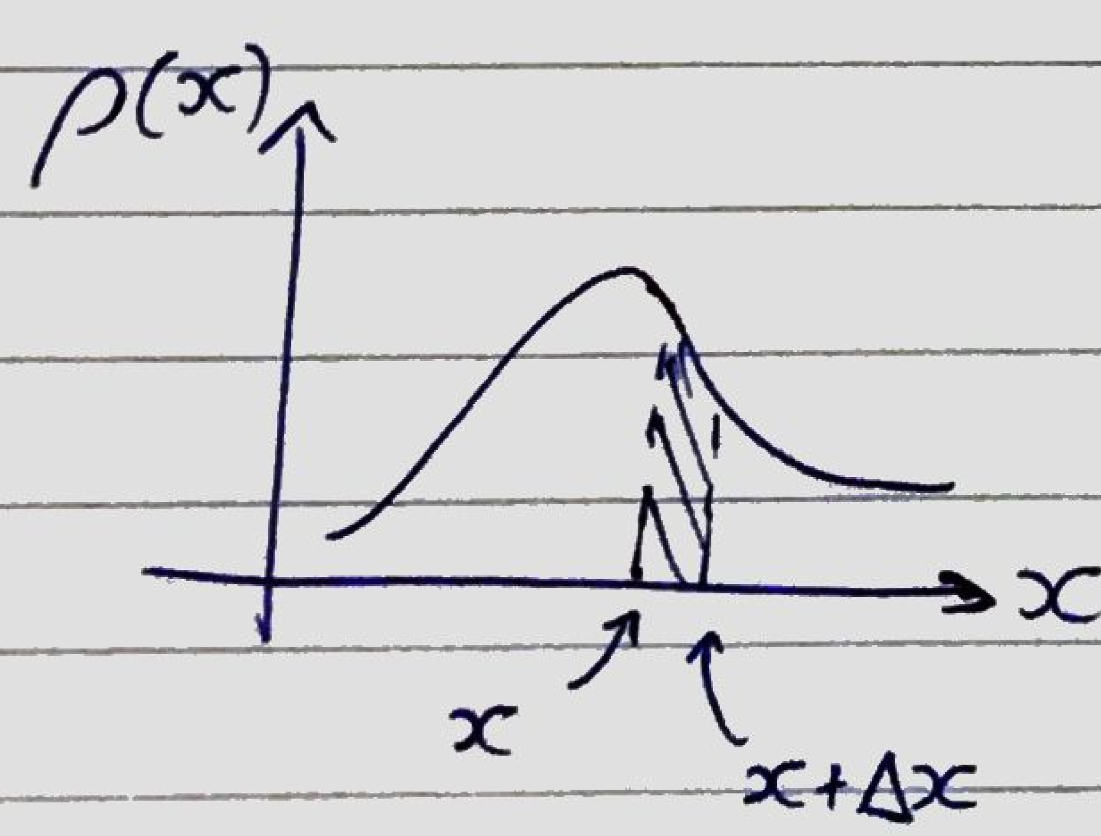
$$X = \begin{cases} 1, & \text{c/ prob. } p \\ 0, & \text{c/ prob. } 1-p \end{cases}$$

(ii) BINOMIAL $\quad X \sim B(n, p) \quad p_k \equiv \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$k = 0, 1, \dots, n$

(iii) POISSON $\quad X \sim P(\lambda) \quad p_n = \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad , n = 0, 1, \dots$

* VA's CONTÍNUAS



$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx p(x)\Delta x$$
$$\parallel$$
$$p(x)\Delta x + O[(\Delta x)^2]$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, p(x) > 0\}$

→ não enumerável

$\mathbb{P}(X = x) = 0 \quad \forall x \in S$

$p(x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x) = 1$